第31卷 第2期
1992年3月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol. 31 No. 2
Mar. 1992

Stein 流形上 Cauchy-Riemann 方程的具有权的基本解①

邱春晖
(数学系)

摘要 利用陈度量和陈联络,作者构造了 Stein 流形上(p,q)微分形式的具有权的 B-M 核 $B(z,\zeta)$、Leray 核 $L(z,\zeta)$、Henkin 核 $H(z,\zeta)$和核 $T(z,\zeta)$以及微分形式 $P(z,\zeta)$,并利用局部化技巧,证明了这些核的积分主值是存在的,以及核 B、$L-B+T$ 和 $B+\bar\partial(f\wedge H)$是 Cauchy-Riemann 方程 $\bar\partial E=[\triangle]+P$ 的基本解.作者还讨论了与这些核相应的算子 L、H 和 T 的奇点的传播.

关键词 Stein 流形,Cauchy-Riemann 方程,权因子,陈度量,陈联络,Cauchy 积分主值,局部化技巧

在多元复分析中,S. Bochner、J. Leray、G. M. Henkin 和 E. Remirez de Arellano 构造了著名的 B-M 核、Leray 核、和 Henkin 核.在此基础上,Harvey 和 Polking[1]构造出 Cauchy-Riemann 方程的基本解,并利用这些基本解解决了 $\bar\partial$-问题和 Levi 问题.王小芹② 利用 Berndtsoon 和 Andersson[2] 构造的具有权的 Cauchy 积分核,给出了 Cauchy-Riemann 方程的具有权的基本解.以上的结果,都是在 C^n 空间中取得的.最近,Henkin 和 Leiterer[3]、林亚先③ 分别得到了 Stein 流形上$(0,q)$形式的 $\bar\partial$-方程和 $\bar\partial_b$-方程的解,Demailly 和 Laurent-Thiebaut[4,6]则给出了 Stein 流形上(p,q)形式的积分表示.这就启发我们能否构造出 Stein 流形上(p,q)形式的 Cauchy-Riemann 方程的具有权的基本解.本文的主要目的就是研究这个问题.

为节省篇幅,本文采用文[1,3,4]的记号.设 M 表示复 n 维的 Stein 流形,$s(z,\zeta)$、$\varphi(z,\zeta)$和 χ 如同文[3]中引理 4.2.4 所述.

1 Stein 流形上具有权的 B-M 核、Leray 核和 Henkin 核

设 θ 为切丛 TM 上一 C^∞Hermite 度量,它诱导的 $\tilde T(M\times M)$上的一个 Hermite 度量仍记为 θ,定义反线性映射 $\sigma: T(M\times M)\to\tilde T^*(M\times M)$, $\zeta\to\langle\cdot,\zeta\rangle_\theta$.并设 θ^* 是 $\tilde T^*(M\times M)$上由度量 θ 诱导的 Hermite 度量,D 和∇分别是 $\tilde T(M\times M)$和 $\tilde T^*(M\times M)$上相对于 θ 和 θ^* 的陈联络.定义 C^∞截面 $\hat s: M\times M\to\tilde T^*(M\times M)$, $\hat s=\sigma\circ s$,它具有文[3]中 $\bar s$ 同样的性质.假设 U 是 M 上一个开

① 1990-10-19 收到;国家与福建省自然科学基金资助项目

② 王小芹. Cauchy-Riemann 方程具有权的基本解,厦门大学硕士学位论文,1985

③ 林亚先. Stein 流形上的 $\bar\partial_b$-方程,厦门大学硕士学位论文,1985

坐标邻域，$\{e_j\}_{j=1}^{n}$为$\tilde{T}(M\times M)$的全纯平凡标架，在这些标架下，度量θ可由一C^∞的不依赖于z的正定的Hermite矩阵H所表示，在对偶标架下，度量θ^*可由$\bar{H}^{-1}$表示.

定义1 设$V=V_1\times V_2\subset\subset M\times M$是开子流形，

1)C^∞映射$s^*:V\to\tilde{T}^*(M\times M)$称为$V$上正则(核)生成函数，若对$\forall(z_0,\zeta_0)\in V$，且$\langle s^*(z_0,\zeta_0),s(z_0,\zeta_0)\rangle=0$，则$f(\zeta)=\langle s^*(z_0,\zeta),s(z_0,\zeta)\rangle$在$\zeta=\zeta_0$处有极大秩.

