

# 渺位四角系统完美匹配数的计算<sup>①</sup>

张 莲 珠<sup>②</sup>

(厦门大学数学系 厦门 361005)

**摘要** 四角系统的完美匹配有很强的统计物理背景. 本文给出了渺位四角系统完美匹配数的一个计算方法.

**关键词** 四角系统, 完美匹配

**中国图书分类号** O 157.1

平面四角系统是 2-连通平面图, 其每个内部面都是单位正方形(又称为细胞)且每条边至少属于一个细胞. 平面四角系统与平面六角系统类似, 它们的匹配有很强的统计物理背景. 关于这方面的研究已有许多重要的结果. 六角系统完美匹配计数方面的结果参见文献[1~3], 四角系统完美匹配方面的结果参见文献[4~5]. 本文给出了渺位四角系统完美匹配的有效计数方法.

**定义 1** 设  $G$  是平面四角系统的有限 2-连通子图, 若  $G$  中任何四个细胞没有公共顶点, 则称  $G$  为渺位四角系统;  $G$  的一个子图  $G'$  称为  $G$  的子系统, 如果  $G'$  也是四角系统.

**定义 2** 设  $G$  是渺位四角系统, 以  $G$  的所有细胞的重心为顶点集, 并且以一切相邻细胞重心连线为边集得到的图用  $\mathcal{C}$  表示,  $\mathcal{C}$  称为  $G$  的特征图; 当  $\mathcal{C}$  为树时, 称  $G$  为树状四角系统; 当  $\mathcal{C}$  为圈或路时, 称  $G$  为圈状或链状的四角系统.

设  $G$  是渺位四角系统, 分别用  $E(G)$  和  $V(G)$  表示  $G$  的边集和顶点集. 设  $\emptyset \neq V \subseteq V(G)$ ,  $V$  的导出子图  $G[V]$  是指其顶点集合为  $V$ , 边集是  $G$  中两端点均在  $V$  中的那些边全体所对应的图. 类似地定义边子集  $E$  的导出子图, 记为  $G[E]$ . 设  $e \in E(G)$ , 若  $e$  是  $G$  中两个细胞的公共边, 称  $e$  为  $G$  的内部边, 否则称  $e$  为  $G$  的外部边.  $G$  的内部边的集合和外部边的集合分别用  $E$  和  $\hat{E}$  表示. 易见, 外部边集的生成子图  $G[\hat{E}]$  是若干个不交偶圈的并, 而且  $G \setminus E = G[\hat{E}]$ , 因此渺位四角系统全有完美匹配. 特别地把非一度顶点集的导出子图是一条路所对应的渺位四角系统称为锯齿链状的四角系统简称为锯齿链(见图 1).

设  $G$  是含有  $n$  个细胞的锯齿链状的渺位四角系统,  $P$  是由  $G$  的非一度顶点集导出的路. 在  $P$  的两端各连接一条边得到的图  $P$  满足:  $P$  是  $G$  的一条路而且  $G$  中的每个细胞有两条边在  $P$  上. 称  $P$  为  $G$  的中心路(见图 1 的粗线部分),  $P$  的长为  $n+1$ .

设  $C$  是  $G$  的一个细胞, 若  $C$  含有一对平行边是  $G$  的外部边, 称  $C$  为  $G$  的转折细胞.  $G$  的转折细胞集用  $T(G)$  表示. 用  $PM(G)$  和  $m(G)$  分别表示  $G$  的完美匹配集合及完美匹配数. 对于

① 本文 1998-01-14 收到  
② 现工作单位: 漳州师范学院数学系

一般图,有以下结果.

引理 1<sup>[1]</sup> 设  $G$  是一个图,  $G_1, G_2, \dots, G_k$  是它的  $k$  个连通分支, 则  $m(G) = \sum_{i=1}^k m(G_i)$

引理 2 设  $G$  是含有  $n$  个细胞的锯齿链状的渺位四角系统,  $P$  是  $G$  的中心路, 则

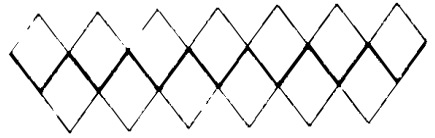


图 1 13 个细胞的锯齿链和它的中心路

Fig. 1 Zig-zag chain with 13 cells and its central path

- 1)  $\forall e \in E(P), \exists M \in PM(G)$ , 使得  $e \in M$ ;
- 2)  $\forall M \in PM(G), \exists e \in E(P)$ , 使得  $e \in M$ ;
- 3)  $m(G) = n + 1$ .

