总 38 卷 第 4 期
2005 年 12 月

数 学 研 究
Journal of Mathematical Study

Vol.38 No.4
Dec. 2005

$B_2 \times B_2$ 的全纯自同构群

肖金秀 黄 涛 严荣沐 陈永发
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘 要 讨论 $B_2 \times B_2$ 上的全纯自同构群, 并计算它的 Bergman 核函数及其自同构的 Jacobi 行列式.

关键词 全纯自同构群; Bergman 核函数; Jacobi 行列式
中图分类号 O 174.56 文献标识码 A

1 引 言

在高维复空间, 单复变中经典的 Riemann 映射定理不再成立, 由此导致了多复变中许多问题的讨论更为复杂, 计算多复变中域的全纯自同构群就是其中之一. 它不象单复变中计算出圆盘的全纯自同构群就可以一劳永逸, 对于不同的域要进行不同的计算.

本文所讨论的域为 $B_2 \times B_2$(其中 $B_2 \subset C^2$ 为单位球), 我们对它的全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(B_2 \times B_2)$ 及其 Bergman 核函数进行讨论.

由 [1] 中定理 2.3.9 的结论, 对任意的 $a = (a_1, a_2) \in B_2 \times B_2$, 记 $s_i^2 = 1 - |a_i|^2$, $p_i = \frac{\bar{a}_i' a_i}{|a_i|^2}$; 如果 $a_i = 0, p_i = 0$, $A_i = s_i I_2 + (1 - s_i) p_i$, 那么

$$\varphi_i(Z_i) = \frac{a_i - Z_i A_i}{1 - \bar{a}_i Z_i'}.$$

则 $\varphi(Z) = (\varphi_1(Z_1), \varphi_2(Z_2))$, 显然 $\varphi(Z) \in \mathrm{Aut}(B_2 \times B_2)$ 并且 $\varphi(a) = 0$.

本文的主要结果为以下两个定理:

定理 1 若 $F \in \mathrm{Aut}(B_2 \times B_2)$ 且 $F(a) = 0$, 其中 $a = (a_1, a_2) \in B_2 \times B_2$, 则

$$F(Z) = f \circ \varphi(Z),$$

其中 $f(Z) = UZ, Z = (Z_1, Z_2)' \in B_2 \times B_2, U = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 0 & B \\ D & 0 \end{pmatrix}$, B、D 为二阶酉矩阵.

定理 2 $B_2 \times B_2$ 的 Bergman 核函数是 $K(z, \xi) = \frac{4}{\pi^4} \frac{1}{(1 - \langle z, \xi \rangle)^6}$, 若 $F \in \mathrm{Aut}(B_2 \times B_2)$, 则

° 收稿日期: 2004- 11- 24
基金项目: 国家自然科学基金(10501036; 10271097) ; 福建省自然科学基金资助项目(J0511003)

$$\det F'(z) = \left|\frac{1-|F(z)|^2}{1-|z|^2}\right|^6.$$

2　主要结果的证明

引理 1　若 $f\in \mathrm{Aut}(B_2\times B_2)$ 且 $f(0)=0$, 则 $f(Z)=UZ$, $Z=(Z_1, Z_2)'\in B_2\times B_2$, $U=\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}0 & B\\ D & 0\end{pmatrix}$, B、D 为二阶酉矩阵.

证明　由[1]中定理 2.3.3 的推论知 f 是个线性映射. 记 $f=(f_1,f_2,f_3,f_4)'$, 则 $f_i(Z)=a_{i1}z_1+a_{i2}z_2+a_{i3}z_3+a_{i4}z_4$ 或写为

$$f(Z)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{pmatrix}=AZ$$

因 $f\in\mathrm{Aut}(B_2\times B_2)$ 则有

$$\begin{cases}|f_1|^2+|f_2|^2\le 1\\ |f_3|^2+|f_4|^2\le 1\end{cases}\tag{1}$$

令 $z^{(l)}=\left(1-\frac{1}{l}, 0, 0, 0\right)$. 让 $l\to\infty$ 时, 它的极限点在 $\partial(B_2\times B_2)$ 上, 所以 $f(z^{(l)})$ 的极限点也在 $\partial(B_2\times B_2)$ 上, 则由(1) 得 $\begin{cases}|a_{11}|^2+|a_{21}|^2=1\\ \text{或 } |a_{31}|^2+|a_{41}|^2=1\end{cases}$ 同理有

$$\begin{cases}|a_{12}|^2+|a_{22}|^2=1\\ \text{或 } |a_{32}|^2+|a_{42}|^2=1\end{cases}\quad \begin{cases}|a_{13}|^2+|a_{23}|^2=1\\ \text{或 } |a_{33}|^2+|a_{43}|^2=1\end{cases}\quad \begin{cases}|a_{14}|^2+|a_{24}|^2=1\\ \text{或 } |a_{34}|^2+|a_{44}|^2=1\end{cases}$$

下面我们分几种情况进行讨论.