2)C^∞映射$S^*:V\to\tilde{T}^*(M\times M)$称为$V$上可扩充生成函数，若对$\forall(z_0,\zeta_0)\in V$，且$\langle S^*(z_0,\zeta_0),s(z_0,\zeta_0)\rangle=0$，则$g(z)=\langle s^*(z,\zeta_0),s(z,\zeta_0)\rangle$在$z=z_0$处有极大秩。

3)若s^*既是正则的，又是可扩充的，则s^*称为V上双正则的生成函数.

注意到定义1中$f(\zeta)$和$g(z)$都是复值函数，因此秩达到最大意思指秩为2，即雅可比行列式的秩为2. 例如，设$V\subset\subset M\times M$开子流形，$s^*:V\to\tilde{T}^*(M\times M)$无穷可微，若对于所有$(z,z)\in V$，$s^*(z,z)\neq0$，则$s^*$是在$\Delta\cap V=\{(z,\zeta)\in V\mid\zeta=z\}$的邻域上双正则的生成函数.

设s^*是V上生成函数(正则或可扩充的)，令

$$A=\{(z,\zeta)\in V:\langle s^*(z,\zeta),s(z,\zeta)\rangle=0\} \tag{1}$$

并假设$s^*(z,\zeta)$满足下面条件：

a). 存在一整数$x^*\geq0$使得对$\forall z\in V_1$，映照$s^*(z,\cdot)$和$\varphi^{x^*}(z,\zeta)/\langle s^*(z,\zeta),s(z,\zeta)\rangle$在$V-A$上是$C^{(1)}$的.

引进一C^∞映射$Q=(Q_1,\cdots,Q_n):V\to\tilde{T}^*(M\times M)$，当$\zeta\in V_2$固定时，$Q$关于$z\in V_1$全纯. 设$G(z)$在复平面$C^1$上全纯，其定义域包含映照$V\to C^1$，$(z,\zeta)\to\langle Q(z,\zeta),s(z,\zeta)\rangle+1$的像集，且$G(1)=1$. 记

$$W_1=\frac{\langle s^*,Ds\rangle}{\langle s^*,s\rangle},\quad W_2=\frac{\langle\hat{s},Ds\rangle}{\langle\hat{s},s\rangle}=\frac{\langle\hat{s},Ds\rangle}{|s|_\theta^2} \tag{2}$$

仍用Q记作$\langle Q,Ds\rangle$，这并不会引起混乱.

在V-A上定义具有权的B-M核$B(z,\zeta)$、Leray核$L(z,\zeta)$、Henkin核$H(z,\zeta)$以及核$P(z,\zeta)$分别为

$$B=C_n\varphi^{\nu_n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,s\rangle+1)(\bar\partial Q)^k\wedge W_2\wedge(\bar\partial W_2)^{n-k-1}$$

$$L=C_n\varphi^{\nu_n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,s\rangle+1)(\bar\partial Q)^k\wedge W_1\wedge(\bar\partial W_1)^{n-k-1}$$

$$H=C_n\varphi^{\nu_n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,s\rangle+1)(\bar\partial Q)^k\wedge W_1\wedge W_2\wedge\sum_{p=1}^{n-k-1}(\bar\partial W_1)^{p-1}\wedge(\bar\partial W_2)^{n-k-p-1}$$

$$P=-\frac{C_n}{n!}\varphi^{\nu_n}G^{(n)}(\langle Q,s\rangle+1)(\bar\partial Q)^n \tag{3}$$

其中，$C_n=(2\pi i)^{-n}$，$\nu_n\geq\max\{x,x^*\}$的整数. 当$Q=0$时，令$Q^k=0(k\geq1)$，$Q^0=1$.

显然，$B(z,\zeta)$、$L(z,\zeta)$、$H(z,\zeta)$和$P(z,\zeta)$在$V-A$上是$C^{(1)}$类的，特当$G\equiv1$，$Q\equiv0$时，它们就退化成Stein流形上的B-M核、Leray核和Henkin核.

命题1 $\bar\partial H=L-B$，在$V-A$上；$\bar\partial B=P$在$V-\Delta(V)$上

证 $\bar\partial H=C_n\varphi^{\nu_n}\{\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}G^{(k+1)}(\langle Q,s\rangle+1)\bar\partial\langle Q,s\rangle\wedge(\bar\partial Q)^k\wedge W_1\wedge W_2\wedge\sum_{p=1}^{n-k-1}(\bar\partial W_1)^{p-1}$

$\wedge(\bar\partial W_2)^{n-k-p-1}+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,s\rangle+1)(\bar\partial Q)^k\wedge\bar\partial W_1\wedge W_2\wedge\sum_{p=1}^{n-k-1}(\bar\partial W_1)^{p-1}\wedge$