证 设  $P = e_1 e_2 \dots e_{n+1}, e_i = u_{i-1} u_i (i = 1, 2, \dots, n+1)$ . 记与  $u_{i-1}, u_i, u_{i+1}$  含于同一个细胞的另一个顶点为  $v_i (i = 1, 2, \dots, n)$ . 由  $e_1 e_2 \dots e_{n+1}$  为中心路对应于  $G$  的子锯齿链为  $G_i$ .

1) 由于  $e_1$  (或  $e_{n+1}$ )  $\in \hat{E}, G[\hat{E}]$  是一个偶圈, 因此存在  $M \in PM(G)$ , 使得  $e_1$  (或  $e_{n+1}$ )  $\in M$ . 对于任意的  $e_i \in E, e_i$  是  $G_{i-1}$  和  $G_{i,n+1}$  的外部边, 因此  $\exists M_1 \in PM(G_{i-1}), M_2 \in PM(G_{i,n+1})$  使得  $e_i \in M_1 \cap M_2$ . 而  $M_1 \cap M_2 \in PM(G)$ , 即  $M_1 \cap M_2$  是含  $e_i$  的完美匹配.

2)  $G \setminus E(P)$  是两条不交路, 当  $n$  为奇数时, 两条路分别为  $u_0 v_1 u_2 v_3 \dots u_{n-1} v_n u_{n+1}$  和  $u_1 v_2 u_3 v_4 \dots v_{n-1} u_n$ ; 当  $n$  为偶数时, 两条路分别为  $u_0 v_1 u_2 \dots v_{n-1} u_n$  和  $u_1 v_2 u_3 \dots v_n u_{n+1}$ . 即  $G \setminus E(P)$  是两条偶长的路. 又偶长路不合完美匹配, 因此  $\forall M \in PM(G), \exists e \in E(P)$ , 使得  $e \in M$ .

若  $\exists M \in PM(G), e_i, e_j \in E(P), i \neq j$ , 使得  $e_i, e_j \in M$ . 不妨设  $j > i + 1, e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_{j-1} \notin M$ . 考虑  $G_{ij}$ , 由 1) 的证明知  $G_{ij} \setminus \{e_i, e_{i+1}, \dots, e_j\}$  是两条偶长的路并且路长  $\geq 2$ . 将这两条路去掉与  $e_i, e_j$  关联的边还是偶长的路. 所以  $G \setminus \{e_i, e_{i+1}, \dots, e_j\}$  去掉与  $e_i, e_j$  关联的边有两个分支是偶长路. 与  $M$  是含  $e_i, e_j$  的完美匹配矛盾. 结论 2) 成立.

3) 由  $G$  的中心路长为  $n + 1$  及 1), 2) 即得.

引理 3 设  $G$  是渺位四角系统,  $M \in PM(G), C \in T(G), e, e'$  是对应于  $C$  的一对平行外部边. 如果  $\{e, e'\}$  是  $G$  的边割, 则  $\{e, e'\} \subseteq M$  或  $\{e, e'\} \cap M = \emptyset$ .

证 由条件可得  $G \setminus \{e, e'\}$  的两个分支是  $G$  的子图, 记为  $G_1, G_2$ . 若  $e = uv \in M$ , 但  $e' \notin M$ , 不妨设  $u \in V(G_1), v \in V(G_2)$ , 则  $M \setminus \{e\}$  是  $(G_1 - \{u\}) \cup (G_2 - \{v\})$  的完美匹配. 但  $(G_1 - \{u\}) \cup (G_2 - \{v\}) = \emptyset$  且  $|V(G_1 - \{u\})|$  和  $|V(G_2 - \{v\})|$  为奇数得出  $(G_1 - \{u\}) \cup (G_2 - \{v\})$  没有完美匹配, 矛盾.

一个渺位四角系统  $G$  的子图  $G_1$  是  $G$  的极大锯齿链, 如果  $G_1$  是锯齿链并且不存在真包含  $G_1$  的  $G$  的子图是锯齿链. 易见  $G$  的任一个极大锯齿链两端细胞均为  $G$  的转折细胞. 对  $G$  的一个子图  $G_1$ , 用  $G \setminus G_1$  表示  $G$  的一个子图满足  $G_1$  中的任一个细胞都不含于  $G \setminus G_1$  中且  $(G \setminus G_1) \cup G_1 = G$ .

引理 4 设  $G$  是渺位四角系统,  $C \in T(G), Z_1, Z_2, \dots, Z_r$  是  $G$  中含  $C$  的所有极大锯齿链 (1  $r$  4),  $e, e'$  是对应于  $C$  的平行外边, 则  $G$  中含  $e, e'$  的完美匹配数  $m_G(e, e') = m(G \setminus (\bigcup_{i=1}^r Z_i))$ .

