View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Xiamen University Institutional Repository

Vol. 18(1998)
增刊

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类高阶奇异积分方程*

陈鹄汀　　林良裕　　邱春晖
(厦门大学, 厦门　361005)

摘要　本文利用 C^n 空间中复超球面上的 Plemelj 公式, 建立相应的高阶奇异积分的有限合成公式; 讨论一类高阶奇异积分方程的解.

关键词　高阶奇异积分　有限合成公式　积分方程　偏微分方程
MR(1991) 主题分类　**45E99**
中图法分类　**O174.56　O175.23**

1　引言, 定义

熟知, 龚昇, 史济怀最早讨论了复超球面上 Cauchy 型积分及其导数的含高阶奇异积分 Hadamard 主值的边界性质[1]. 后来, 王小芹讨论了复超球面上高阶 Cauchy 型积分及其高阶偏导的含有限部分主值的 Plemelj 公式[2]. 本文利用[1]和[2]的结果, 建立一个高阶奇异积分有限部分的合成公式, 最后讨论一类高阶奇异积分方程, 并化为一类二阶线性偏微分方程来讨论它的解.

设 $B(0,1)=\{u\in C^n: |u|<1\}$, $S=\partial B(0,1)$, $u, v\in S$, $\omega=2\pi^n/\Gamma(n)$, $\dot{u}$ 为 S 上实 $2n-1$ 维体积元素, $f\in C^{3+\alpha}(S)$, $0<\alpha\leq 1$. 我们定义 S 上的高阶奇异积分的有限部分如下[2]:

$$F\cdot P\,\frac{1}{\omega}\int_S f(u)(1-\langle v,\bar{u}\rangle)^{-n-k}\dot{u}=\lim_{\epsilon\to 0}\Big\{\frac{1}{\omega}\int_{S\cap\{|1-w_1|>\epsilon\}} f(w\bar{U}')(1-\bar{w}_1)^{-n-k}\dot{w}$$

$$+\frac{1}{\omega}\sum_{j=0}^{k-1}A_{nkj}\int_{S\cap\{|1-w_1|=\epsilon\}} L^j f(w\bar{U}')(1-\bar{w}_1)^{-n-k+j+1}\bar{w}_1^{-1}\dot{w}\Big\}.$$

其中　$Lf(u)=\frac{1}{\bar{u}_1}\Big[u_1\frac{\partial f(u)}{\partial u_1}-\bar{u}_1\frac{\partial f(u)}{\partial \bar{u}_1}+f(u)\Big]$, $\bar{u}_1\neq 0$, $L^j f=L(L^{j-1}f)$, $L^0 f=f$,

$A_{nkj}=2^{1-n}i^{-n}/(n+k-1)\cdots(n+k-j-1)$, $u=w\bar{U}'$, U 是一酉方阵, 满足 $vU=(1,0,\cdots,0)$. 以下一般省略 Cauchy 主值记号 $V\cdot P$ 及高阶奇异积分有限部分, 即主值记号 $F\cdot P$, 并定义高阶奇异积分的有限部分积分算子如下:

$$K\varphi(u)=\frac{1}{\omega}\int_S \bar{u}_1^k\varphi(u)(1-\langle v,\bar{u}\rangle)^{-n+k}\dot{u}$$

下文主要讨论 $k=1$ 的情形, 合成公式及奇异积分方程.

---

* 收稿日期: 1997-01-23.
国家自然科学基金资助项目(19771068)和福建省自然科学基金资助项目(A9810001).

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www

2 主要引理

引理 2.1[2] 设 $f\in C^{k+\alpha}(s)$，$0<\alpha\leq 1$，k 为某一正整数，$v\in s$，$z\in B(0,1)$ 满足 $d(z,v)/d(z,s)\leq M$，$M>0$ 为常数；则当 $z\to v$ 时，有 Plemelj 公式

$$F(v)=\lim_{z\to v}\frac{1}{\omega}\int_s f(u)(1-z\bar{u})^{-n-k}u$$

$$=F\quad P\frac{1}{\omega}\int_s f(u)(1-v\bar{u})^{-n-k}u+\frac{1}{2n\cdots(n+k-1)}L^k f(v) \qquad (1)$$

引理 2.2 在引理 2.1 的条件下，$F(v)\in \mathrm{Lip}(\alpha-\delta)$，$0<\delta<\alpha$.