$(\bar\partial W_2)^{n-k-p-1}$

$$-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,s\rangle+1)(\bar\partial Q)^k\wedge W_1\wedge\bar\partial W_2\wedge\sum_{r=1}^{n-k-1}(\bar\partial W_1)^{r-1}\wedge(\bar\partial W_2)^{n-k-r-1}\}$$

$$=C_n\varphi^n\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,s\rangle+1)\{k\langle\nabla''Q,s\rangle\wedge(\bar\partial Q)^{k-1}\wedge W_1\wedge W_2+(\bar\partial Q)^k\wedge(W_2-W_1)\}\wedge$$

$$\wedge\sum_{r=1}^{n-k}(\bar\partial W_1)^{r-1}\wedge(\bar\partial W_2)^{n-k-r}+C_n\varphi^n\cdot G(\langle Q,s\rangle+1)(W_2-W_1)\wedge$$

$$\wedge\sum_{r=1}^{n}(\bar\partial W_1)^{r-1}\wedge(\bar\partial W_2)^{n-r}+L-B \tag{4}$$

令　$\theta=\sum_{j=1}^{n}S_j\cdot\tilde{D}S_j$

这里，$\tilde{D}S_j$ 为 DS_j 的对偶基，即 $\langle DS_j,\tilde{D}S_k\rangle=\delta_{jk}$.

设 $g=f\cdot DS_{i_1}\wedge\cdots\wedge DS_{i_p}\wedge\nabla\hat{S}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\nabla\hat{S}_{j_q}=\in D^{p,q}(M)$，定义收缩运算 $\theta\lrcorner:D^{p,q}(M)\to D^{p-1,q}(M)$，$\theta\lrcorner g=\sum_{t=1}^{p}(-1)^{t-1}f(S)S_{i_t}DS_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{DS_{i_t}}\wedge\cdots\wedge DS_{i_p}\wedge\nabla\hat{S}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\nabla\hat{S}_{j_q}$ 易见

$$\theta\lrcorner\bar\partial Q=\langle\nabla''Q,S\rangle,\ \theta\lrcorner\bar\partial W_1=0,\ \theta\lrcorner W_1=1,$$

$$\theta\lrcorner W_2=1,\quad\theta\lrcorner\bar\partial W_2=0,$$

又　$(\bar\partial Q)^k\wedge W_1\wedge W_2\wedge(\bar\partial W_1)^{k_1}\wedge(\bar\partial W_2)^{n-k_1-k-1}=0$

这是因为上式左边关于 DS 的次数为 $n+1$，其中 k,k_1 是非负整数. 因此

$$0=\theta\lrcorner[(\bar\partial Q)^k\wedge W_1\wedge W_2\wedge(\bar\partial W_1)^{k_1}\wedge(\bar\partial W_2)^{n-k_1-k-1}]$$

$$=\{k\langle\nabla''Q,s\rangle\wedge(\bar\partial Q)^{k-1}\wedge W_1\wedge W_2+(\bar\partial Q)^k\wedge(W_2-W_1)\}\wedge(\bar\partial W_1)^{k_1}\wedge(\bar\partial W_2)^{n-k-k_1-1} \tag{5}$$

这里，当 $k=0$ 时，取 $(\bar\partial Q)^{k-1}=0$. 式(5)代入式(4)即得

$$\bar\partial H=L-B,\qquad 在\ V-A\ 上$$

同理　$\bar\partial B=P$，当 $S(z,\zeta)\neq0$ 时. 证毕.

2　(p,q)形式的 Cauchy-Riemann 方程具有权的基本解

定义 2　在 Stein 流形 M 上，若解 E 满足基本方程 $\bar\partial E=P+[\Delta]$，则称 E 为 M 上 Cauchy-Riemann 方程的具有权的基本解.

注　当 $G\equiv1$ 时，$P=0$，这样，Cauchy-Riemann 方程的具有权的基本解就退化成其基本解.

下面，我们得到本文的主要结果.

定理 1　定义 $B=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\chi_\varepsilon B$，则 $B(z,\zeta)$ 定义了 V 上的 Cauchy 主值广义式，且 $\bar\partial B=P+[\Delta]$，这里 $\chi_\varepsilon(z,\zeta)$ 是集合 $\{(z,\zeta)\in V:|s|_2^2>\varepsilon\}$ 的特征函数.

仍用 $\chi_\varepsilon(z,\zeta)$ 表示集合 $\{(z,\zeta)\in V:|\langle s^*,s\rangle|\geqslant\varepsilon\}$ 的特征函数，则有

定理 2　设 s^* 是定义在 $V\subset\subset M\times M$ 上满足条件(a)的生成函数，则

1)　微分形式 $L=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\chi_\varepsilon L$，$H=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\chi_\varepsilon H$ 定义了 V 上的 Cauchy 主值广义式，且极限 $T=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\bar\partial\chi_\varepsilon\wedge H$ 存在并定义了广义式 $T\in D^{n,n-1}(V)$，且 $\mathrm{Supp}T\subset A$.

