第 37 卷　第 3 期　　厦门大学学报(自然科学版)　　Vol. 37　No. 3
1998 年 5 月　　Journal of Xiamen University (Natural Science)　　May 1998

复双球垒域上 Cauchy 型积分的边界性质[1]

林良裕　邱春晖　阮其华
(厦门大学数学系　厦门　361005)

摘要　在 C^n 空间中双球垒域上,建立具有全纯核的 Cauchy 型积分的含有边界立体角系数的 ÀÇÀÈ¼º –Plemelj 公式.

关键词　双球垒域, 柯西型积分, 边界性质
中国图书分类号　O 174.56

1　引言和主要定理

最近, 文[1]和[2]分别建立了 C^n 空间中有界域上具有离散全纯核和球垒域上具有有限离散全纯核的全纯函数的积分公式; 文[2]还得到球垒域上 $\bar\partial$-方程 $\bar\partial u = g$ 的 $C^{(k)}$ 可微整体解和解的一致估计. 本文利用文[2]的积分公式讨论双球垒域上 Cauchy 型积分的边界性质. 周知, 陆启铿、钟同德[3]和龚升、孙继广[4]分别开辟 Bochner–Martinelli 型和复超球的 Cauchy 型积分边界性质的研究, 由此推动了多复变数奇异积分方程的研究[5~8]. 他们的工作和 Henkin[9], Grauert, Lieb[10] 开辟的强拟凸域上 $\bar\partial$-方程及其解的一致估计的研究同样开拓了多复变数积分表示的广泛应用前景. 文[11]和[12]最早定义了一般有界域上点的立体角系数并给出了 Bochner－Martinelli 型奇异积分 Cauchy 主值的几何意义. 本文基于文[11]和[12]的思想给出复双球垒域上相应的结果. 本文的证明过程还得益于龚升[6]的思想.

设 $D = \bigcup_{j=1}^{2} B_j(a^j)$ 是一连通开集并称之为复双球垒域, $B_j(a^j) = \{\zeta \mid |\zeta_1 - a_1^j|^2 + \cdots + |\zeta_n - a_n^j|^2 < r_j^2\}$, $j = 1, 2$. $B_1 \cap B_2 \neq ≊$, 且 $B_2 \neq B_1 \cap B_2 \neq B_1$, 由文[2]定理 1 的推论, 有

命题 1　设 $f \in A_c(D)$, 则

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\,\Omega(\eta(\zeta, z)). \quad \forall z \in D \tag{1}$$

其中核 $\Omega(\eta(\zeta, z))$ 是定义在 $(\zeta, z) \in \partial D \times D$ 上的有限离散全纯核, 它是一特殊的 *Cauchy Fantappi* 形式,

$$\Omega(\eta(\zeta, z)) = (-1)^{n(n-1)/2}(2\pi i)^{-n}\det(\eta, \bar\partial\eta, \cdots, \bar\partial\eta) \wedge d\zeta \tag{2}$$

其中 $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)^T$, $\eta_k = \dfrac{\omega_k}{\Phi(\zeta, z)}$, $\omega_k = \sum_{j=1}^{2} \chi_{B_j}(z)(\bar\zeta_k - \bar a_k^j)$, $\Phi(\zeta, z) = \langle \bar\zeta - z, w\rangle = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n} \chi_{B_j}(z)(\zeta_k - z_k)(\bar\zeta_k - \bar a_k^j)$, χ_{B_j} 是开集 B_j 上的特征函数. 易知

1　本文 1997-08-15 收到;　国家自然科学基金和福建省自然科学基金资助项目

$$\Omega(\eta(\zeta,z)) = \sigma_n \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \chi_{B_j}(z)(\bar{\zeta}_k - \bar{a}_k^j) d\bar{\zeta}_{[k]} \wedge d\zeta}{(\Phi(\zeta,z))^n} \tag{3}$$

其中 $\sigma_n = (n-1)!(2\pi i)^{-n}$, 若 $\mathscr{L}^*$ 为定义在 ∂D 上满足 $\mathrm{Lip}\beta$ 条件, $0<\beta\leq 1$, 且能连续开拓为 D 上的 $C^{(1)}$ 函数集合, 由文[2] 定理 1 易知

命题 2 设 $D = B_1(a^1) \cup B_2(a^2)$ 是一复双球垒域, $f \in \mathscr{L}^*$, 则对 $\forall z \in B_1 \cap B_2$, 有