证 我们取 s 的一个有限开复盖 $\{\cup_j\}$，$j=1,2,\cdots,m$，使得 $v\in U_1$，并取 $C^{k+\alpha}(s)$ 的有限函数族 $\{f_j\}$，$j=1,2,\cdots,m$ 为 s 上从属于 $\{U_j\}$ 的单位分解，满足 $\mathrm{supp} f_j\subset U_j$，$\sum_{j=1}^{m}f_j(u)=1$.

记 $f_0=\sum_{j=2}^{m}f_jf$，则

$$F(v)=\frac{1}{\omega}\int_s f_0(u)(1-v\bar{u})^{-n-k}u+\frac{1}{n\cdots(n+k-1)}\int_s L^k(f_1f)(u)(1-v\bar{u})^{-n}u$$

$$+\frac{1}{2n\cdots(n+k-1)}L^k(f_1f)(v)$$

由文[1]定理 1.5.1 知上式右边第二项积分显然满足 $Lip(\alpha-\delta)$，$0<\delta<\alpha$. 而右边第一项显然是 S 上局部满足 $\mathrm{Lip}\alpha$ 条件；因 S 是紧的，故其在 S 上也是满足 $\mathrm{Lip}\alpha$ 的. 引理证毕.

引理 2.3 设 $\varphi(u,\xi)\in C^{k+\alpha}(S\times S)$，则

$$\Phi(v,\xi)=\frac{1}{\omega}\int_s\varphi(u,\xi)(1-v\bar{u})^{-n-k}u\in \mathrm{Lip}\alpha(S\times S)$$

证 根据引理 2.2，显然只需证明作为 ξ 的函数 $\Phi(v,\xi)=\psi(\xi)\in \mathrm{Lip}\alpha(s)$. 类似引理 2.2 的证明，

$$\Phi(v,s)=\frac{1}{\omega}\int_s f_0(u,\xi)(1-v\bar{u})^{-n-k}u+\frac{1}{\omega n\cdots(n+k-1)}\int_s L^k(f_1\varphi)(1-v\bar{u})^{-n}u,$$

其中右边第一项显然满足 $\mathrm{Lip}\alpha(s)$. 由于 $L^k(f_1\varphi)\in \mathrm{Lip}\alpha(S\times S)$，因此，由文[1]定理 1, 5, 2 知其右边第二项亦满足 $\mathrm{Lip}\alpha(S)$. 引理证毕.

3 高阶奇异积分的有限合成公式

定理 3.1 设 $\varphi\in C^{3+\alpha}(S)$，则

$$\omega^{-2}\int_s\xi_1(1-v\bar{\xi})^{-n-1}\xi\int_s u_1\varphi(u)(1-\xi\bar{u})^{-n-1}u$$

$$=\frac{2-v_1}{2n}\frac{\partial}{\partial v_1}\frac{1}{\omega}\int_s\xi_1\varphi(\xi)(1-v\bar{\xi})^{-n-1}\xi-\frac{1}{2n\omega}\int_s\xi_1L(\bar{\xi}_1\varphi(\xi))(1-v\bar{\xi})^{-n-1}s$$

$$+\frac{1}{2n^2}L^2(\bar{v}_1^2\varphi(v))-\frac{1}{4n^2}L(\bar{v}_1L(\bar{v}_1\varphi(v)))-\frac{1}{4n^2}L^2(\bar{v}_1\varphi(v)),\ \xi,v\in s. \qquad (2)$$

其中上述各层积分均为有限部分 $F\cdot P$ 意义下的主值.

