一类乘积域的全纯自同构群

陈永发, 严荣沐*, 肖金秀

(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 设 B^n 为 n 维复单位球, U^m 为 m 维多圆柱. 本文利用全纯自同构将边界映为边界的这一性质, 得到了乘积域 $B^n\times U^m$ 的全纯自同构的一些必要条件, 再从这些必要条件出发, 成功找到了乘积域 $B^n\times U^m$ 的全部全纯自同构. 在总的思路上, 本篇文章采用的是类似于得到单复变中单位圆盘的 Aut(U) 的方法, 即把零点映为零点的全纯自同构(类似于单复变函数论中的旋转变换)与一类特殊的全纯自同构(类似于单复变函数论中的 Möbius 变换)复合.

关键词: 开单位球; 多圆柱; 全纯自同构; Bergman 核函数

中图分类号: O 174.56　　文献标识码: A　　文章编号: 0438-0479(2006)02-0165-03

1　引言及主要结果

众所周知, 在扩充复平面上只有三种典型单连通域, 即复平面, 扩充复平面以及单位圆. 由黎曼映射定理知任何边界不止一点的单连通区域均和单位圆全纯等价, 它们的全纯自同构也可以用黎曼映射和单位圆的自同构表示出来, 而单位圆的自同构是由 Möbius 变换和旋转变换复合而成. 在多复变函数中域的分类就复杂的多, 黎曼映射定理不成立, 所以研究不同区域的全纯自同构是个有意思的课题. 其中最常见的域有 B^n 以及 U^m, 他们均是复平面上单位圆的推广, 这两个域的全纯自同构群我们都知道.

本篇文章讨论的是这两种域的乘积域 $B^n\times U^m$, 通过全部自同构的性质找到了此乘积域的自同构群(即下面的定理 1 与定理 2), 最后给出了它的 Bergman 核函数.

先介绍一个函数: 对每个 $a\in B^n$, 记 $s^2 = 1-\|a\|^2$. 如果 $a\neq 0$, 记 $C=\dfrac{1}{\|a\|^2}\overline{a}^Ta$; 若 $a=0$, 记 $C=0$. 令 $D=sI_n+(1-s)C$, 则 $\varphi_a(z):=\dfrac{a-zD}{1-\overline{az^T}}$.

定理 1　若全纯映射 $f\in \mathrm{Aut}(B^n\times U^m)$ 且满足 $f(0)=0$, 则

$$f(z)=zA=z\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_{n\times n} & 0\\ 0 & \boldsymbol{Q}_{m\times m}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{P}_{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{m\times m}$ 是与 f 有关的酉矩阵, 其中 $\boldsymbol{Q}$ 还是每行每列只有一个非零分量且模长均为 1 的酉矩阵.

定理 2　设 $f\in \mathrm{Aut}(B^n\times U^m)$, $f(a)=f(a', a_{n+1},\cdots,a_{n+m})=0$, 其中 $a'=(a_1,\cdots,a_n)$, 则

$$f(z)=\Big(\varphi'_a(z')\boldsymbol{P},\ e^{i\theta_1}\frac{z_{\tau(n+1)}-a_{\tau(n+1)}}{1-\overline{a}_{\tau(n+1)}z_{\tau(n+1)}},\ \cdots,\ e^{i\theta_m}\frac{z_{\tau(n+m)}-a_{\tau(n+m)}}{1-\overline{a}_{\tau(n+m)}z_{\tau(n+m)}}\Big),$$

其中的 $P, \theta_1,\cdots,\theta_m$ 是和 f 有关的 n 维酉矩阵和幅角. 而 τ 是某一置换: $(n+1,\cdots,n+m)\to(n+1,\cdots,n+m)$.

2　主要结果的证明

定理 1 的证明

注意到 $B^n\times U^m$ 是包含原点的有界圆型域, 于是由 Cartan 定理知 f 一定是线性映射. 故可以设全纯函数

$$f(z)=(f_1,\ldots,f_n,f_{n+1},\cdots,f_{n+m})=zA=(z_1,\ldots,z_n,z_{n+1},\cdots,z_{n+m})\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,n+m}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} & \cdots & a_{n,n+m}\\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & \cdots & a_{n,n+m}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n+m,1} & \cdots & a_{n+m,n} & a_{n+m,n+1} & \cdots & a_{n+m,n+m}\end{pmatrix}.$$

显然有必要条件

$$|f_1|^2+|f_2|^2+\cdots+|f_n|^2<1$$

且

$$|f_{n+j}|<1,\ 1\leqslant j\leqslant m$$

即

收稿日期: 2005-05-11

基金项目: 国家自然科学基金(10501036), 福建省自然科学基金(Z0511003)资助

作者简介: 陈永发(1981-), 男, 硕士研究生.