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\eta^1(\zeta,z)) = \int_{\partial D} f(\zeta)(\eta^2(\zeta,z)) = \int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\eta(\zeta,z)) \tag{4}$$

其中 $\Omega(\eta^j(\zeta,z)) = \sigma_n \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k-1} \frac{\chi_{B_j}(z)(\bar{\zeta}_k - \bar{a}_k^j) d\bar{\zeta}_{[k]} \wedge d\zeta}{\Phi^n(\zeta,z)}$. 因此, 若 $f \in \mathscr{L}^*$, D 为复双球垒域, 则可定义 D 上的单值 *Cauchy* 型积分

$$F(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\eta(\zeta,z)), z \in D \tag{5}$$

若 $t \in \partial D$, 令 $\eta(\zeta,t) = \lim_{z\to t} \eta(\zeta,z)$, $\Phi(\zeta,t) = \lim_{z\to t} \Phi(\zeta,z)$, 则上式是一发散的奇异积分, 但我们能如下定义其 Cauchy 主值

$$F(t) = \mathrm{V.P}\int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\eta(\zeta,t)) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\sum_\epsilon(t)} \tag{6}$$

其中 $\sum_\epsilon(t) = \{\zeta \in \partial D: |\Phi(\zeta,z)| \geq \epsilon\}$. 以下一般省略记号 V.P. 本文的主要定理有

定理 1 设 $f \in \mathscr{L}^*$, D 是复双球垒域, 则 Cauchy 主值, $\mathrm{V.P}\int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\eta(\zeta,t))$ 存在, 且等于

$$\int_{\partial D} (f(\zeta) - f(t))\Omega(\eta(\zeta,t)) + a(t)f(t), 0 < a < 1$$

其中第一项是一正常收使用的广义积分.

定理 2 设 $\rho \in \mathscr{L}^*$, D 是复双球垒域, z 从 D 内趋于点 $t \in \partial D$, 满足

$$\frac{\rho(z,t)}{d(z,\partial D)} < M \tag{7}$$

M 为正常数, $\rho(z,t) = ((z-t)\overline{(z-t)})^{\frac{1}{2}}$

记 $$\Psi(z) = \int_{\partial D} (f(\zeta) - f(t))\Omega(\eta(\zeta,z)) \tag{8}$$

则 $$\lim_{z\to t} \Psi(z) = \Psi(t) \tag{9}$$

定理 3 (Coxo кц-Plemelj 公式) 设 $f \in \mathscr{L}^*$, D 是复双球垒域, 当 z 从 D 内超于点 $t \in \partial D$ 时, 满足 $\frac{\rho(z,t)}{d(z,\partial D)} < M$, $M > 0$ 为常数, 则有

$$F^+(t) = V.P\int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\eta(\zeta,t)) + (1 - a(t))f(t) \tag{10}$$

$0 < \alpha(t) < 1$, 特别当 $t \in \partial D$ 为光滑点时, $\alpha(t) = \frac{1}{2}$.

2 主要引理和定理的证明

引理 1 设 $t \in \partial D$, 则

$$\mathrm{V.P}\int_{\partial D} \Omega(\eta(\zeta,t)) = \alpha(t) \tag{11}$$

$0 < \alpha(t) < 1$, 当 $t \in \partial D$ 为光滑点时, $\alpha(t) = \frac{1}{2}$.

证　不妨设 $t\in\partial B_1\cap\partial B_2$, 记 $\sigma_\epsilon(t)=\{\zeta\in\partial D:\ |\Phi(\zeta,t)|\le\epsilon\}$, 则 $\triangle=\{\zeta\in\partial D:\Phi(\zeta,t)=0\}$ 是 ∂D 上的 $2n-2$ 维紧流形, 令 $b_\epsilon(t)=\{\zeta\in C^n:\ |\Phi(\zeta,t)|=|\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-t_k)(\bar\zeta_k-\bar a_k^j)|<\epsilon\}$, $\epsilon>0$ 足够小. 显然 $\bar b_\epsilon(t)$ 为含 t 为内点的紧集, 且 $\bar\triangle\subset b_\epsilon(t)$. 因此 $\partial b_\epsilon(t)\cap\triangle=\varnothing$. 注意到对 $\forall z\in D\cap b_\epsilon(t)$, $\Omega(\eta(\zeta,z))$ 在 $\bar D\setminus b_\epsilon(t)$ 上是一闭形式. 应用 Stokes 定理, 有

$$\int_{\sum_\epsilon(t)}\Omega(\eta(\zeta,z))=\int_{\partial b_\epsilon(t)\cap\bar D}\Omega(\eta(\zeta,z))$$

