第 31 卷 第 4 期
1992 年 7 月

厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)

Vol. 31 No. 4
Jul. 1992

Stein 流形上具有权的核变换的边界性质①

邱 春 晖
(数 学 系)

摘要 利用局部化技巧,讨论了 Stein 流形中曲面上外微分形式的具有权的 B-M 变换、Leray 变换和 Henkin 变换的边界性质,并构造了边界上诱导的 Cauchy-Riemann 方程(即 $\bar{\partial}_b$-方程)的具有权的基本解。

关键词 Stein 流形,权因子,B-M 变换,Leray 变换,Henkin 变换,$\bar{\partial}_b$-方程,Coxoчкий-Plemelj 公式

1 具有权的 B-M 变换的 Coxoчкий-Plemelj 公式

为节省篇幅,我们沿用文[1,3]的记号. 设 M 为复 n 维 Stein 流形,$\Omega\subset\subset M$ 开子流形,记 $\tilde{M}$ 为由 $\{z\in\Omega: \rho(z)=0\}$ 所确定的超曲面,这里 $\rho\in C^\infty(\Omega)$,且在 $\tilde{M}$ 上有 $|d\rho|\equiv 1$,并记 $\Omega^\pm\equiv\{z\in\Omega: \pm\rho(z)>0\}$,把 Ω^- 的边界诱导的定向作为 $\tilde{M}$ 的定向,则 $(\Omega^-,\tilde{M})$ 是具有边界的定向子流形. 以 $\chi^\pm$ 表示 $\Omega^\pm$ 上的特征函数,由于 $\tilde{M}$ 是 Ω^- 的定向边界,则在 Ω 上,有 $d\chi^+=d\chi^-=[\tilde{M}]$,$[\tilde{M}]=d\chi^+=\partial\chi^++\bar{\partial}\chi^+\triangleq[\tilde{M}]^{1,0}+[\tilde{M}]^{0,1}$. 设曲面 $\tilde{M}$ 的曲面测度为 σ,则

$$[\tilde{M}]^{1,0}=\partial\chi^+=\sigma\cdot\partial\rho,\quad [M]^{0,1}=\bar{\partial}\chi^+=\sigma\cdot\bar{\partial}\rho$$

定义 1 设具有权的 B-M 核 $B(z,\zeta)$ 如文[1]中定义,即

$$B(z,\zeta)=(2\pi i)^{-n}\varphi^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}((Q,S)+1)(\bar{\partial}Q)^k\wedge W_2\wedge(\bar{\partial}W_2)^{n-k-1} \tag{1}$$

其中 $W_2=\frac{\langle\hat{S},DS\rangle}{|S|_2^2}$,对 $\forall f\in D'^{p,q}(\tilde{M})$,定义 f 的具有权的 B-M 变换为 $B([\tilde{M}]^{0,1}\wedge f)\in D'^{p,q}(\Omega)$.

显然,$B([\tilde{M}]^{0,1}\wedge f)\in\mathcal{E}^{p,q}(\Omega\backslash\tilde{M})$,而且对 $\forall z\in\Omega\backslash\tilde{M}$,有 $B([\tilde{M}]^{0,1}\wedge f)(z)=-\int_{\tilde{M}}[B(z,\zeta)\wedge f(\zeta)]^{n,n-1}$,这里 $[B(z,\zeta)\wedge f(\zeta)]^{n,n-1}$ 是 $B(z,\zeta)\wedge f(\zeta)$ 的关于 ζ 是 $(n,n-1)$ 次齐次项.

设 $B([\tilde{M}]^{0,1}\wedge f)|_{\Omega^\pm}$ 分别是 f 的具有权的 B-M 变换在 $\Omega^\pm$ 上的限制,则 $B([\tilde{M}]^{0,1}\wedge f)|_{\Omega^\pm}\in\mathcal{E}^{p,q}(\Omega^\pm)$.