证 因为  $Z_1, Z_2, \dots, Z_r$  同时包含  $C$ , 所以  $\{e, e'\}$  是  $G = \bigcup_{i=1}^r Z_i$  的边割. 由引理 3,  $e, e'$  同时含于或者同时不含于  $G$  的一个完美匹配中, 又由引理 2 的 2),  $e, e'$  唯一确定锯齿链  $Z_i (i = 1, 2, \dots, r)$  的一个完美匹配. 因此唯一确定  $G$  的一个完美匹配. 故引理 4 成立.

树状渺位四角系统任一个转折细胞对应的一对平行外边都是边割, 由引理 3 和引理 4 直接可得

定理 1 设  $G$  是树状四角系统,  $C \in T(G)$ ,  $e, e'$  是对应于  $C$  的一对平行外边, 则  $G$  的完美匹配数  $m(G) = m(G \setminus \{e, e'\}) + m(G \setminus G)$ , 其中  $G$  是含  $C$  的所有极大锯齿链的并.

定理 1 说明树状四角系统完美匹配数的计算可以转化为转折细胞数较小的树状四角系统的完美匹配数的计算. 而转折细胞数最小的树状四角系统是锯齿链, 由引理 23) 容易算出锯齿链的完美匹配数.

引理 5 设  $G$  是圈状的四角系统,  $C \in T(G)$ ,  $e, e'$  是对应于  $C$  的一对平行外边, 则

$$m_G(e \setminus e') = m_G(e' \setminus e) = 1$$

这里  $m_G(e \setminus e')$  表示  $G$  中含  $e$  不含  $e'$  的完美匹配数.

证 设  $M \in PM(G)$ ,  $e \in M, e' \notin M$ , 我们证明  $M$  不含  $G$  的内部边. 若不然,  $\exists G$  的内部边  $a \in M$ , 由引理 2 的 2),  $a$  不含于任何一个由  $C$  扩充的极大锯齿链中. 设含内部边  $a$  的两个细胞为  $C_1, C_2$ . 由  $C_1, C_2$  唯一扩充  $G$  的一个极大锯齿链系统记为  $Z_a$ , 则  $Z_a$  两端的细胞是  $G$  的转折细胞. 由引理 2 的 2), 这两个转折细胞对应的平行外边均不含于  $M$  中, 而  $G \setminus Z_a$  是树状四角系统, 由引理 3 得  $m_{G \setminus Z_a}(e \setminus e') = 0$ , 从而  $m_G(e \setminus e') = 0$ . 但  $G \setminus \hat{E}$  是两个分别含  $e, e'$  的偶圈, 唯一确定一个含  $e$  不含  $e'$  的完美匹配. 因此  $M$  不含  $G$  的内部边, 且  $m_G(e \setminus e') = 1$ , 类似的有  $m_G(e' \setminus e) = 1$ .

设  $G_0$  是渺位四角系统  $G$  的圈状子系统,  $C \in T(G_0)$ ,  $e, e'$  是对应于  $C$  的平行外边,  $M_0(e \setminus e')$  表示  $G_0$  中含  $e$  不含  $e'$  的唯一完美匹配,  $\mathcal{T}_0(e \setminus e')$  表示  $G$  中含有  $M_0(e \setminus e')$  的边的细胞的并图. 显然  $\mathcal{T}_0(e \setminus e') \supseteq G_0$ . 由引理 5 可以推得

引理 6 设  $G$  是渺位四角系统,  $C \in T(G)$ ,  $e, e'$  是对应于  $C$  的平行外边,  $\{e, e'\}$  不是  $G$  的边割,  $G_0$  是  $G$  的含细胞  $C$  的任一圈状子系统, 则  $G$  中含  $e$  不含  $e'$  的完美匹配数

$$m_G(e \setminus e') = m(G \setminus \mathcal{T}_0(e \setminus e'))$$

综合引理 3~6, 我们有

定理 2 设  $G$  是渺位四角系统,  $C \in T(G)$ ,  $e, e'$  是对应于  $C$  的平行外边, 含  $C$  的  $G$  的所有极大锯齿链的并图记为  $G'$ , 那么

1) 若  $\{e, e'\}$  是  $G$  的边割, 则

$$m(G) = m(G \setminus \{e, e'\}) + m(G \setminus G')$$

2) 若  $\{e, e'\}$  不是  $G$  的边割,  $G_0$  是  $G$  中含  $C$  的任一圈状子系统, 则

$$m(G) = m(G \setminus \{e, e'\}) + m(G \setminus G') + m(G \setminus \mathcal{T}_0(e \setminus e')) + m(G \setminus \mathcal{T}_0(e' \setminus e))$$

利用定理 2, 可以将图 2 中图  $G$  的完美匹配数的计算分解为图  $G_1, G_2, G_3, G_4$  的完美匹配数的计算. 图 2 中的粗线表示所有转折细胞的平行外边.  $G_1, G_2, G_3, G_4$  的完美匹配数分别对应于定理 2 之 2) 中等式右边的第一、二、三、四项.