(一) 设 $|a_{34}|^2+|a_{44}|^2=1$, $|a_{33}|^2+|a_{43}|^2=1$, $|a_{11}|^2+|a_{21}|^2=1$, $|a_{12}|^2+|a_{22}|^2=1$. 取 $Z=(0,0,z_3,z_4)$, 其中 $(z_3,z_4)\in B_2$, 则

$$f(Z)=AZ=(a_{13}z_3+a_{14}z_4, a_{23}z_3+a_{24}z_4, a_{33}z_3+a_{34}z_4, a_{43}z_3+a_{44}z_4)\in(B_2\times B_2),$$

故 $|a_{33}z_3+a_{34}z_4|^2+|a_{43}z_3+a_{44}z_4|^2\le 1$,

即

$$|a_{33}|^2|z_3|^2+|a_{34}|^2|z_4|^2+a_{33}\overline{a_{34}}z_3\overline{z_4}+\overline{a_{33}}a_{34}\overline{z_3}z_4 + |a_{43}|^2|z_3|^2+|a_{44}|^2|z_4|^2+a_{43}\overline{a_{44}}z_3\overline{z_4}+\overline{a_{43}}a_{44}\overline{z_3}z_4\le 1\tag{2}$$

令 $a_{33}\overline{a_{34}}+a_{43}\overline{a_{44}}=|a_{33}\overline{a_{34}}+a_{43}\overline{a_{44}}|e^{i\varphi}$, $z_3=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\varphi}{2}}$, $z_4=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ 则上式(2) 为 $|a_{33}\overline{a_{34}}+a_{43}\overline{a_{44}}|\le 0\Rightarrow a_{33}\overline{a_{34}}+a_{43}\overline{a_{44}}=0$, 这说明矩阵 $\begin{pmatrix}a_{33} & a_{34}\\ a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}$ 为二阶酉矩阵.

对 $\forall(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\overline{B_2\times B_2}$ 由(1) 得

$$|a_{31}z_1+a_{32}z_2+a_{33}z_3+a_{34}z_4|^2+|a_{41}z_1+a_{42}z_2+a_{43}z_3+a_{44}z_4|^2\le 1.\tag{3}$$

对固定 $(z_1,z_2)\in B_2$ 令 $a_{31}z_1+a_{32}z_2=|a_{31}z_1+a_{32}z_2|e^{i\theta_1}$, $a_{41}z_1+a_{42}z_2=|a_{41}z_1+a_{42}z_2|e^{i\theta_2}$, 因 $\begin{pmatrix}a_{33} & a_{34}\\ a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}$ 为酉矩阵, 则 $\exists(z_3,z_4)\in\partial B_2$, 使得

$$\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} \\ e^{i\theta_2} \end{pmatrix}.$$

则由(3) 得

$$\left(|a_{31}z_1 + a_{32}z_2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(|a_{41}z_1 + a_{42}z_2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \le 1,$$

从而

$$|a_{31}z_1 + a_{32}z_2| = 0,\quad |a_{41}z_1 + a_{42}z_2| = 0\ \forall (z_1, z_2) \in B_2,$$

