第 45 卷　第 5 期　　厦门大学学报(自然科学版)　　Vol.45　No.5
2006 年 9 月　　Journal of Xiamen University (Natural Science)　　Sep. 2006

复 Finsler 流形上的两个问题

肖金秀, 严荣沐*

(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 类似于实 Finsler 流形, 在复流形的全纯切丛上引进 Finsler 度量 F, 并且定义 $G = F^2$ 为垂直丛上一 Hermitian 度量, 然后利用 Hermitian 一些技巧得到复 Finsler 流形上的一些几何性质. 在此基础上讨论了复流形 M 上给定的两个弱 Kähler 复 Finsler 度量, 如果它们射影等价则必仿射等价, 以及流形 M 上赋予由复 Berwald 流形上复 Finsler 度量诱导的实 Finsler 度量必为实 Berwald 流形.

关键词: Finsler 度量; 射影等价; 仿射等价; Berwald 流形

中图分类号: O 174.56　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 0438-0479(2006)05-0614-03

设 M 为 n 维复流形, $\{z^1, z^2, \cdots, z^n\}$ 为复流形上的局部坐标系, 其中 $z^\alpha = x^\alpha + ix^{n+\alpha}$, 则 $\{x^1, \cdots, x^n, x^{n+1}, \cdots, x^{2n}\}$ 为实局部坐标. 令 $T_CM = T_RM \otimes_R C$ 为复化切丛, $\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - i\frac{\partial}{\partial x^{n+\alpha}})$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z^\alpha}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + i\frac{\partial}{\partial x^{n+\alpha}})$, 则 $\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^n}, \frac{\partial}{\partial \overline{z^1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \overline{z^n}}\}$ 为 T_CM 的局部标架, 且 T_CM 有直和分解:

$$T_CM = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M,$$

其中 $T^{1,0}M$ 的局部标架为 $\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^n}\}$, $T^{0,1}M$ 的局部标架为 $\{\frac{\partial}{\partial \overline{z^1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \overline{z^n}}\}$.

记 $o: M \to TM$ 为 T_CM 的零截面, 即 $o(p) = o_p$ 为 T_PM 的原点. 我们记 $\widetilde{M} = T_CM \backslash o(M)$, 则 $\widetilde{M}$ 的全纯切丛 $T^{1,0}\widetilde{M} = \mathcal{V}^{1,0} \oplus H^{1,0}$ (其中 $H^{1,0}$ 为复水平丛, $\mathcal{V}^{1,0}$ 为复垂直丛). 记 $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$, $\dot{\partial}_\alpha = \frac{\partial}{\partial v^\alpha}$, 则 $T^{1,0}\widetilde{M}$ 的局部标架为 $\{\partial_1, \cdots, \partial_n, \dot{\partial}_1, \cdots, \dot{\partial}_n\}$.

设 Γ^β_α 为非线性联络[1] 的 Christoffel 系数, 在局部坐标下令 $\delta_\alpha = \partial_\alpha - \Gamma^\beta_\alpha\dot{\partial}_\beta$, 则 $\{\delta_1, \cdots, \delta_n\}$ 为 $H^{1,0}$ 的局部标架, $\{\delta_1, \cdots, \delta_n, \dot{\partial}_1, \cdots, \dot{\partial}_n\}$ 为 $T^{1,0}\widetilde{M}$ 的局部标架, 从而 $T^{1,0}\widetilde{M}$ 的对偶丛的局部标架为 $\{dz^1, \cdots, dz^n, \psi^1, \cdots, \psi^n\}$, 其中 $\psi^\alpha = dv^\alpha + \Gamma^\alpha_\beta dz^\beta$.

定义 1　复流形 M 上的复垂直联络是一线性映射 $D: \mathcal{X}(\mathcal{V}^{1,0}) \to \mathcal{X}(T^*_C\widetilde{M} \otimes \mathcal{V}^{1,0})$, 使得 $D(fv) = f \cdot Dv + df \otimes v$, $\forall f \in C^\infty(\widetilde{M})$, $v \in \mathcal{X}(\mathcal{V}^{1,0})$, 其中 $T^*_C\widetilde{M}$ 为 $\widetilde{M}$ 的余切丛.