定理 1 设 $f\in D^{p,q}(\tilde{M})$,则

1) $B([M]^{0,1}\wedge f)|_{\Omega^\pm}$ 可以无限可微地延拓到 $\bar{\Omega}^\pm$;

2) 若定义 $B^\pm f=\tau(B([\tilde{M}]^{0,1}\wedge f))|_{\Omega^\pm}$,则 $B^\pm f\in\mathcal{E}^{p,q}(\tilde{M})$,并且在 $\tilde{M}$ 上有 Coxoчкий-Plemelj 公式成立

---

① 1990-10-19 收到;国家自然科学基金和厦门大学育苗科学基金资助项目

$$B^{\pm}f=B_{b}f\pm\frac{1}{2}f \tag{2}$$

或 $$B^{+}f-B^{-}f=f \tag{3}$$

$$B^{+}f+B^{-}f=2B_{b}f \tag{4}$$

这里,Cauchy 主值 $B_b f$ 定义在下面的证明中式(18),并且 $B_b f\in\varepsilon^{p,q}(\widetilde{M})$.

证　由文[1]中式(6)可知

$$B(z,\zeta)=(2\pi i)^{-n}\varphi^{r}{}_{*}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,u\rangle+1)(\bar\partial Q)^{k}\wedge\frac{\langle\hat u,du\rangle}{|u|_{s}^{2}}$$
$$\wedge\left[\frac{\langle d\hat u,du\rangle}{|u|_{s}^{2}}\right]^{n-k-1}+0(|u|_{s}^{2-2n})\triangleq G(\langle Q,u\rangle+1)K(z,\zeta)+K_{1}(z,\zeta) \tag{5}$$

这里,$\hat u$ 和 u 分别是 $\hat S$ 和 S 的局部坐标,

$$K(z,\zeta)=(2\pi i)^{-n}\varphi^{r}{}_{*}\frac{\langle\hat u,du\rangle}{|u|_{s}^{2}}\wedge\left[\frac{\langle d\hat u,du\rangle}{|u|_{s}^{2}}\right]^{n-1} \tag{6}$$

为 Stein 流形上通常的 B-M 核,

$$K_{1}(z,\zeta)=(2\pi i)^{-n}\varphi^{r}{}_{*}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,u\rangle+1)(\bar\partial Q)^{k}\wedge\frac{\langle\hat u,du\rangle}{|u|_{s}^{2}}$$
$$\wedge\left[\frac{\langle d\hat u,du\rangle}{|u|_{s}^{2}}\right]^{n-k-1}+o(|u|_{s}^{2-2n})=0(|u|_{s}^{3-2n}) \tag{7}$$

由于边界 $\widetilde{M}$ 是 $(2n-1)$ 维流形,故由它所确定的边界上的微分形式变换 $\int_{\widetilde{M}}K_{1}(z,\zeta)\wedge f(\zeta)$ 是连续的.

对于 B-M 核 $K(z,\zeta)$:对$\forall\ \eta\in\widetilde{M}$,取 $\delta>0$,使得 $W_{\eta}=S(\eta,\cdot):V_{\eta_{\delta}}=\{\zeta^{*}\in C^{n}:|\zeta^{*}|<\delta\}$是双全纯映射[1,2],这里 $V_{\eta_\delta}\subset V_{j}$ 是 η 的小邻域,V_{η} 把 η 映为零点,即 $\eta=W_{\eta}^{-1}(0)$,$z=W_{\eta}^{-1}(z^{*})$,$\zeta=W_{\eta}^{-1}(\zeta^{*})$,记 $\widetilde{H}=W_{\eta}(V_{\eta_\delta}\cap\widetilde{M})$为 B_{δ} 中通过零点的超曲面,由于$\{u_{j}(z^{*},\zeta^{*})\}$在 $B_{\delta}\times B_{\delta}$ 中连续,且 $u(z^{*},z^{*})=0$,由除法定理,有

$$u_{j}(z^{*},\zeta^{*})=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{jk}(z^{*},\zeta^{*})(\zeta_{k}^{*}-z_{k}^{*}) \tag{8}$$

这里 $\gamma_{jk}(z^{*},\zeta^{*})$关于 z^{*} 和 ζ^{*} 都是全纯的. 又 $u(0,\zeta^{*})=S(\eta,W_{\eta}^{-1}(\zeta^{*}))=W_{\eta}(W_{\eta}^{-1}(\zeta^{*}))=\zeta^{*}$,则 $\gamma_{jk}(0,\zeta^{*})=\delta_{jk}$,当$(z^{*},\zeta^{*})$在$(0,0)$充分小的邻域时(不妨设此邻域就是 $B_{\delta}\times B_{\delta}$),则 $\det(\gamma_{jk}(z^{*},\zeta^{*}))\neq0$,再由除法定理,有

$$\gamma_{jk}(z^{*},\zeta^{*})=\sum_{l=1}^{n}\gamma_{jkl}(z^{*},\zeta^{*})z_{l}^{*}+\delta_{jk},\ (z^{*},\zeta^{*})\in B_{\delta}\times B_{\delta} \tag{9}$$