2)　$\bar\partial H=L+T-B$，$\bar\partial(L+T)=P+[\Delta]$ 在 V 上成立.

3)　设 V_1,V_2 为 M 上开子流形，$V_1\times V_2\subset V$，则当生成函数 s^* 是正则或可扩充的或双正则时，核 L、H、T 限制在 $V_1\times V_2$ 上也是正则或可扩充的或双正则的.

证　在坐标系 $\{e_j\}_{j=1}^n$ 下，我们有[4]

$$DS=\mathrm{d}u+(H^{-1}\partial H)\wedge u,\ \nabla s^*=\mathrm{d}u^*+(\bar H\partial\bar H^{-1})\wedge u^*$$

$$\nabla\hat{s}=\mathrm{d}\hat{u}+(\bar H\partial\bar H^{-1})\wedge\hat{u},\ D''DS=\bar\partial(H^{-1}\partial H)\wedge u$$

$$\dot{u}=\overline{H}\,\bar{u},\langle\nabla''s^{*},DS\rangle=\sum_{j=1}^{\bullet}\bar{\partial}u_{j}{}^{*}\wedge(\mathrm{d}u_{j}+((H^{-1}\partial H)\wedge u)_{j})$$

$$\langle s^{*},DS\rangle=\sum_{j=1}^{\bullet}u_{j}{}^{*}(\mathrm{d}u_{j}+((H^{-1}\partial H)\wedge u)_{j})=\langle u^{*},\mathrm{d}u\rangle+0(|\langle u^{*},u\rangle|) \tag{6}$$

其中，u^{*} 和 u 分别是 s^{*} 和 s 的局部坐标.

以下我们利用局部化技巧[5]. 设 $\{U_j\}_{j=1}^{n}$ 为 V 的局部有限复盖，而且就是坐标邻域，令

$$A_j=A\bigcap U_j=\{(z,\zeta)\in U_j:\langle s^{*},s\rangle=0\}$$

对于任意固定 $(\eta,\eta)\in\Delta\bigcap A_j$，取 $\delta>0$，使得 $W_\eta=s(\eta,\cdot):V_{\eta_j}\to B_\delta=\{\zeta^{*}:|\zeta^{*}|<\delta\}\subset C^{n}$ 是一全纯映照，这里 $V_{\eta_j}\subset U_j$ 是 η 的一个小邻域，记

$$\eta=W_\eta^{-1}(0),z=W_\eta^{-1}(z^{*}),\zeta=W_\eta^{-1}(\zeta^{*})$$

再利用有限复盖定理和单位分解定理，则定理 1 和定理 2 的证明分别类似于[4]中的定理 2.2 和[1]中的定理 5.8. 证毕.

由定理 2，可得 Cauchy－Riemann 方程具有权的基本解.

定理 3 设 $\Omega\subset\subset M$ 开子流形，$s^{*}(z,\zeta)$ 是定义在开子流形 $V\subset\subset\Omega\times\Omega$ 上满足条件 (a) 的生成函数，若 (p,q) 形式 $f\in C^{\infty}(\Omega\times\Omega)$ 满足 $\mathrm{supp}f\subset V$，则核

$$E=B+\bar{\partial}(f\wedge H)=(-1)^{p+q}f\wedge(L+T)+(1-(-1)^{p+q}f)\wedge B+\bar{\partial}f\wedge H$$

是 $\Omega\times\Omega$ 上 *Cauchy－Riemann* 方程的具有权的基本解，即满足基本方程 $\bar{\partial}E=P+[\Delta]$，而且当生成函数 s^{*} 是正则或可扩充的或双正则时，核 E 也是正则或可扩充的或双正则的.

特当 $V=D\times\partial D\subset\subset M\times M$，类似[4]中定理 2.2 的证明，可得以下的加权的 Bochner-Martinelli-Koppelman 公式.

定理 4 设 $D\subset\subset M,\partial D\in C^{(1)}$，若 $f\in C^{(1)}_{p,q}(\bar{D})$，则对每一 $z\in D$，有

$$\int_{\partial D}B_q^p(z,\zeta)\wedge f(\zeta)+\int_{D}B_q^p(z,\zeta)\wedge\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)+\bar{\partial}_z\int_{D}B_q^p(z,\zeta)\wedge f(\zeta)-\int_{D}P_q^p(z,\zeta)\wedge f(\zeta)$$
$$=f(z)$$

其中 $B_q^p(z,\zeta)$、$P_q^p(z,\zeta)$ 分别是 $B(z,\zeta)$ 和 $P(z,\zeta)$ 关于 z 是 (p,q) 次的分量.