因而有 $a_{31} = 0, a_{32} = 0, a_{41} = 0, a_{42} = 0$. 所以由 $f \in \mathrm{Aut}(B_2 \times B_2)$, 得矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 非奇异. 取 $Z = (z_1, z_2, 0, 0)$, 其中 $(z_1, z_2) \in B_2$ 则 $f(Z) = AZ = (a_{11}z_1 + a_{12}z_2, a_{21}z_1 + a_{22}z_2, a_{31}z_1 + a_{32}z_2, a_{41}z_1 + a_{42}z_2) \in (B_2 \times B_2)$ 则由(1) 得 $|a_{11}z_1 + a_{12}z_2|^2 + |a_{21}z_1 + a_{22}z_2|^2 \le 1$, 即 $|a_{11}|^2|z_1|^2 + |a_{12}|^2|z_2|^2 + a_{11}\overline{a_{12}}z_1\overline{z_2} + \overline{a_{11}}a_{12}\overline{z_1}z_2 + |a_{21}|^2|z_1|^2 + |a_{22}|^2|z_2|^2 + a_{21}\overline{a_{22}}z_1\overline{z_2} + \overline{a_{21}}a_{22}\overline{z_1}z_2 \le 1$. 因此

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + (a_{11}\overline{a_{12}} + a_{21}\overline{a_{22}})z_1\overline{z_2} + (\overline{a_{11}}a_{12} + \overline{a_{21}}a_{22})\overline{z_1}z_2 \le 1. \tag{4}$$

令 $a_{11}\overline{a_{12}} + a_{21}\overline{a_{22}} = |a_{11}\overline{a_{12}} + a_{21}\overline{a_{22}}|e^{i\varphi}, z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\varphi}{2}}, z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\varphi}{2}}$ 则(4) 为 $|a_{11}\overline{a_{12}} + a_{21}\overline{a_{22}}| \le 0$, 即 $a_{11}\overline{a_{12}} + a_{21}\overline{a_{22}} = 0$, 这说明矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 为二阶酉矩阵. 对 $\forall (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \overline{B_2 \times B_2}$ 由(1) 得

$$|a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{13}z_3 + a_{14}z_4|^2 + |a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{23}z_3 + a_{24}z_4|^2 \le 1. \tag{5}$$

对固定的 $(z_3, z_4) \in B_2$, 令 $a_{13}z_3 + a_{14}z_4 = |a_{13}z_3 + a_{14}z_4|e^{i\theta_1'}, a_{23}z_3 + a_{24}z_4 = |a_{23}z_3 + a_{24}z_4|e^{i\theta_2'}$, 因 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 为酉矩阵, 对 $\exists\ (z_1, z_2) \in \partial B_2$, 使得

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\theta_1'} \\ e^{i\theta_2'} \end{pmatrix}$$

则由(5) 得

$$\left(|a_{13}z_3 + a_{14}z_4| + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(|a_{23}z_3 + a_{24}z_4| + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \le 1.$$

由此得

$$|a_{13}z_3 + a_{14}z_4| = 0,\quad |a_{23}z_3 + a_{24}z_4| = 0\ \forall (z_1, z_2) \in B_2,$$

从而有 $a_{13} = 0, a_{14} = 0, a_{23} = 0, a_{24} = 0$.

综上所述, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ 其中 B, D 为二阶酉矩阵. 即

$$f(Z) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}(B_2 \times B_2),$$

其中 $z_1 \in B_2, z_2 \in B_2$ 且 B, D 均为二阶酉矩阵.

(二) 设 $|a_{13}|^2 + |a_{23}|^2 = 1$, $|a_{14}|^2 + |a_{24}|^2 = 1$, $|a_{31}|^2 + |a_{41}|^2 = 1$, $|a_{32}|^2 + |a_{42}|^2 = 1$, 同样可以推得 $f(Z) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ D & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$, 其中 $Z_1 \in B_2, Z_2 \in B_2, B, D$ 为二阶酉矩阵.

(三) 若 $|a_{11}|^2+|a_{21}|^2=1$, $|a_{13}|^2+|a_{23}|^2=1$, $|a_{32}|^2+|a_{42}|^2=1$, $|a_{34}|^2+|a_{44}|^2=1$, 取 $Z=(e^{-i\varphi_{11}}, 0, e^{i\varphi_{13}}, 0)$ 则 $Z\in\partial(B_2\times B_2)$, 记 $a_{11}=|a_{11}|e^{i\varphi_{11}}$, $a_{13}=|a_{13}|e^{i\varphi_{13}}$, 则

$$\begin{aligned}f(Z)&=AZ\\&=(|a_{11}|+|a_{13}|, a_{21}e^{-i\varphi_{11}}+a_{23}e^{-i\varphi_{13}},\\&\quad a_{31}e^{-i\varphi_{11}}+a_{33}e^{-i\varphi_{13}}, a_{41}e^{-i\varphi_{11}}+a_{43}e^{-i\varphi_{13}})\end{aligned}$$