若记 $$K^{\pm}f=\tau(K([\widetilde{M}]^{0,1}\wedge f))|_{D^{\pm}} \tag{10}$$

则 $$K^{+}f(z)=-\tau\int_{\widetilde{M}\setminus V_{\eta_\delta}}[K(z,\zeta)\wedge f(\zeta)]^{n,n-1}-\tau\int_{\zeta^{*}\in\widetilde{H}}[K(z^{*},\zeta^{*})\wedge\hat f(\zeta^{*})]^{n,n-1} \tag{11}$$

其中 $\hat f(\zeta^{*})=f(W_{\eta}^{-1}(\zeta^{*}))$,$\hat\varphi^{r}{}_{*}(z^{*},\zeta^{*})=\varphi^{r}{}_{*}(W_{\eta}^{-1}(z^{*}),W_{\eta}^{-1}(\zeta^{*}))$.

$$K(z^{*},\zeta^{*})=(2\pi i)^{-n}\hat\varphi^{r}{}_{*}\cdot\frac{\langle\hat u(z^{*},\zeta^{*}),du(z^{*},\zeta^{*})\rangle\wedge\langle d\hat u(z^{*},\zeta^{*}),du(z^{*},\zeta^{*})\rangle^{n-1}}{|u(z^{*},\zeta^{*})|_{s}^{2n}}$$

由于 $\hat u=\overline{H}\ \bar u$[1,5]因此

$$K(z^{*},\zeta^{*})=\hat\varphi^{r}{}_{*}(z^{*},\zeta^{*})A_{1}(z^{*},\zeta^{*})+\hat\varphi^{r}{}_{*}(z^{*}\zeta^{*})A(z^{*},\zeta^{*}) \tag{12}$$

这里,A_1 是不含 $d\gamma_{jk}$和 $d\bar h_{ij}$的项,A 含有 $d\gamma_{jk}$或者 $d\bar h_{ij}$的项,因此,

$$|A(z^{*},\zeta^{*})|=0(|\zeta^{*}-z^{*}|^{2-2n})$$

$$A_1(z^*,\zeta^*)=(2\pi i)^{-n}\frac{\det(\overline{H}_t\overline{\Gamma}_t\Gamma)\langle\zeta^*-z^*,d(\zeta^*-z^*)\rangle\wedge\langle d(\zeta^*-z^*),d(\zeta^*-z^*)\rangle^{n-1}}{\left[\sum_{j,k,l}\gamma_{jk}\bar{h}_{ij}\bar{\gamma}_{il}(\bar{\zeta}_l^*-\bar{z}_l^*)(\zeta_k^*-z_k^*)\right]^n}$$

其中,$H=(h_{ij})_{n\times n}$,$\Gamma=(\gamma_{jk}(z^*,\zeta^*))_{n\times n}$,$\Gamma_t$和$H_t$分别为$\Gamma$和$H$的转置.

由于$K(z^*,\zeta^*)$中的$A_1(z^*,\zeta^*)$类似于C^n中的B-M核$\widetilde{K}(z^*,\zeta^*)$,则类似于函数的性形[3],有

$$|A_1(z^*,\zeta^*)-\widetilde{K}(z^*-\zeta^*)|=0(|\zeta^*-z^*|^{2-2n})$$

并且$|\hat{\varphi}^*_\varepsilon(z^*,\zeta^*)-1|=|\hat{\varphi}^*_\varepsilon(z^*,\zeta^*)-\hat{\varphi}^*_\varepsilon(z^*,z^*)|=0(|\zeta^*-z^*|)$