在局部坐标下, 设 $v = v^\beta\dot{\partial}_\beta$, 有

$$Dv = (dv^\alpha + v^\alpha\omega^\beta_\alpha) \otimes \dot{\partial}_\beta,$$

其中 ω^β_α 为局部确定的 1- 形式, 则对适当的系数 $\Gamma^\beta_{\alpha;\mu}$ 和 $\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}$ 有 $\omega^\beta_\alpha = \Gamma^\beta_{\alpha;\mu}dz^\mu + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}dv^\gamma$.

设 D 为复垂直联络, 下面定义一丛映射(下面用 $\mathcal{V}$ 来代替 $\mathcal{V}^{1,0}$) $\wedge: T^{1,0}\widetilde{M} \to \mathcal{V}$, 为 $\wedge(X) = \nabla_X\iota$, 其中 $\iota: T^{1,0}\widetilde{M} \to \mathcal{V}$ 为自然截面. 在局部坐标下有 $\wedge(X) = [\dot{X}^\alpha + w^\alpha_\beta(X)v^\beta]\dot{\partial}_\alpha$.

定义 2　复垂直联络是好的, 如果丛映射 $\wedge|_\mathcal{V}: \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ 是丛同构.

定义 3　复流形 M 上的复 Finsler 度量是一连续函数 $F: T^{1,0}M \to R^+$, 且满足

(i) $G = F^2$ 在 $\widetilde{M}$ 上是光滑的;

(ii) $F(v) > 0$, $\forall v \in \widetilde{M}$;

(iii) $F(\xi v) = |\xi| F(v)$, 对 $\forall v \in T^{1,0}M$, $\xi \in C$.

对 G 关于坐标 v 求导, 记: $G_{\alpha\bar\beta} = \frac{\partial^2 G}{\partial v^\alpha \partial \overline{v^\beta}}$; 关于坐标 z 求导, 记为 $G_{;\mu\nu} = \frac{\partial^2 G}{\partial z^\mu \partial z^\nu}$ 或 $G_{\alpha;\bar\nu} = \frac{\partial^2 G}{\partial \overline{z^\nu} \partial v^\alpha}$.

定义 4　一复 Finsler 度量 F 称为强拟凸复 Finsler 度量, 如果 Levi- 矩阵 $(G_{\alpha\bar\beta})$ 在 $\widetilde{M}$ 上是正定的.

从而对于赋予一强拟凸 Finsler 度量的复流形 M, 可以在上面用好的复垂直联络来定义 Chern-Finsler 联络(见文献[1] 中定理 2.3.2 和定义 2.3.6).

1　射影等价的复 Finsler 度量

设 F 为复流形 M 上的强拟凸复 Finsler 度量, 记 G

收稿日期: 2005-12-02

基金项目: 国家自然科学基金(10501036), 福建省自然科学基金(J0511003)资助

作者简介: 肖金秀(1979-), 女, 硕士研究生.

* 通讯作者: yanrm@xmu.edu.cn

$= F^2$, 由文献[1] 中的定理 2.3.2 有 Chern-Finsler 联络的联络矩阵为

$$\omega_\beta^\alpha = G^{\bar\tau\alpha}\partial G_{\beta\bar\tau} = G^{\bar\tau\alpha}(G_{\beta\bar\tau;\mu}dz^\mu + G_{\beta\bar\tau\gamma}dv^\gamma),$$

其中

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = G^{\bar\tau\alpha}G_{\beta\bar\tau\gamma},\ \tilde\Gamma_{\beta;\mu}^\alpha = G^{\bar\tau\alpha}G_{\beta\bar\tau;\mu},$$

$$\Gamma_{;\mu}^\alpha = \tilde\Gamma_{\beta;\mu}^\alpha v^\beta = G^{\bar\tau\alpha}G_{\bar\tau;\mu},\ \Gamma_{\beta;\mu}^\alpha = \dot\partial_\beta(\Gamma_{;\mu}^\alpha).$$

由复 Finsler 度量的定义 3 可得

$$G_{\alpha\bar\beta}(p;\zeta v) = G_{\alpha\bar\beta}(p;v),\ G_{\bar\tau}(p;\zeta v) = \zeta G_{\bar\tau}(p;v),$$

$$\Gamma_{;\mu}^\alpha(\zeta v) = \zeta\Gamma_{;\mu}^\alpha(v),\ \Gamma_{\beta;\mu}^\alpha(\zeta v) = \Gamma_{\beta;\mu}^\alpha(v).$$