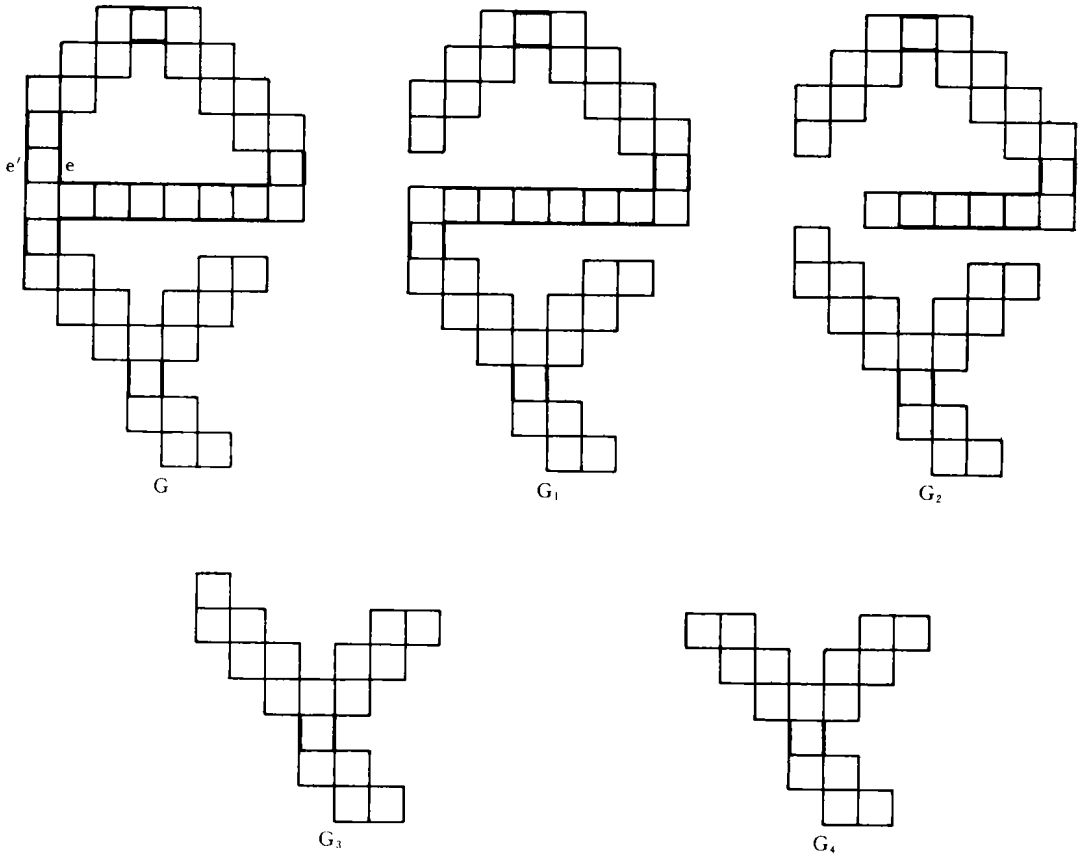


图 2 渺位四角系统和它的分解图

Fig. 2 A catacondensed polyomino and its decomposition graphs

### 参 考 文 献

- 1 Gutman I. Topological properties of benzenoid molecules. Bulletin de la société chimique beograd, 1982, 47 (9): 453 ~ 471
- 2 张福基, 刘育亭, 郭晓峰. 树状多六边形的完美匹配计数. 新疆大学学报(自然版), 1985, 2(3): 7 ~ 11
- 3 张福基, 陈治柏. 广义渺位苯图完美匹配的计算. 新疆大学学报(自然版), 1986, 3(3): 6 ~ 9
- 4 Zhang Heping. The connectivity of  $z$ -transformation graphs of perfect matchings of polyominoes. Discrete Mathematics, 1996, 158: 257 ~ 272
- 5 Zhang Heping, Zhang Fuji. Perfect matchings of polyomino graphs. Graphs and Combinatorics, 1997, 13: 295 ~ 304

# The Enumeration of Perfect Matchings in Catacondensed Polyominoes

Zhang Lianzhu

(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005)

**Abstract** A polyomino (graph) is a connected finite subgraph of the infinite plane grid such that each interior face is surrounded by a unit square (called a cell) and each edge belongs to at least one cell. A catacondensed polyomino is a 2-connected subgraph of a polyomino such that no four cells have a common vertex. In this paper, a way for calculating the number of perfect matchings in catacondensed polyominoes is given.

**Key words** Polyomino, Perfect matchings