因此,式(12)代入式(11)有

$$\begin{aligned}K^+f(z)=&-\tau\int_{\widetilde{M}\setminus V_{\varepsilon_0}}[K(z,\zeta)\wedge f(\zeta)]^{p,n-1}-\tau\int_{\zeta^*\in\widetilde{M}}\hat{\varphi}^*_\varepsilon(z^*,\zeta^*)A(z^*,\zeta^*)\wedge\hat{f}(\zeta^*)\\&-\tau\int_{\zeta^*\in\widetilde{M}}\hat{\varphi}^*_\varepsilon(z^*,\zeta^*)(A_1(z^*,\zeta^*)-\widetilde{K}(z^*,\zeta^*))\wedge\hat{f}(\zeta^*)\\&-\tau\int_{\zeta^*\in\widetilde{M}}(\hat{\varphi}^*_\varepsilon(z^*,\zeta^*)-1)\widetilde{K}(z^*,\zeta^*)\wedge\hat{f}(\zeta^*)-\tau\int_{\zeta^*\in\widetilde{M}}\widetilde{K}(z^*,\zeta^*)\wedge\hat{f}(\zeta^*)\end{aligned}\tag{13}$$

由于$\widetilde{M}$是$(2n-1)$维流形,因此上式右端前四项均是连续的,而第五项则是C^n中的B-M型积分,由文[3]可知

$$-\lim_{z^*\to0}\tau\int_{\zeta^*\in\widetilde{M}}\widetilde{K}(z^*,\zeta^*)\wedge\hat{f}(\zeta^*)=-\lim_{\varepsilon\to0^+}\tau\int_{\substack{\zeta^*\in\widetilde{M}\\|\zeta^*|>\varepsilon}}\widetilde{K}(0,\zeta^*)\wedge\hat{f}(\zeta^*)+\frac{1}{2}\hat{f}(0)$$

当$z\to\eta^+$即$z^*\to0^+$时,我们有

$$\begin{aligned}K^+f(\eta)=&-\tau\int_{\widetilde{M}\setminus V_{\varepsilon_0}}[K(\eta,\zeta)\wedge f(\zeta)]^{p,n-1}-\tau\int_{\zeta^*\in\widetilde{M}}\hat{\varphi}^*_\varepsilon(0,\zeta^*)A(0,\zeta^*)\wedge\hat{f}(\zeta^*)\\&-\tau\int_{\zeta^*\in\widetilde{M}}\hat{\varphi}^*_\varepsilon(0,\zeta^*)(A_1(0,\zeta^*)-\widetilde{K}(0,\zeta^*))\wedge\hat{f}(\zeta^*)\\&-\tau\int_{\zeta^*\in\widetilde{M}}(\hat{\varphi}^*_\varepsilon(0,\zeta^*)-1)\widetilde{K}(0,\zeta^*)\wedge\hat{f}(\zeta^*)\\&-\lim_{\varepsilon\to0^+}\tau\int_{\substack{\zeta^*\in\widetilde{M}\\|\zeta^*|>\varepsilon}}\widetilde{K}(0,\zeta^*)\wedge\hat{f}(\zeta^*)+\frac{1}{2}\hat{f}(0)\end{aligned}\tag{14}$$

若定义

$$\begin{aligned}K_sf(\eta)=&-\tau\int_{\widetilde{M}\setminus V_{\varepsilon_0}}[K(\eta,\zeta)\wedge f(\zeta)]^{p,n-1}-\tau\int_{\zeta^*\in\widetilde{M}}\hat{\varphi}^*_\varepsilon(0,\zeta^*)A(0,\zeta^*)\wedge\hat{f}(\zeta^*)\\&-\tau\int_{\zeta^*\in\widetilde{M}}\hat{\varphi}^*_\varepsilon(0,\zeta^*)(A_1(0,\zeta^*)-\widetilde{K}(0,\zeta^*))\wedge\hat{f}(\zeta^*)\\&-\tau\int_{\zeta^*\in\widetilde{M}}(\hat{\varphi}^*_\varepsilon(0,\zeta^*)-1)\widetilde{K}(0,\zeta^*)\wedge\hat{f}(\zeta^*)-\lim_{\varepsilon\to0^+}\tau\int_{\substack{\zeta^*\in\widetilde{M}\\|\zeta^*|>\varepsilon}}\widetilde{K}(0,\zeta^*)\wedge\hat{f}(\zeta^*)\end{aligned}\tag{15}$$

则由$\hat{f}(0)=f(\eta)$可得

$$K^+f(\eta)=K_sf(\eta)+\frac{1}{2}f(\eta)\tag{16}$$

$$K^-f(\eta)=K_sf(\eta)-\frac{1}{2}f(\eta)\tag{17}$$

由C^n中的结果[3]可知,$K^\pm f(z)$可以无限可微地延拓到$\overline{\Omega}^\pm$上,且$K_sf(\eta)\in\varepsilon^{p,q}(\widetilde{M})$.