3 奇点的传播

现在我们讨论算子 L、H 和 T 的奇点的传播，粗略地说，这些算子是沿着奇点集 $A=\{(z,\zeta)\in V:\langle s^{*},s\rangle=0\}$ 传播的.

令 $A_\zeta=\{z:(z,\zeta)\in A\}$，$A_z^{*}=\{\zeta:(z,\zeta)\in A\}$，我们有

定理 5 设 S^{*} 是定义在开子流形 $V\subset\subset M\times M$ 上满足条件 (a) 的双正则生成函数，$V_1\times V_2\subset V$，设 $v\in\varepsilon'^{p,q}(V_2')$，$w\in\varepsilon'^{p,q}(V_1)$，则

1) $\mathrm{Supp}Tv\subset\{z:A_z^{*}\bigcap\mathrm{Supp}v\neq\varnothing\}$；$\mathrm{Supp}t_{T_w}\subset\{\zeta:A_\zeta\bigcap\mathrm{Supp}w\neq\varnothing\}$

2) 若 F 为算子 L、H 和 T 之一，则

$\mathrm{Sing\ Supp}Fv\subset\{z:A_z^{*}\bigcap\mathrm{Sing\ Supp}v\neq\varnothing\}$

$\mathrm{Sing\ Supp}^{t}F_w\subset\{\zeta:A_\zeta\bigcap\mathrm{Sing\ Supp}w\neq\varnothing\}$

这里，$\mathrm{Sing}C$ 表示 C 的奇点集.

证 对于任意固定的 $(\eta,\eta)\in\Delta\bigcap A_j$，取 $\delta>0$，使得 $W_\eta=s(\eta,\cdot):V_1\times V_2\bigcap V_j\to\tilde{V}_1\times\tilde{V}_1\subset B_\delta\times B_\delta$ 是双全纯映照，由局部化技巧[5]，利用有限复盖定理和单位分解定理，则定理 5 的证明类似于[1]中定理 5.29 的证明. 证毕.

类似地,对于实解析的奇点,我们也有[1]

定理6　设 s^* 是定义在开子流形 $V \subset\subset M \times M$ 上满足条件(α)的实解析双正则生成函数,$V_1 \times V_2 \subset V$,设 $v \in \mathscr{E}'^{p,q}(V_2)$,$w \in \mathscr{E}'^{p,q}(V_1)$,若 F 是算子 L、H 和 T 之一,则

1)Fv 在 $V_1 - \{z : A_z^* \cap \mathrm{Supp} v \neq \Phi\}$ 上实解析,

2)${}^tF_w$ 在 $V_2 - \{\zeta : A_\zeta \cap \mathrm{Supp} w \neq \Phi\}$ 上实解析.

承蒙导师钟同德教授的精心指导,在此表示衷心的感谢

参考文献

1 Harvey R, Polking J. *Duke Math. J.*, 1979, 46(2): 253~300

2 Berndtsson B, Andersson M. *Ann. Inst. Fourier*, 1982, Grenoble 32(3): 91~110

3 Henkin G M, Leiterer J. *Theory of functions on complex manifolds*, *Birkhäuser Verlag*, 1984

4 Demailly J P, Laurent-Thiebaut Ch. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure*, 1987, 20: 579~598

5 钟同德. *Holomorphic extension on Stein manifolds*, Research Report No. 10, 1987, Mittag-Leffler Institute

6 钟同德,黄沙. 多元复分析,石家庄:河北教育出版社,1990

Fundamental Solutions with Weight Factors of Cauchy-Riemann Equations on Stein Manifolds

Qiu Chunhui

(*Dept. of Math.*)

Abstract　By using Chern metric and connection, the B-M kernel B、Leray kernel L、Henkin kernel H with weight factors, a kernel T and a differential form P are constructed on a Stein manifold. Using the technique of localization, the author proves that the principal value of integral with kernel B、L and H exist respectively, and that the kernel B、L−B+T and $B+\bar\partial(f \wedge H)$ satisfy the fundamental equation $\bar\partial E = [\Delta] + P$ respectively. Further, the author discusses the propagation of singularities of the operators L、H and T which are induced by kernels L、H and T respectively.

Key words　Stein manifold, Cauchy-Riemann equation, Weight factor, Chern metric and connection, Principal value of Cauchy integral, Technique of localization