设 $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon)\to M$ 为强拟凸复 Finsler 流形上的测地线, 则测地线方程为

$$\nabla_{T^H+\overline{T^H}}T^H - \theta^*(T^H, \overline{T^H}) = 0,$$

其中

$$T^H = \dot\sigma^\alpha\delta_\alpha,\ \theta^* = G^{\bar\tau\alpha}G_{\beta\bar\gamma}(\Gamma_{\mu;\bar\tau}^{\bar\gamma} - \Gamma_{\bar\tau;\bar\mu}^{\bar\gamma})dz^\beta\wedge d\bar z^\mu\otimes\delta_\alpha.$$

若 F 为弱 Kähler 的复 Finsler 度量, 亦即 $\theta^*(T^H, \overline{T^H}) = 0$, 则测地线方程为

$$\nabla_{T^H+\overline{T^H}}T^H = 0,$$

用局部坐标表示为: $\ddot\sigma^\alpha + \Gamma_{;\mu}^\alpha(\dot\sigma)\dot\sigma^\mu = 0$.

定义 5　设 $F, \tilde F$ 均为 M 上的复 Finsler 度量, 若它们具有相同的测地线集合, 则称 F 与 $\tilde F$ 射影等价. 此亦即, 对应于 $\tilde F$ 的任意测地线 $\tilde\sigma(\tilde t)$, 经过适当的定向参数化 $\tilde t = \tilde t(t)$ 后, 得到的映射 $\sigma(t) = \tilde\sigma(\tilde t)$ 为 F 的测地线.

定义 6　设 $F, \tilde F$ 均为复流形 M 上的复 Finsler 度量, 若它们具有相同的测地线, 则称 $F, \tilde F$ 仿射等价. 此也即, 对应于 F 的测地线 $\sigma = \sigma(t)$ 也是 $\tilde F$ 的测地线.

定理 1　设 $F, \tilde F$ 为 M 上的弱 Kähler 度量, 若 $F, \tilde F$ 射影等价, 则它们必仿射等价.

证明　对任给的 $v\in T_p^{1,0}\backslash M\{0\}$, 设 $\sigma(t)$ 为 F 的测地线, 满足 $\sigma(0) = p, \dot\sigma(0) = v$. 又设变换 $\tilde t = \tilde t(t)$, 满足 $\tilde t(0) = 0, \tilde t'(0) = 1$ 使得 $\tilde\sigma(\tilde t) = \sigma(t)$ 为 $\tilde F$ 的测地线, 满足 $\tilde\sigma(0) = p, \dot{\tilde\sigma}(0) = v$. 则由

$$\dot\sigma(t) = \dot{\tilde\sigma}(\tilde t)\tilde t'(t),\ \ddot\sigma(t) = \ddot{\tilde\sigma}(\tilde t)[\tilde t'(t)]^2 + \dot{\tilde\sigma}(\tilde t)\tilde t''(t).$$

令 $t = 0$, 得

$$\dot\sigma(0) = \dot{\tilde\sigma}(0) = v,\ \ddot\sigma(0) = \ddot{\tilde\sigma}(0) + \dot{\tilde\sigma}(0)\tilde t''(0).$$

将 $\sigma(t), \tilde\sigma(\tilde t)$ 代入测地线方程, 得

$$\ddot\sigma^\alpha(t) = -\Gamma_{;\mu}^\alpha(\dot\sigma(t))\dot\sigma^\mu(t),$$

$$\ddot{\tilde\sigma}^\alpha(\tilde t) = -\tilde\Gamma_{;\mu}^\alpha(\dot{\tilde\sigma}(\tilde t))\dot{\tilde\sigma}^\mu(\tilde t).$$

在上式令 $t = 0$, 比较得

$$\Gamma_{;\mu}^\alpha(v)v^\mu = -\ddot\sigma(0) = -\ddot{\tilde\sigma}(0) - v^\alpha\tilde t''(0) = \tilde\Gamma_{;\mu}^\alpha(v)v^\mu - v^\alpha\tilde t''(0).$$