对$\forall z\in\Omega$,记$\tilde{f}(z,\zeta)=G(\langle Q,u\rangle+1)f(\zeta)\in D^{p,q}(\widetilde{M})$,则由式(16),(17),对$\forall\eta\in\widetilde{M}$,有

$$K^{\pm}\tilde{f}(\eta)=K_s\tilde{f}(\eta)\pm\frac{1}{2}\tilde{f}(\eta,\eta)=K_s\tilde{f}(\eta)\pm\frac{1}{2}f(\eta)$$

这里，$K^{\pm}\tilde{f}(z)\triangleq\tau(K([\widetilde{M}]^{0,1}\wedge\tilde{f}(z,\zeta)))|_{\Omega^{\pm}}$，$K_s\tilde{f}(\eta)$类似于 $K_sf(\eta)$的定义，且 $K_s\tilde{f}(\eta)\in\varepsilon^{p,q}(\widetilde{M})$.

由上面的讨论可知，由具有权的 B-M 核所确定的边界上(p,q)形式的积分可以无限可微地延拓到 $\bar{\Omega}^{\pm}$上，且成立 сохочкий-Plemelj 公式

$$B^{\pm}f(\eta)=B_sf(\eta)\pm\frac{1}{2}f(\eta),\forall\ \eta\in\widetilde{M}.$$

其中 $$B_sf(\eta)=-\tau\int_{\widetilde{M}}[K_1(\eta,\zeta)\wedge f(\zeta)]^{n,n-1}+K_s\tilde{f}(\eta)\tag{18}$$

即 $B_sf(\eta)$的表达式类似于 $K_sf(\eta)$，且 $B_sf(\eta)\in\varepsilon^{p,q}(\widetilde{M})$.

2 具有权的 Henkin 变换和 Leray 变换的边界性质

本节讨论具有权的 Henkin 核和 Leray 核所确定的边界上的微分形式变换的边界性质，我们仅讨论强拟凸域的情形.

定义 2 若 $s^*(z,\zeta)$是定义在 $\widetilde{M}\times\widetilde{M}$ 的邻域 U 上的生成函数，并满足

1)对$\forall\ \zeta\in\Omega^+S^*(z,\zeta)$关于 $z\in\Omega^-$是全纯的；

2)$(S^*(z,\zeta),S(z,\zeta))\neq0$，对$\forall\ (z,\zeta)\in v\wedge(\Omega^-\times\bar{\Omega}^+)$.

则 $s^*(z,\zeta)$称为 $\widetilde{M}$ 的相对于 Ω^-的支撑函数.

定义 3 若 $H(z,\zeta)$、$L(z,\zeta)$如文[1]中定义，即

$$H(z,\zeta)=(2\pi i)^{-n}\varphi^{n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,S\rangle+1)(\bar{\partial}Q)^k\wedge W_1\wedge W_2$$
$$\wedge\sum_{p=1}^{n-k-1}(\bar{\partial}W_1)^{p-1}\wedge(\bar{\partial}W_2)^{n-k-p-1}\tag{19}$$

$$L(z,\zeta)=(2\pi i)^{-n}\varphi^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,S\rangle+1)(\bar{\partial}Q)^k\wedge W_1\wedge(\bar{\partial}W_1)^{n-k-1}\tag{20}$$

其中，$W_1=\dfrac{\langle S^*(z,\zeta),DS(z,\zeta)\rangle}{\langle S^*(z,\zeta),S(z,\zeta)\rangle}$，设 $S^*(\zeta,z)$也是 $\widetilde{M}$ 上相对于 Ω^-的技撑函数，记${}'W_1=\dfrac{\langle S^*(\zeta,z),DS(z,\zeta)\rangle}{\langle S^*(\zeta,z),S(z,\zeta)\rangle}$，定义

$${}'H(z,\zeta)=(2\pi i)^{-n}\varphi^{n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,S\rangle+1)(\bar{\partial}Q)^k\wedge{}'W_1\wedge W_2$$
$$\wedge\sum_{p=1}^{n-k-1}(\bar{\partial}W_1)^{p-1}\wedge(\bar{\partial}W_2)^{n-k-p-1}\tag{21}$$

$${}'L(z,\zeta)=(2\pi i)^{-n}\varphi^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,S\rangle+1)(\bar{\partial}Q)^k{}'W_1\wedge(\bar{\partial}Q)^k\wedge{}'W_1\wedge(\bar{\partial}{}'W_1)^{n-k-1}\tag{22}$$