* 通讯作者: yanrm@xmu.edu.cn

$$\begin{cases} \left|\sum_{1}^{n+m} a_{k1} z_k\right|^2 + \left|\sum_{1}^{n+m} a_{k2} z_k\right|^2 + \cdots + \\ \quad \left|\sum_{1}^{n+m} a_{kn} z_k\right|^2 < 1 & (1) \\ \left|\sum_{k=1}^{n+m} a_{k,n+j} z_k\right| < 1 & (2) \end{cases}$$

为方便起见, 做以下指标规定 $1 \leqslant i, g \leqslant n$, $1 \leqslant j, l \leqslant m$, $1 \leqslant k, s \leqslant n+m$. 另外记 $a_{k,s}$ 的幅角为 $\theta_{k,s}$. 于是对 $\forall k$, 取趋近于边界的点列 $z^{(l)} = (0, \cdots, 1-1/l, \cdots, 0) \in B^n \times U^m$, 这里只有第 k 个分量不为零, 然后由全纯自同构的性质可知 $f(z^{(l)})$ 也趋向边界, 这样就可以得到下列 $n+m$ 个约束条件:

$|a_{11}|^2 + \cdots + |a_{1n}|^2 = 1$ 或存在 j 使得

$|a_{1,n+j}| = 1$,

……

$|a_{n1}|^2 + \cdots + |a_{nn}|^2 = 1$ 或存在 j 使得

$|a_{n,n+j}| = 1$,

$|a_{n+1,1}|^2 + \cdots + |a_{n+1,n}|^2 = 1$ 或存在 j 使得

$|a_{n+1,n+j}| = 1$,

……

$|a_{n+m,1}|^2 + \cdots + |a_{n+m,n}|^2 = 1$ 或存在 j 使得

$|a_{n+m,n+j}| = 1$.

在式(2) 中的每个 j 分别令

$$z = (e^{-i\theta_{1,n+j}}, \cdots, e^{-i\theta_{n,n+j}}, \sqrt{n}e^{-i\theta_{n+1,n+j}}, \cdots, \sqrt{n}e^{-i\theta_{n+m,n+j}})/\sqrt{n},$$

$$z = z_{i,g} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \cdots, e^{-i\theta_{i,n+j}}, 0, \cdots, e^{-i\theta_{g,n+j}}, 0, \cdots, 0)$$

$$z = z_{i,n+l} = (0, \cdots, e^{-i\theta_{i,n+j}}, 0, \cdots, e^{-i\theta_{n+l,n+j}}, \cdots, 0),$$

分别可得

$$\begin{cases} (|a_{1,n+j}| + \cdots + |a_{n,n+j}|)/\sqrt{n} + |a_{n+1,n+j}| + \\ \quad \cdots + |a_{n+m,n+j}| \leqslant 1 & (3) \\ |a_{i,n+j}| + |a_{g,n+j}| \leqslant \sqrt{2} & (4) \\ |a_{i,n+j}| + |a_{n+l,n+j}| \leqslant 1 & (5) \end{cases}$$

下面分情况讨论:

情况(i)

若全纯自同构 f 满足

$$\begin{cases} |a_{11}|^2 + \cdots + |a_{1n}|^2 = 1 \\ \cdots\cdots \\ |a_{n1}|^2 + \cdots + |a_{nn}|^2 = 1 \\ |a_{n+1,n+j_1}| = 1 \\ \cdots\cdots \\ |a_{n+m,n+j_m}| = 1 \end{cases}$$

这时由式(3) 知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 后 m 列的每一列中只有一个非零元素(模长为 1).

若取 $z = (z_1, \cdots, z_n, 0, \cdots, 0)$, 则从式子

$$f(z) = f(z_1, \cdots, z_n, 0, \cdots, 0) = (z_1, \cdots, z_n, 0, \cdots, 0)\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{n\times n} & 0 \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{Q}_{m\times m} \end{pmatrix} = ((z_1, \cdots, z_n)\boldsymbol{P}_{n\times n}, 0, \cdots, 0),$$

可以看出矩阵 $\boldsymbol{P}_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 将所有的单位向量映为单位向量(这是由于全纯自同构把边界映为边界的缘故), 故为酉矩阵. 也就存在单位向量 $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \partial B^n$ 满足

$$z\boldsymbol{P}_{n\times n} = (e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_n})/\sqrt{n},$$

其中 θ_i 为 $a_{n+1,i} z_{n+1}$ 的幅角, 若令分量 $z_{n+2} = \cdots = z_{n+m} = 0$, 由式(1) 知下面式子成立

$$(1/\sqrt{n} + |a_{n+1,1} z_{n+1}|)^2 + \cdots\cdots + (1/\sqrt{n} + |a_{n+1,n} z_{n+1}|)^2 \leqslant 1.$$

从而有 $a_{n+1,1} = \cdots = a_{n+1,n} = 0$. 同理对任意 $j = 1, \cdots, m$ 有 $a_{n+j,1} = \cdots = a_{n+j,n} = 0$. 即矩阵 $\boldsymbol{B} = 0$.