由(1) 式知 $|f_1|\le 1$, 所以 $|a_{11}|+|a_{13}|\le 1$. 同理若取 $Z=(e^{-i\varphi_{21}}, 0, e^{-i\varphi_{23}}, 0)$, 得 $|a_{21}|+|a_{23}|\le 1$, 从而 $(|a_{11}|+|a_{13}|)^2+(|a_{21}|+|a_{23}|)^2\le 2$, 因而 $|a_{11}|^2+|a_{13}|^2+2|a_{11}||a_{13}|+|a_{21}|^2+|a_{23}|^2+2|a_{21}||a_{23}|\le 2$, 所以 $|a_{11}||a_{13}|+|a_{21}||a_{23}|\le 0\Rightarrow |a_{11}||a_{13}|=0$, $|a_{21}||a_{23}|=0$. 若 $a_{11}=0$, 则由 $|a_{11}|^2+|a_{21}|^2=1$ 得 $|a_{21}|=1$, 若 $a_{23}=0$, 则由 $|a_{13}|^2+|a_{23}|^2=1$ 得 $|a_{13}|=1$. 设 $a_{13}=e^{i\varphi_{13}}$, $a_{21}=e^{i\varphi_{21}}$, $a_{12}=|a_{12}|e^{i\varphi_{12}}$, $a_{22}=|a_{22}|e^{i\varphi_{22}}$, 取 $Z=(0, e^{-i\varphi_{12}}, e^{-i\varphi_{13}}, 0)\in\partial(B_2\times B_2)$, 则

$$f(Z)=(|a_{12}|+1, a_{22}e^{-i\varphi_{12}}+a_{23}e^{-i\varphi_{13}}, a_{32}e^{-i\varphi_{12}}+a_{33}e^{-i\varphi_{13}}, a_{42}e^{-i\varphi_{12}}+a_{43}e^{-i\varphi_{13}}),$$

所以由 $|f_1|\le 1$, 知 $a_{12}=0$, 同理 $a_{22}=0$, $a_{14}=0$, $a_{24}=0$, 此时

$$A=\begin{pmatrix}0&0&a_{13}&0\\a_{21}&0&0&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}.$$ 若 $a_{13}=0$, 则同理可得 $$A=\begin{pmatrix}a_{11}&0&0&0\\0&0&a_{23}&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$$

若令 $a_{32}=|a_{32}|e^{i\varphi_{32}}$, $a_{34}=|a_{34}|e^{i\varphi_{34}}$, 用类似上面的方法可以得到, 当 $a_{32}=0$,

$$A=\begin{pmatrix}0&0&a_{13}&0\\a_{21}&0&0&0\\0&0&0&a_{34}\\0&a_{42}&0&0\end{pmatrix}.$$ 当 $a_{34}=0$, $$A=\begin{pmatrix}0&0&a_{13}&0\\a_{21}&0&0&0\\0&a_{32}&0&0\\0&0&0&a_{44}\end{pmatrix}$$

取 $a_{13}=|a_{13}|e^{i\varphi_{13}}$, $a_{21}=|a_{21}|e^{i\varphi_{21}}$, 则 $f(Z)=(|a_{13}|, |a_{21}|, 0, 0)$, 又由 $|f_1|^2+|f_2|^2\le 1$ 及 $|a_{13}|=1$, $|a_{21}|=1$, 得 $|a_{13}|^2+|a_{21}|^2=2$, 矛盾! 所以这种情况不存在.

(四) 若 $|a_{12}|^2+|a_{22}|^2=1$, $|a_{14}|^2+|a_{24}|^2=1$, $|a_{31}|^2+|a_{41}|^2=1$, $|a_{33}|^2+|a_{43}|^2=1$, 类似与(三) 讨论, 可知这种情况不存在.

(五) 若 $|a_{11}|^2+|a_{21}|^2=1$, $|a_{12}|^2+|a_{22}|^2=1$, $|a_{13}|^2+|a_{23}|^2=1$, $|a_{34}|^2+|a_{44}|^2=1$, 由 $|a_{11}|^2+|a_{21}|^2=1$, $|a_{12}|^2+|a_{22}|^2=1$, 依(一) 的方法可以得到 $a_{13}=0$, $a_{23}=0$, $a_{14}=0$, $a_{24}=0$, 这与 $|a_{13}|^2+|a_{23}|^2=1$ 矛盾! 所以这种情况也不存在!