设 $f\in D^{p,q}(\widetilde{M})$，定义

$$H^-f=\tau\chi^-H([\widetilde{M}]^{0,1}\wedge f),\ {}'H^+f=\tau\chi^+{}'H([\widetilde{M}]^{0,1}\wedge f)$$

$$L^-f=\tau\chi^-L([\widetilde{M}^{0,1}\wedge f),\ {}'L^+f=\tau\chi^+{}'L([\widetilde{M}]^{0,1}\wedge f)$$

这里 $\chi^{\pm}$表示 $\Omega^{\pm}$的特征函数.

假设对靠近 $\widetilde{M}$ 的 z、ζ，ρ 有展开式

$$\rho(z)=\rho(\zeta)+Re[\lambda(z,\zeta)\langle S^*(z,\zeta),S(z,\zeta)\rangle]+\gamma(z,\zeta)\tag{23}$$

其中　$\lambda(z,\zeta)\neq 0$,且当ζ固定时,$\lambda(z,\zeta)$关于z全纯　　(24)

$$|\gamma(z,\zeta)|\leqslant C|S|^{2}_{2} \tag{25}$$

$$\gamma(z,\zeta)\geqslant c|S|^{2}_{2},若(s^{*}(z,\zeta),S(z,\zeta))=0 \tag{26}$$

由于全纯空间$H_{z}(\widetilde{M})=\{w\in\widetilde{M}:S^{*}(z,z)\cdot w=0\}$,这样,式(26)蕴含着$\widetilde{M}$作为$\Omega^{-}$的边界是强拟凸的,又由式(25)可知,$\gamma(z,\zeta)$及共一阶导数在$\zeta=z$时均为零,则$\gamma(z,\zeta)=R(z,S)+0(|S|^{3}_{2})$,这里,$R(z,S)$为$\gamma(z,\zeta)$关于$\zeta$展开在$\zeta=z+S(z,\zeta)$时的二次部分.

利用C^{n}中的结果([3]中定理8.38)和局部化技巧,类似于定理1的证明,我们有

定理2　设$S^{*}(z,\zeta)$,$S^{*}(\zeta,z)$间$\widetilde{M}$上相对于Ω^{-}的支撑函数,并满足式(23)~(26),则

1)当z,ζ中任一个固定时,$H(z,\zeta)$的每一个系数限制在$\widetilde{M}$上是可积的,因此,对$\forall f\in D^{p,q}(\widetilde{M})$,当$z\in\widetilde{M}$时,有

$$H^{-}f(z)=-\tau\int_{\widetilde{M}}[H(z,\zeta)\wedge f(\zeta)]^{n,n-1}$$

$${}^{t}H^{+}f(z)=-\tau\int_{\widetilde{M}}[{}^{t}H(z,\zeta)\wedge f(\zeta)]^{n,n-1}$$

2)设$f\in D^{p,0}(\widetilde{M})$,对$\forall\ z\in\widetilde{M}$,有

$$L^{-}f(z)=L_{b}f(z)-C(z)f(z)$$

这里,Cauchy主值$L_{b}f(z)$的定义类似于$B_{b}f(z)$,$C(z)=C_{1}(z)+C_{2}(z)$,$C_{2}(z)$是连续的,

$$C_{1}(z)=\frac{1}{2}(2\pi i)^{1-n}\int_{\substack{w\in H_{z}(\widetilde{M})\\ R(z,w)\leqslant 1}}\left[\sum\frac{\partial^{2}\rho(z)}{\partial z_{i}\partial\bar{z}_{j}}d\bar{w}_{j}\wedge dw_{i}\right]^{n-1}$$

3)设$f\in D^{p,n-1}(\widetilde{M})$,对$\forall\ z\in\widetilde{M}$有

$${}^{t}L^{+}f(z)={}^{t}L_{b}f(z)+C(z)f(z)$$

这里Cauchy主值${}^{t}L_{b}f(z)$的定义类似于$B_{b}f(z)$.