证 记 $\varphi_1(v)=\frac{1}{\omega}\int_s\xi_1\varphi(s)(1-v\bar{\xi}_1)^{-n-1}\xi$，$\varphi_2(v)=\frac{1}{\omega}\int_s\xi_1\varphi(\xi)(1-v\bar{\xi}_1)^{-n-1)}\xi$，我们作

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www

高阶Cauchy 型积分

$$f(z)=\frac{1}{\omega}\int\bar{\xi}_1\varphi(\xi)(1-z\bar{\xi})^{-n-1}d\xi=\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{\omega}\int\varphi(\xi)(1-z\bar{\xi})^{-n}d\xi\right),z\in B(0,1)$$

$$f_1(z)=\frac{1}{\omega}\int\bar{\xi}_1\varphi(\xi)(1-z\bar{\xi})^{-n-1}d\xi=\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{\omega}\int\varphi(\xi)(1-z\bar{\xi})^{-n}d\xi\right),z\in B(0,1).$$

若 z 满足 $d(z,v)/d(z,s)\le M$, $M>0$ 常数, 且 $z\to v\in s$, 应用(1), 我们有

$$f(v)=\frac{1}{\omega}\int\bar{\xi}_1\varphi(\xi)(1-v\bar{\xi})^{-n-1}d\xi+\frac{1}{2n}L(\bar{v}_1\varphi(v)),$$

$$\varphi(v)=f(v)-\frac{1}{2n}L(\bar{v}_1\varphi(v)).$$

以 $\varphi(v)$ 代入 $f_1(z)$ 的表达式, 得

$$f_1(z)=\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{1}{\omega}\int f(\xi)(1-z\bar{\xi})^{-n}d\xi-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{1}{\omega}\int L(\bar{\xi}_1\varphi(\xi))(1-z\bar{\xi})^{-n}d\xi,$$

$$f_1(v)=\lim_{z\to v}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial f(z)}{\partial z_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{\omega}\int L(\bar{\xi}_1\varphi(\xi))(1-z\bar{\xi})^{-n}d\xi\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial v_1}\int\bar{\xi}_1\varphi(1-v\bar{\xi})^{-n-1}d\xi+\frac{1}{2n^2}L^2(\bar{v}_1^2\varphi),$$

另一方面

$$f_1(v)=\varphi_2(v)+\frac{1}{2n}L(\bar{\xi}_1\varphi)\Big|_{s=v}=\varphi_2(v)+\frac{1}{2n}\left(v_1\frac{\partial}{\partial v_1}\frac{1}{\omega}\int\bar{\xi}_1\varphi(1-v\bar{\xi})^{-n-1}d\xi-\frac{1}{4n^2}L^2(\bar{v}_1\varphi)\right),$$

故

$$\varphi_{2v}=\frac{2-v_1}{2n\omega}\frac{\partial}{\partial v_1}\int\bar{\xi}_1\varphi(1-v\bar{\xi})^{-n-1}d\xi-\frac{1}{2n\omega}\int\bar{\xi}_1L(\bar{\xi}_1\varphi)(1-v\bar{\xi})^{-n-1}d\xi$$

$$+\frac{1}{2n^2}L^2(\bar{v}_1^2\varphi)-\frac{1}{4n^2}L(\bar{v}_1L(\bar{v}_1\varphi))+\frac{1}{4n^2}L^2(\bar{v}_1\varphi).$$

引理证毕.

4　一类高阶奇异积分方程的解

作为一个应用例子, 下面讨论一类高阶奇异积分方程. 由算子 K 的定义及定理3.1, 我们有

$$K^2\varphi=\frac{2-v_1}{2n}\frac{\partial}{\partial v_1}K\varphi-\frac{1}{2n}KL(\bar{\xi}_1\varphi)+L^*\varphi,\tag{3}$$

其中 $KL(\bar{\xi}\varphi)=\dfrac{1}{2n\omega}\displaystyle\int\bar{\xi}_1L(\bar{\xi}_1\varphi)(1-v\bar{\xi})^{-n-1}d\xi$, $L^*\varphi$

$$=\frac{1}{4n^2}\left[\frac{1}{\bar{v}_1}(2v_1-v_1\bar{v}_1v)\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}+3\bar{v}_1\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{v}_1}+2(v_1^2+\bar{v}_1^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{v}_1^2}-4v_1\bar{v}_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial v_1\partial\bar{v}_1}\right].$$