若定义点 $t\in\partial D$ 的立体角系数为

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\partial b_\epsilon(t)\cap\bar D}\Omega(\eta(\zeta,t))=\alpha(t),\ 0<\alpha(t)<1 \tag{12}$$

这是因为 ∂D 上的几何结构不可能有内外球切点. 当 $z\in D\cap b_\epsilon(t)\cap B_1\cap B_2$ 趋于 $t\in\partial B_1\cap\partial B_2$, 且满足条件(7)时, 有

$$V.P\int_{\partial D}\Omega(\eta(\zeta,t))=\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{z\to t}\int_{\sum_\epsilon(t)}\Omega(\eta(\zeta,z))=\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{z\to t}\int_{\partial b_\epsilon(t)}\Omega(\eta(\zeta,z))=\alpha(t) \tag{13}$$

最后, 当 $t\in\partial D$ 为光滑点时, 如 $t\in\partial D\cap\bar B_1$, 则 $\Omega=\sigma_n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\bar\zeta_k-\bar a_k^1)\left(\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-t_k)(\bar\zeta_k-\bar a_k^1)\right)^{-n}d\bar\zeta_{[k]}\wedge d\zeta$ 注意到这时 Ω 是酉线性变换不变量, 故可先把 α^1 移至原点, 再选取一酉方阵 U 使 $tU=(1,0,\cdots 0)$, 即把 $\partial B_1(\alpha^1)$ 变为单位超球面 $\zeta\bar\zeta=1$, 无妨不改变 $\partial D, B_1, \zeta, t$ 等的记号, 则不难验证

$$\Omega(\eta(\zeta,t))\Big|_{\zeta\in\partial D\cap\bar B_1}=\frac{1}{\omega_{2n-1}}\frac{\zeta}{(1-\bar\zeta_1)^n} \tag{14}$$

由[6] 引理 1.2.1 知　$V.P\int_{\zeta\bar\zeta=1}\frac{\zeta}{(1-\bar\zeta_1)^n}=\frac{1}{2}$

引理 2　设 $t\in\partial D$, 对足够小的 $\delta>0$ 和 $\rho=|\rho(\zeta,t)|$, 有

$$\varphi(\delta)=\int_{\sigma_\delta}\rho^\beta\ |\Omega(\eta(\zeta,t))|=O(\delta^{\beta/2}) \tag{15}$$

证　设 $t\in\partial B_1\cap\partial B_2$, 令 $\sigma_\delta^j=\{\zeta\in\partial D\cap\bar B_j:\ |\Phi(\zeta,t)|\le\delta\}$, $j=1,2$, $\varphi_j(\delta)=\int_{\sigma_\delta^j}\rho^\beta\ |\Omega|$, 则 $\varphi(\delta)=\varphi_1(\delta)+\varphi_2(\delta)$.

现在估计 $\varphi_1(\delta)$, 仿引理 1 中所做的酉变换, 无妨设 $a^1=0$, $t=(1,0,\cdots,0)$ 由式(14), 易得

$$\varphi_1(\delta)\le\frac{K_1}{\omega_{2n-1}}\int_{\sigma_\delta^1}\frac{\zeta}{|1-\bar\zeta_1|^{n-\beta/2}},\quad \omega_{2n-1}=2\pi^n/\Gamma(n),\quad K_1>0\ \text{常数}$$

记 $\zeta_k=x_k+iy_k$, $k=1,\cdots,n$, 利用球坐标: $x_1=\cos\theta_1$, $y_1=\sin\theta_1\cos\theta_2$, $x_2=\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$, $\cdots$, $y_n=\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{2n-1}$, 其中 $0\le\theta_1,\cdots,\theta_{2n-2}<\pi$, $0\le\theta_{2n-1}<2\pi$, 则有

$$\zeta=\sin^{2n-2}\theta_1\sin^{2n-3}\theta_2,\cdots\sin\theta_{2n-2},\ d\theta_1 d\theta_2\cdots d\theta_{2n-1},\quad |1-\zeta_1|^2=(1-\cos\theta_1)^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2$$

对足够小的 $\delta>0$, 经计算可得[6] $\varphi_1(\delta)=O(\delta^{\beta/2})$, 同理可证 $\varphi_2(\delta)=O(\delta^{\beta/2})$.