记 $H = -\tilde t''(0)$, 则 H 为点 $v\in T_p^{1,0}M$ 的函数, 且满足

$$H(p, \zeta v) = \zeta H(p, v),\ \forall\zeta\in C\backslash\{0\}.$$

但 $\tilde t(t)$ 为实值函数, 从而 H 也为实值函数, 因而由上式可得 $H(p, \zeta v) = \bar\zeta H(p, v)$. 从而 $H\equiv 0$, 亦即

$$\Gamma_{;\mu}^\alpha = \tilde\Gamma_{;\mu}^\alpha.$$

因而分别对应 $F, \tilde F$ 的测地线相同, 进而 $F, \tilde F$ 仿射等价.

2　Cartan 联络与 Chern-Finsler 联络

设 M 为 m 维实流形, 记 TM 为 M 的切丛, $o: M\to TM$ 为 TM 的零截面, 即 $o(p) = o_p$ 是切丛 T_PM 的原点, 令 $\tilde M = TM\backslash o(M)$ 即切丛减去零截面.

定义 7　实流形上的 Finsler 度量是一函数 $F: TM\to R^+$ 满足下列性质

(i) $G = F^2$ 在 $\tilde M$ 上是光滑的;

(ii) $F(u) > 0$, 对 $\forall u\in\tilde M$;

(iii) $F(\lambda u) = |\lambda|F(u)$, 对 $\forall u\in TM$ 和 $\lambda\in R$;

(iv) 对 $\forall p\in M$, 指数形式 $I_F(p) = \{u\in T_pM, |F(u)| < 1\}$ 是强凸的.

设 $F: T^{1,0}M\to R^+$ 为复流形 M 上的复 Finsler 度量, 我们利用 F 可以定义一函数

$$F^o: T_RM\to R^+$$

为 $F^o(u) = F(u_o)$ 对 $\forall u\in T_RM$, 则 F^o 满足定义 7 中实 Finsler 度量的前三个性质.

定义 8　设度量 F 为实流形 M 上的 Finsler 度量, 如果由 F 诱导的非线性联络的联络系数 $\Gamma_{c;a}^b$ 仅依赖流形 M 上的坐标 (x^i), 则称流形 M 为实 Berwald 流形.

定义 9　设度量 F 为复流形 M 上的复 Finsler 度量, 如果由 F 诱导的 Chern-Finsler 联络的联络系数 $\Gamma_{\nu;\alpha}^\beta$ 仅依赖流形 M 上的坐标 (z^i), 则称流形 M 为复 Berwald 流形.

定义 10　如果复 Finsler 度量 F 诱导的度量 F^o 是实 Finsler 度量, 则称复 Finsler 度量 F 是强凸的.

下面我们比较由 F^o 诱导的 Cartan 联络[1] 与由强拟凸复 Finsler 度量 F 诱导的 Chern-Finsler 联络.

我们知道, M 的全纯切丛 $T^{1,0}M$ 与 M 的切丛 T_RM 是同构的. 该同构映射可取为丛映射 $o: T^{1,0}M\to T_RM$,

$$\forall v\in T^{1,0}M,\ v^o = v + \bar v.$$

显然

$$(\partial/\partial z^\alpha)^o = \partial/\partial x^\alpha,\ (i\partial/\partial z^\alpha)^o = \partial/\partial x^{\alpha+n}.$$

此外, 有同构 $o: T^{1,0}\tilde M\to T_R\tilde M$, $\forall X\in T^{1,0}\tilde M$, $X^o = X + \bar X$. 它诱导同构 $o, \mathcal{V}\to\mathcal{V}_R$ 使得

$$(\dot\partial_\alpha)^o = \dot\partial_\alpha^o,\ (i\dot\partial_\alpha)^o = \dot\partial_{\alpha+n}^o.$$

特别地, 对 $V = V^\alpha\dot\partial_\alpha\in\mathcal{V}$, 有 $V^o = U^a\dot\partial_a^o$, 其中

$$U^a = \begin{cases} \frac{1}{2}(V^\alpha + \overline{V^\alpha}) = \mathrm{Re}V^\alpha, \text{若 } 1 \leqslant a \leqslant n \\ \frac{1}{2i}(V^\alpha - \overline{V^\alpha}) = \mathrm{Im}V^\alpha, \text{若 } n+1 \leqslant a \leqslant 2n \end{cases} \qquad (1)$$