现在考虑方

$$\frac{1}{2n}L(\bar{\xi}_1\varphi)+K\varphi=f,\tag{4}$$

其中 $f\in c^{3+\alpha}(s)$ 是已给函数, φ 是待求函数, 并在 $C^{3+\alpha}(s)$ 中求解. 我们对(4) 双边作用 K, 并应用(3) 可得

$$\frac{2-v_1}{2n}\frac{\partial}{\partial v_1}K\varphi+L^*\varphi=Kf,\tag{5}$$

另一方面, 由(4), 我们有

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://ww

$$\frac{2-\overline{v}_1}{4n^2}\frac{\partial}{\partial\overline{v}_1}L(\overline{\xi}_1\varphi)+\frac{2-\overline{v}_1}{2n}\frac{\partial}{\partial\overline{v}_1}K\varphi=\frac{2-\overline{v}_1}{2n}\frac{\partial}{\partial\overline{v}_1}f \tag{6}$$

由(6) - (5)立得:

$$2(\overline{v}_1-v_1)\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}-3\overline{v}_1^2\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{v}_1}+(2\overline{v}_1-v_1\overline{v}_1-2v_1^2\overline{v}_1-2\overline{v}_1^3)\frac{\partial^2\varphi}{\partial v_1^2}+$$

$$(5v_1\overline{v}_1^2-2\overline{v}_1^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial v_1\partial\overline{v}_1}=f^*, \tag{7}$$

其中

$$f^*=4n^2\overline{v}_1\left(\frac{2-v_1}{2n}\frac{\partial f}{\partial v_1}-Kf\right). \tag{8}$$

我们把方程(7)化为下面等价的实方程组. 令 $\varphi=\varphi_1+i\varphi_2$, $f^*=f_1^*+if_2^*$, $x_j=x_j+iy_j$, $j=1,2,\cdots,n$, 则(7)化为

$$\sum_{\substack{j=1\\k_1+k_2=2}}^{2}A_{ij}^{(k_1,k_2)}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_1^{k_1}\partial y_1^{k_2}}+\sum_{j=1}^{2}\left(B_{i1}^j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1}+B_{i2}^j\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_1}\right)=f_i^*, i=1,2, \tag{9}$$

其中(9)的系数 $A_{i1}^{(2,0)}=\frac{1}{4}(2x_1-3x_1^2+y_1^2+x_1^3+9x_1y_1^2)$, $A_{11}^{(1,1)}=-y_1+y_1x_1^2-2y_1^3$, $A_{11}^{(0,2)}=\frac{1}{4}(-2x_1-x_1^2+y_1^2+9x_1^3+x_1y_1^2$, $\cdots$, $B_{11}^1=-\frac{3}{2}(x_1^2-y_1^2)$, $B_{12}^1=2y_1-\frac{3}{2}x_1y_1$, $B_{11}^2=2y_1-3x_1y_1$, $\cdots$. 因此, (9)是一具 x_1, y_1 的解析系数的线性二阶偏微分方程组, 根据著名的霍耳蒙格伦定理[3], 可知(9)的解存在, 且其 Cauchy 问题的解是唯一存在的. 因此方程(4)的解存在.

参 考 文 献

1 龚昇, 多复变数的奇异积分, 上海: 上海科技出版社. 1982.

2 Wang Xiaogin, Singuar integrals and analyticity theorems in several complex variables, Dissertation, Uppsala University Report 1990.

3 . . 彼得罗夫斯基著, 段虞荣译, 偏微分方程讲义, 北京: 人民教育出版社. 1965.

A HIGHER ORDER SINGULAR INTEGRAL EQUATION

Chen Guting(陈鹄汀) Lin Liangyu(林良裕) Qiu Chunhui(邱春晖)

(*Xiamen University, Xiamen* 361005)

Abstract

By means of the Plemelj formula of higher order singular integral on hypersphere in C^n space, the finite composite formula of higher order singular integral is obtained and the solution of a higher order singular ingegral equation is given.

Keywords higher order singular integral finite composite formula integral equation partial differential equation

MR 1991 Subject Classification 45E99

© 1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www