情况(ii)

不失一般性, 若全纯自同构函数 f 能同时满足

$$\begin{cases} |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 + \cdots + |a_{2n}|^2 = 1 \\ \cdots\cdots \\ |a_{n1}|^2 + |a_{n2}|^2 + \cdots + |a_{nn}|^2 = 1 \\ |a_{n+1,1}|^2 + |a_{n+1,2}|^2 + \cdots + |a_{n+1,n}|^2 = 1 \end{cases} \quad (6)$$

则取

$$z = (0, z_2, \cdots, z_n, z_{n+1}, 0, \cdots, 0) \in B^n \times U^m,$$

$$f(z) = (a_{21}z_2 + a_{31}z_3 + \cdots + a_{n1}z_n + a_{n+1,1}z_{n+1}, \cdots, a_{2n}z_2 + a_{3n}z_3 + \cdots + a_{nn}z_n + a_{n+1,n}z_{n+1}, *, \cdots, *),$$

其中第 $n+1, \cdots, n+m$ 个分量不关心, 故用 * 来表示. 前 n 个分量必须满足

$$|a_{21}z_2 + a_{31}z_3 + \cdots + a_{n1}z_n + a_{n+1,1}z_{n+1}|^2 + \cdots + |a_{2n}z_2 + a_{3n}z_3 + \cdots + a_{nn}z_n + a_{n+1,n}z_{n+1}|^2 < 1,$$

将此式展开并利用(6) 中的那些等式可得

$$|z_2|^2 + |z_3|^2 + \cdots + |z_n|^2 + |z_{n+1}|^2 + 2\mathrm{Re}\left[\sum_{i=2}^{n}\sum_{h=i+1}^{n+1}(a_{i1}\overline{a_{h1}} + a_{i2}\overline{a_{h2}} + \cdots + a_{in}\overline{a_{hn}})z_i\overline{z_h}\right] < 1 \quad (7)$$

特别地取 $z_2 = (\frac{3}{4})e^{-i\theta}$, 其中 θ 为 $a_{21}\overline{a_{n+1,1}} + \cdots + a_{2n}\overline{a_{n+1,n}}$ 的幅角, $z_3 = \cdots = z_n = 0$, $z_{n+1} = \frac{3}{4}$, 这样就得出了

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+2\times\frac{9}{16}\left|a_{21}\overline{a_{n+1,1}}+\cdots+a_{2n}\overline{a_{n+1,n}}\right|<1$$

的矛盾, 从而情况(ii) 是不可能存在的, 且考虑到约束条件以及式(3) ~ (5) 知再也不会出现别的情况, 故定理 1 证明完毕.

定理 2 的证明

由文献[1] 中的定理 2.3.9 知 $\varphi_a'(z')\in \mathrm{Aut}(B^n)$, 作函数

$$g(z):=\left(\varphi_a'(z'),\ \frac{z_{n+1}-a_{n+1}}{1-\overline{a}_{n+1}z_{n+1}},\ \cdots,\ \frac{z_{n+m}-a_{n+m}}{1-\overline{a}_{n+m}z_{n+m}}\right).$$

显然 $g\in \mathrm{Aut}(B^n\times U^m)$, 从而 $F:=g\circ f^{-1}\in \mathrm{Aut}(B^n\times U^m)$ 且 $F(0)=g(a)=0$, 这时由定理 1 知必存在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 使得 $F(z)=z\boldsymbol{A}$, 且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_{n\times n}^{-1} & 0\\ 0 & \boldsymbol{Q}_{m\times m}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{P}}_{n\times n}^{T} & 0\\ 0 & \overline{\boldsymbol{Q}}_{m\times m}^{T}\end{pmatrix}.$$

从而 $f(z)=F^{-1}(g(z))=g(z)\boldsymbol{A}^{-1}$, 即得证.

定理 3　乘积域 $B^n\times U^m$ 的 Bergman 核函数为

$$K(z,\zeta)=\frac{n!}{\pi^{n+m}}\frac{1}{(1-\langle z',\zeta'\rangle)^{n+1}}\prod_{n+1}^{n+m}\frac{1}{(1-z_j\overline{\zeta_j})^2},$$

其中 $z'=(z_1,\cdots,z_n)$, $\zeta'=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$.

证明　由于 B^n 的核函数为 $K(z,\zeta)=\dfrac{n!}{\pi^n}\dfrac{1}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n+1}}$, 而单位圆的核函数为 $\dfrac{1}{\pi(1-\overline{\zeta})^2}$. 这时由文献[1] 的命题 3.3.5 即得.

参考文献:

[1]　史济怀. 多复变函数论基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1996.

Homomorphic Automorphism Group of a Class of Product Domain

CHEN Yong-fa, YAN Rong-mu*, XIAO Jin-xiu

(School of Mathematical Science, Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract: In this article, some requirements of homomorphic automorphism of the domain $B^n\times U^m$ were found by using the property that homomorphic automorphism turns the border into the border. With those requirements, $\mathrm{Aut}(B^n\times U^m)$ was found successfully. The main thread of the article was the same way as $\mathrm{Aut}(U)$ in one complex variable. It is composed by two special homomorphic automorphisms, one maps zero to zero, the other is analogous to Möbius transformation in one complex variable.

Key words: open unit ball; open polydisc; homomorphic automorphism; Bergman kernel function