定理 1 的证明　无妨设 $t\in\partial B_1\cap\partial B_2$, 对足够小的 $\epsilon>0$, 令 $\sum_\epsilon=\sum_\epsilon^1+\sum_\epsilon^2$, $\sum_\epsilon^j=\{\zeta\in\partial B_j\cap\partial D:\ |\Phi(\zeta,t)|\ge\epsilon\}$, $j=1,2$, 则

$$\int_{\sum_\epsilon}f(\zeta)\Omega(\eta(\zeta,t))=\int_{\sum_\epsilon}(f(\zeta)-f(t))\Omega(\eta(\zeta,t))+f(t)\int_{\sum_\epsilon}\Omega(\eta(\zeta,t))\triangleq I_1+I_2$$

易知当 $\epsilon\to 0$ 时, I_2 的极限值为 $\alpha(t)f(t)$, 因此, 仅需估计

$$J_j = \int_{\sum_\epsilon^j}(f(\zeta) - f(t))\Omega(\eta(\zeta,t)), j = 1,2$$

为此, 先估计 J_1, 基于和引理 2 同样的理由, 我们能通过平移和 U-变换把 a^1 变为原点, 把 t 变为 $(1, 0, \cdots, 0)$ 点. 无妨不改变原来的各种记号, 并注意到式(14), 可得

$$J_1 \le \frac{K_1}{\omega_{2n-1}}\int_{\substack{\zeta\bar\zeta=1\\ |1-\zeta_1|\ge\epsilon}} |1-\bar\zeta_1|^{\frac{\beta}{2}-n}\zeta$$

利用球坐标, 类似引理 1 的证明可得 $J_1 = O(1)$.

同理可证 $J_2 = O(1)$, 因此 I_1 是正常收敛的广义积分.

定理 2 的证明　首先对足够靠近的二点 $z\in D$ 和 $t\in\partial D$. 记

$$\Psi(z) - \Psi(t) = \int_{\zeta\in\partial D}(f(\zeta) - f(t))(\Omega(\eta(\zeta,z)) - \Omega(\eta(\zeta,t)))$$

$$= \int_{\sigma_\delta(t)} + \int_{\sum_\delta(t)} \triangleq I_1 + I_2$$

如同引理 2 所设 $t\in\partial B_1\cap\partial B_2$, $\sigma_\delta(t) = \sigma_\delta^1 + \sigma_\delta^2$, $\sigma_\delta^j = \{\zeta\in\partial D\cap\bar B_j: |\Phi(\zeta,t)| \le\delta\}$, $j = 1,2$. 并记

$$I_1 \le J'_1 + J'_2,\quad J'_j$$

$$= \int_{\sigma_\delta^j}(f(\zeta) - f(t))(\Omega(\eta(\zeta,z)) - \Omega(\eta(\zeta,t))),\ j = 1,2$$

现在估计 J'_1, 基于和引理 2 同样的理由, 无妨假定 $a^1 = (0, \cdots, 0)$, $t = (1, 0, \cdots, 0)$, 应用 (14), 则

$$J'_1 = \int_{\sigma_\delta^1}\frac{((1-t\bar\zeta')^n - (1-z\bar\zeta')^n)(f(\zeta) - f(t))}{(1-z\bar\zeta')(1-t\bar\zeta')^n}\zeta$$

$$\le \int_{\sigma_\delta^1}\frac{|(t-z)\bar\zeta'|\,(|1-t\bar\zeta'|^{n-1} + |1-t\bar\zeta'|^{n-2}|1-z\bar\zeta'| + \cdots + |1-z\bar\zeta'|^{n-1})\zeta}{|1-z\bar\zeta'|^n\,|1-t\bar\zeta'|^{n-\beta/2}}$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\int_{\sigma_\delta^1}\frac{\rho(z,t)\zeta}{|1-z\bar\zeta'|^k\,|1-t\bar\zeta'|^{n-k+1-\beta/2}}$$

注意到 $|1-t\bar\zeta'|\le |1-z\bar\zeta'| + |(z-t)\bar\zeta'|$, 且

$$|z-t\bar\zeta'| \le ((z-t)\overline{(z-t)})^{\frac{1}{2}} < Md(z,\partial B_1) \le M|1-z\bar\zeta'|$$