要比较Cartan联络和Chern-Finsler联络, 需要比较与它们相应的水平丛, 先比较它们的水平径向向量场. 熟知, 水平径向向量场 $\chi \in X(H)$ 的局部表示为

$$\chi(v) = v^\alpha \delta_\alpha = v^\alpha(\partial_\alpha - \Gamma^\beta_{;\alpha}\dot{\partial}_\beta),$$

这里 $\Gamma^\beta_{;\alpha} = G^{\bar\tau\beta}G_{\bar\tau;\alpha}$. 利用 χ, 可定义 $T_R\tilde{M}$ 的截面 χ^o 如下:

$$\chi^o(u) = (\chi(u_o))^o, \ \forall u \in T_RM.$$

另一方面, 实 Finsler 结构 F^o 确定了一个实的水平径向向量场 $\hat{\chi} \in X(H_R)$:

$$\hat{\chi}(u) = u^a\hat{\delta}_a = u^a(\partial^o_a - \hat{\Gamma}^b_a\dot{\partial}^o_b), \ \forall u \in T_RM \qquad (2)$$

其中 $\hat{\Gamma}^b_a$ 是与 F^o 相联系的非线性联络的Christoffel符号.

由文献[1]中的性质2.6.2可知, 若 M 上的强凸Finsler度量为弱Kähler的, 则有

$$\chi^o = \hat{\chi} \qquad (3)$$

设 $\{\partial_a\}^n_1$ 为 T_RM 的局部标架场, 其中 $\partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$. 若 $\partial_a = \partial^o_\alpha \in \tilde{M}$, 则有

$$\begin{aligned}\chi^o(\partial_a) &= (\chi(\partial_\alpha))^o = (\partial_\alpha - \Gamma^\beta_{;\alpha}\dot{\partial}_\beta)^o = \\ &\partial^o_\alpha - \frac{1}{2}(\Gamma^\beta_{;\alpha} + \overline{\Gamma^\beta_{;\alpha}})\dot{\partial}^o_\beta - \frac{1}{2i}(\Gamma^\beta_{;\alpha} - \overline{\Gamma^\beta_{;\alpha}})\dot{\partial}_{\beta+n} = \\ &\partial^o_\alpha - \frac{1}{2}(\Gamma^\beta_{;\alpha} + \Gamma^{\bar\beta}_{;\bar\alpha})\dot{\partial}^o_\beta - \frac{1}{2i}(\Gamma^\beta_{;\alpha} - \Gamma^{\bar\beta}_{;\bar\alpha})\dot{\partial}_{\beta+n},\end{aligned}$$

这里 $\Gamma^{\bar\beta}_{;\bar\alpha} = \overline{\Gamma^\beta_{;\alpha}}$.

由式(2),(3)得

$$\hat{\Gamma}^b_a = \begin{cases} \frac{1}{2}(\Gamma^\beta_{;\alpha} + \Gamma^{\bar\beta}_{;\bar\alpha}), \text{若 } 1 \leqslant b \leqslant n, \\ \frac{1}{2i}(\Gamma^\beta_{;\alpha} - \Gamma^{\bar\beta}_{;\bar\alpha}), \text{若 } n+1 \leqslant b \leqslant 2n. \end{cases}$$

当 $1 \leqslant c \leqslant n$ 时,

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}^b_{c;a} &= \dot{\partial}_c(\hat{\Gamma}^b_a) = (\dot{\partial}_\gamma + \dot{\partial}_{\bar\gamma})(\hat{\Gamma}^b_a) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(\Gamma^\beta_{\gamma;\alpha} + \Gamma^{\bar\beta}_{\gamma;\bar\alpha} + \Gamma^\beta_{\bar\gamma;\alpha} + \Gamma^{\bar\beta}_{\bar\gamma;\bar\alpha}), 1 \leqslant b \leqslant n \\ \frac{1}{2i}(\Gamma^\beta_{\gamma;\alpha} - \Gamma^{\bar\beta}_{\gamma;\bar\alpha} + \Gamma^\beta_{\bar\gamma;\alpha} - \Gamma^{\bar\beta}_{\bar\gamma;\bar\alpha}), n+1 \leqslant b \leqslant 2n \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathrm{Re}(\Gamma^\beta_{\gamma;\alpha} + \Gamma^\beta_{\bar\gamma;\alpha}), 1 \leqslant b \leqslant n, \\ \mathrm{Im}(\Gamma^\beta_{\gamma;\alpha} + \Gamma^\beta_{\bar\gamma;\alpha}), n+1 \leqslant b \leqslant 2n. \end{cases}\end{aligned}$$