3　$\bar{\partial}_{b}$—方程的具有权的基本解

利用定理2和同伦公式([3]中定理2.8)有[3]

定理3　设S^{*}是$\widetilde{M}$上相对于Ω^{-}的双正则支撑函数,在$\widetilde{M}\times\widetilde{M}$上,令

$$E={}^{t}H^{+}-H^{-},\ \widetilde{E}={}^{t}L^{+}-L^{-} \tag{29}$$

则在$\widetilde{M}\times\widetilde{M}$上成立微分方程

$$\bar{\partial}_{b}E=-[\Delta_{\widetilde{M}}]+\widetilde{E},\ \bar{\partial}_{b}\widetilde{E}=0 \tag{30}$$

其对应的算子方程为

$$f=-\bar{\partial}_{b}Ef-E\bar{\partial}_{b}f+\widetilde{E}f,\ \bar{\partial}_{b}\widetilde{E}f=E\bar{\partial}_{b}f=0 \tag{31}$$

对于所有$f\in D^{*}(\widetilde{M})$都成立.

注1　由于生成函数$S^{*}(z,\zeta)$关于z全纯,L仅非平凡地作用在$(p,0)$形式,${}^{t}L$仅非平凡地作用在$(p,n-1)$形式,即E仅非平凡地作用在$(p,0)$、$(p,n-1)$形式,这样,式(31)可分为三种情形:

$$\begin{aligned}&q=0, && f=-E\bar{\partial}_{b}f-L^{-}f\\ &1\leqslant q\leqslant n-2, && f=-\bar{\partial}Ef-E\bar{\partial}_{b}f\\ &q=n-1, && f=-\bar{\partial}_{b}Ef+{}^{t}L^{+}f\end{aligned} \tag{32}$$

注2　由式(32),核E就称为$\widetilde{M}$上$\bar{\partial}_{b}$—方程的具有权的基本解.

推论 设 $\tilde{M}=\partial\Omega^-$ 是紧的，S^* 是 $\tilde{M}$ 上相对于 Ω^- 的支撑函数，则

1）当 $q=0$ 时，$f\in\mathscr{E}^{p,0}(\tilde{M})$ 满足 $\bar{\partial}_b f=0$ 当且仅当 $f=\tilde{B}f$.

2）当 $1\leqslant q\leqslant n-2$ 时，$f\in\mathscr{E}^{p,q}(\tilde{M})$，存在 $g\in\mathscr{E}^{p,q-1}(\tilde{M})$ 使得 $\bar{\partial}_b g=f$，当且仅当 $\bar{\partial}_b f=0$.

3）当 $q=n-1$ 时，$f\in\mathscr{E}^{p,n-1}(\tilde{M})$，存在 $g\in\mathscr{E}^{p,n-2}(\tilde{M})$，使得 $\bar{\partial}_b g=f$，当且仅当 $\tilde{E}f=0$.

承蒙导师钟同德教授的精心指导，在此表示衷心的感谢

参 考 文 献

1 邱春晖. 厦门大学学报(自然科学版)，1992，31(2)：111～115

2 钟同德. *Holomophic extension on Stein manifolds*, Research Report No. 10, Mittag-Leffler Institute. 1987

3 Harvey R, Polking J. *Duke Math. J.*, 1979, 46(2): 301～340

4 Berndtsson B, Andersson M. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble 32, 1982, 3: 91～110

5 Demailly J P, Laurent-Thiebaut Ch. *Annales Scientifiques de l' Ecole Normale Superieure*, 1987, 20: 579～598

Boundary Behavior of Transforms of Kernels with Weight Factors on Stein Manifolds

Qiu Chunhui

(*Dept. of Math.*)

Abstract Using the technique of localization, the author discusses the boundary behavior of the B-M transform, *Leray transform and Henkin transform with weight factors for arbitrary* (p,q) differential form on a Stein manifold, and the fundamental solutions with weight factors of the induced Cauchy-Riemann equations (that is, the $\bar{\partial}_b$-equations) are obtained.

Key words Stein manifold, Weight factor, B-M transform, Leray transform, Henkin transform, $\bar{\partial}_b$-equation, Сохочкип-Plemelj formula