由此 $|1-t\bar\zeta'| \le (M+1)|1-z\bar\zeta'|$, 于是

$$J'_1 \le \sum_{k=1}^{n}(M+1)^kM\int_{\sigma_\delta^1}\frac{\zeta}{|1-t\bar\zeta'|^{n-\beta/2}} = M_1\int_{\sigma_\delta^1}\frac{\zeta}{|1-t\bar\zeta'|^{n-\beta/2}}$$

其中 $M_1 = \sum_{k=1}^{n}(M+1)^kM > 0$ 为常数, 由引理 2 知 $J'_1 = O(\delta^{\beta/2})$, $0<\beta\le 1$.

同理可证 $J'_2 = O(\delta^{\beta/2})$, 故对 $\forall\epsilon > 0$, 可取 $\delta > 0$ 足够小, 使 $I_1 \le J'_2 + J'_2 \le \frac{\epsilon}{2}$.

其次, I_2 作为 z 的函数, 显然在 $z = t$ 连续, 故当 $\rho(z,t)$ 充分小时, 必有 $I_2 < \frac{\epsilon}{2}$.

定理 3 的证明　由式(3)和(5)立知

$$F(z) = \Psi(z) + f(t)\int_{\partial D}\Omega(\eta(\zeta,z)) = \Psi(z) + f(t)$$

又由定理 1 和定理 2 立知

$$\lim_{z\to t}\Psi(z) = \Psi(t) = V.P\int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\eta(\zeta,t)) - \alpha(t)f(t)$$

由此立得式(10)成立. 定理证毕.

参 考 文 献

1 Lin Liangyu. Bochner-Martinelli formula with discrete holomorphic kernel. Chinese Sacience Bulletin, 1997, 42(6): 447～450

2 林良裕. 球垒域上的 $\bar{\partial}$-方程. 厦门大学学报(自然科学版), 1997, 36(4): 503～506

3 陆启铿, 钟同德. Âº³ 岦À³ 定理的拓广. 数学学报, 1957, 7(1): 144～165

4 龚升, 孙继广. 多复变数的 Cauchy 型积分(I), 超球的 Cauchy 型积分. 数学学报, 1965, 15(3): 431～443

5 钟同德. 多复变数的积分表示与多维奇异积分方程. 厦门: 厦门大学出版社, 1986

6 龚升. 多复变数的奇异积分. 上海: 上海科技出版社, 1982

7 史济怀. 关于超球的 Cauchy 型积分. 中国科技大学学报, 1980, 10(1): 1～9

8 林良裕. 多复变数的线性奇异积分方程. 厦门大学学报(自然科学版), 1989, 28(5): 451～455

9 Henkin G M. Integral representation of functions in strictly pseudoconvex domains and applications to the $\bar{\partial}$-problem. Mat. sb., 1970, 82(124): 300～308

10 Grauert H, Lieb I. Das ramirezsche integral und die L sung der Gleichung $\bar{\partial}f = \delta$ in Bereich der beschr nkten formen. Rice Univ Studies., 1970, 56: 26～50

11 林良裕. 闭逐块光滑流形上哥西型积分的边界性质. 数学学报, 1988, 31(4): 547～557

12 林良裕. 闭逐块光滑流形上的 Cauchy-Fantappi 型积分的边界性质. 数学学报, 1995, 38(1): 13～23

Boundary Behavior for the Integrals of Cauchy Type on a Building Domain of Complex Biballs

Lin Liangyu Qiu Chunhui Ruan Qihua

(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005)

Abstract Let D be a building domain of complex biballs in C^n, $\mathscr{L}^*$ be a function set which satisfies Lipschizt condition on ∂D and can be continuously extended to D such that $f \in C^{(1)}(D)$ for all $f \in \mathscr{L}^*$, the author defines a kind of the integral $F(z)$ of Cauchy type with finite discrete holomorphic kernels Ω and establishes a more general Coxo¼du -Plemelj formula which involves a solid angle coefficient $\alpha(t)$ at the point $t \in \partial D$, i.e.

$$F^+(t) = \mathrm{V.P}\int_{\partial D} f\Omega + (1-\alpha(t))f(t),\ 0 < \alpha(t) < 1.$$

In particular, $\alpha(t) = \frac{1}{2}$, for t is a smooth point of ∂D.

Key words Building domain of biballs, Integral of Cauchy type, Boudary behavior