当 $n+1 \leqslant c \leqslant 2n$ 时,

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}^b_{c;a} &= \dot{\partial}_c(\hat{\Gamma}^b_a) = i(\dot{\partial}_\gamma - \dot{\partial}_{\bar\gamma})(\hat{\Gamma}^b_{;a}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}i(\Gamma^\beta_{\gamma;\alpha} + \Gamma^{\bar\beta}_{\gamma;\bar\alpha} - \Gamma^\beta_{\bar\gamma;\alpha} - \Gamma^{\bar\beta}_{\bar\gamma;\bar\alpha}), 1 \leqslant b \leqslant n \\ \frac{1}{2}(\Gamma^\beta_{\gamma;\alpha} - \Gamma^{\bar\beta}_{\gamma;\bar\alpha} - \Gamma^\beta_{\bar\gamma;\alpha} + \Gamma^{\bar\beta}_{\bar\gamma;\bar\alpha}), n+1 \leqslant b \leqslant 2n \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\mathrm{Im}(\Gamma^\beta_{\gamma;\alpha} + \Gamma^{\bar\beta}_{\gamma;\bar\alpha}), 1 \leqslant b \leqslant n, \\ \mathrm{Re}(\Gamma^\beta_{\gamma;\alpha} - \Gamma^{\bar\beta}_{\gamma;\bar\alpha}), n+1 \leqslant b \leqslant 2n. \end{cases}\end{aligned}$$

亦即

$$\hat{\Gamma}^b_{c;a} = \begin{cases} \mathrm{Re}\{\Gamma^\beta_{\gamma;\alpha} + \Gamma^\beta_{\bar\gamma;\alpha}\}, 1 \leqslant b, c \leqslant n \\ \mathrm{Im}\{\Gamma^\beta_{\gamma;\alpha} + \Gamma^\beta_{\bar\gamma;\alpha}\}, n+1 \leqslant b \leqslant 2n, \\ \qquad 1 \leqslant c \leqslant n \\ -\mathrm{Im}\{\Gamma^\beta_{\gamma;\alpha} + \Gamma^{\bar\beta}_{\gamma;\bar\alpha}\}, 1 \leqslant b \leqslant n, \\ \qquad n+1 \leqslant c \leqslant 2n \\ \mathrm{Re}\{\Gamma^\beta_{\gamma;\alpha} - \Gamma^{\bar\beta}_{\gamma;\bar\alpha}\}, n+1 \leqslant b, c \leqslant 2n \end{cases} \qquad (4)$$

从而有下面的定理:

定理2 设 F 是弱Kähler度量, F^o 是由 F 诱导的实Finsler度量, 设 F 是复Finsler度量, 则 F^o 为实Berwald流形.

参考文献:

[1] Abate M, Patrizio G. Finsler Metrics-A Global Approach with Applications to Geometric Function. Theory[M]. Berlin, New York: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.

Two Topics in Complex Finsler Geometry

XIAO Jin-xiu, YAN Rong-mu*

(School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: As the same idea in the real case, we introduce a Finsler metric F on the holomorphic bundles of complex manifold, and using Levi form of $G = F^2$ to define a Hermitian metric on the vertical bundle $\mathcal{V}$, then we can get the geometricalresults on the Finsler manifold by using Hermitian techniques. Following, in this paper we show that two projectively equivalent complex Finsler metrics are affinely equivalent and a real manifold M endowed with a real Finsler F^o metric which is induced by a complex Finsler metric F on the complex Berwald manifold is real Berwald manifold.

Key words: Finsler metric; Berwald manifold; projectively equivalent complex Finsler metric; affinely equivalent complex Finsler metric