(六) $|a_{12}|^2+|a_{22}|^2=1$, $|a_{13}|^2+|a_{23}|^2=1$, $|a_{31}|^2+|a_{41}|^2=1$, $|a_{34}|^2+|a_{44}|^2=1$, 取 $Z=(0, e^{i\varphi_{12}}, e^{-i\varphi_{13}}, 0)\in\partial(B_2\times B_2)$. 则

$$f(Z)=(|a_{12}|+|a_{13}|, a_{22}e^{-i\varphi_{12}}+a_{23}e^{-i\varphi_{13}}, a_{32}e^{-i\varphi_{12}}+a_{33}e^{-i\varphi_{13}}, a_{42}e^{-i\varphi_{12}}+a_{43}e^{-i\varphi_{13}}).$$

由 $|f_1|^2+|f_2|^2\le 1\Rightarrow |f_1|\le 1\Rightarrow |a_{12}|+|a_{13}|\le 1$, 同理可得 $|a_{22}|+|a_{23}|\le 1$, $|a_{32}|+|a_{33}|\le 1$, $|a_{42}|+|a_{43}|\le 1$ 知 $(|a_{12}|+|a_{13}|)^2+(|a_{22}|+|a_{23}|)^2\le 2$, 则 $|a_{12}|^2+|a_{13}|^2+2|a_{12}||a_{13}|+|a_{22}|^2+|a_{23}|^2+2|a_{22}||a_{23}|\le 2$. 由 $|a_{12}|^2+|a_{22}|^2=1$, $|a_{13}|^2+|a_{23}|^2=1$ 得 $|a_{12}||a_{13}|=0$, $|a_{22}||a_{23}|=0$. 类似(三) 的讨论, 此种情况不存在!

综上所述在 $f(0)=0$ 时, $B_2\times B_2$ 的全纯自同构群只有两种情况, 即 $F(Z)=UZ$. 其中

$$U = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} 0 & B \\ D & 0 \end{pmatrix} \quad B、D \text{为二阶酉矩阵}.$$

若对任意的 $a = (a_1, a_2) \in B_2 \times B_2$ 且 $a \neq 0, F(a) = 0$. 记 $\varphi(Z) = (\varphi_1(Z_1), \varphi_2(Z_2))$. 由定理 1 之前的讨论, $\varphi(Z)$ 为全纯映射, 且 $\varphi(Z) \in \mathrm{Aut}(B_2 \times B_2)$, $\varphi(a) = 0$.
令 $f^{-1} = \varphi \circ F^{-1}$, 则 $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(B_2 \times B_2)$, 且 $f^{-1}(0) = \varphi(a) = 0$, 从而

$$F(Z) = f \circ \varphi(Z), \text{则} F(Z) \in \mathrm{Aut}(B_2 \times B_2).$$

定理 1 获证.

定理 2 的证明.

由[1] 中命题 3. 3. 5, 乘积域的核函数等于每个域的核函数的乘积, 又由[1] 中例 3. 3. 7 得 $B_2 \times B_2$ 的核函数是

$$K(z, \zeta) = \frac{4}{\pi^4} \frac{1}{(1 - \langle z, \zeta \rangle)^6}.$$

对于自同构 $F(Z)$ 的 Jacobi 行列式为

$$|\det F'(z)|^2 = \frac{K(z, z)}{K(F(z), F(z))} = \left| \frac{1 - |F(z)|^2}{1 - |z|^2} \right|^6.$$

参 考 文 献

[1] 史济怀. 多复变函数论基础. 高等教育出版社, 1996.
[2] Rudin W. Function theory in the unit ball of C^n New York, Springer Verlag, 1980.
[3] Krantz S. G. Function theory of several complex variables New York, John Wiley & Sons, 1982.

Holomorphic automorphism group of $B_2 \times B_2$

Xiao Jinxiu Huang Tao Yan Rongmu Chen Yongfa
(School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen Fujian 361005)

Abstract In this paper we first investigate the holomorphic automorphism group of $B_2 \times B_2$, then calculate the Bergman kernel and the Jacobi determinant of the automorphism of $B_2 \times B_2$.

Key Words Holomorphic automorphism group; Bergman kernel, Jacobi determinant.