第 39 卷 第 1 期　　厦门大学学报(自然科学版)　　Vol. 39 No. 1

2000 年 1 月　　Journal of Xiamen University (Natural Science)　　Jan. 2000

文章编号: 0438-0479(2000) 01-0006-05

Stein 流形上凸区域的边界性质

邱 春 晖

(厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘要: 研究 C^n 空间和 Stein 流形上凸区域的边界性质. 利用局部化技巧和 C^n 空间中凸区域的 Cохоцкий-Plemelj 公式, 定义 Stein 流形上具有 Aizenberg 核的 Cauchy 型积分的奇异积分的 Cauchy 主值, 得到如下的 Stein 流形上凸区域的 Cохоцкий-Plemelj 公式

$$F^+(\eta) = \mathrm{V.P.}\int_{M_\xi} f(\xi)K(\eta,\xi) + \frac{1}{2}f(\eta), \eta\in M$$

$$A^-(\eta) = \mathrm{V.P.}\int_{M_\xi} \alpha(\xi)^T K(\eta,\xi) - \frac{1}{2}\alpha(\eta), \eta\in M$$

这里, $f(\xi)\in\mathscr{D}^0(M)$. $\alpha(\xi)\in\mathscr{D}^{n-1}(M)$, M 为凸区域的边界.

关键词: Stein 流形; 凸区域; Cохоцкий-Plemelj 公式; 局部化技巧

中图分类号: O 174.56　　文献标识码: A

关于多复变数积分表示的边界性质的研究, 陆启铿和钟同德[1], Кацнчцв[2] 研究了 Bochner-Martinelli 积分表示的边界性质, 得到了类似于单复变数的 Cохоцкий-Plemelj 公式. 随后, 许多专家研究了不同区域积分表示的边界性质, 得到了 Cохоцкий-Plemelj 公式[3~5]. 本文研究 C^n 空间和 Stein 流形上凸区域的边界性质, 得到了 Cохоцкий-Plemelj 公式.

1 凸区域的积分表示

为节省篇幅, 沿用文献[6～8] 中的记号. 设 X 为复 n 维 Stein 流形, $S(z,\xi)$、$\varphi(z,\xi)$ 和 K 如同文献[6] 中引理 4.2.4 所述.

设有界域 $\Omega\subset\subset X$, 并设 $D\subset\Omega$ 是 Stein 流形上具有 C^∞ 边界的强凸域, 更确切地说, $D=\{z\in\Omega: \rho(z)<0\}$, 其边界 $M=\{z\in\Omega: \rho(z)=0\}$, 这里 $\rho\in C^\infty(\Omega)$, 并且 $d\rho(z)\neq 0$. 记 $\mathscr{D}^{p,q}(M)$ 为 M 上具有紧支集的 C^∞ 的 (p,q) 形式所组成的空间, 对 $z\in\Omega$, 定义

$$D^\pm = \{z\in\Omega: \pm\rho(z)<0\}.$$

对于凸区域 $D=D^+$, 有如下的积分表示公式:

引理 1　设函数 $f(z)$ 在 D 内全纯, 在 $\bar{D}$ 上连续, $\nu\geq\max(2nK, 0)$, 则

收稿日期: 1999-06-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19771068); 福建省自然科学基金资助项目(A 9810001)

作者简介: 邱春晖(1965-), 男, 副教授.

$$\int_{M_\xi} f(\xi) K(z,\xi) = \begin{cases} f(z), z \in D^+ \\ 0, z \in D^- \end{cases} \tag{1}$$

这里 $K(z,\xi) = \dfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \dfrac{\varphi(z,\xi) W'_\xi(\operatorname{grad}\rho(\xi)) \wedge W_\xi(S(z,\xi))}{\langle \operatorname{grad}\rho(\xi), S(z,\xi)\rangle^n}$ (2)

称为 Aizenberg 核,

$$W'_\xi(\upsilon) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \upsilon \bigwedge_{i\neq j} d_\xi \upsilon$$

$$W_\xi(S(z,\xi)) = d_\xi S_1(z,\xi) \wedge \cdots \wedge d_\xi S_n(z,\xi)$$

证　只要将 Leray 公式(文献[6] 定理 4.3.4) 中的向量值函数 $S^*(z,\xi)$ 取成 $\operatorname{grad}\rho(\xi)$ 即可.

当 $X = C^n$ 时, 令 $S(z,\xi) = \xi - z, \varphi(z,\xi) \equiv 1, K = 0$, 则有 C^n 空间中凸区域的积分表示[4]

$$\int_{M_\xi} f(\xi) k(z,\xi) = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases} \tag{3}$$

这里　$k(z,\xi) = \dfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \dfrac{W'_\xi(\operatorname{grad}\rho(\xi)) \wedge d(\xi - z)}{\langle \operatorname{grad}\rho(\xi), \xi - z\rangle^n}$ (4)

为 C^n 空间中的 Aizenberg 核.

2　Сохоцкий-Plemelj 公式

定义 1　设 $f(\xi) \in \mathscr{D}^{0,0}(M), \alpha(\xi) \in \mathscr{D}^{n,n-1}(M)$. 则定义具有 Aizenberg 核的 Cauchy 型积分为

$$F(z) = \int_{M_\xi} f(\xi) K(z,\xi), z \in \Omega \backslash M \tag{5}$$

$$A(z) = \int_{M_\xi} \alpha(\xi)\, {}^T K(z,\xi), z \in \Omega \backslash M \tag{6}$$

其中, Aizenberg 核

$${}^T K(z,\xi) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\varphi(z,\xi) W'_z(\operatorname{grad}\rho(z)) \wedge W_z(S(z,\xi))}{\langle \operatorname{grad}\rho(z), S(z,\xi)\rangle^n} \tag{7}$$

积分(5) 和(6) 在 M 上是奇异积分. 当 $X = C^n$ 时, 利用文献[7] 推论 8.41, 有 C^n 空间中凸区域的 Сохоцкий-Plemelj 公式:

定理 1　设 $f(\xi) \in \mathscr{D}^{0,0}(M), \alpha(\xi) \in \mathscr{D}^{n,n-1}(M)$, 则对 $\forall\, \eta \in M$, 有 Сохоцкий-Plemelj 公式

$$F^+(\eta) = \text{V.P.} \int_{M_\xi} f(\xi) k(\eta,\xi) + \frac{1}{2} f(\eta) \tag{8}$$

$$A^-(\eta) = \text{V.P.} \int_{M_\xi} \alpha(\xi)\, {}^T k(\eta,\xi) - \frac{1}{2}\alpha(\eta) \tag{9}$$

成立. 这里, $F^+(\eta)$ 和 $A^-(\eta)$ 分别表示 $F(z)$ 和 $A(z)$ 当 z 分别从 D^+ 和 D^- 沿着非切线方向趋于 $\eta \in \partial D$ 时的极限值, 奇异积分的 Cauchy 主值分别定义为

$$\text{V.P.} \int_{M_\xi} f(\xi) k(\eta,\xi) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|\langle \operatorname{grad}\rho(\xi), \xi - \eta\rangle| \geq \epsilon} f(\xi) k(\eta,\xi), \eta \in M$$

$$\text{V.P.} \int_{M_\xi} \alpha(\xi)\, {}^T k(\eta,\xi) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|\langle \operatorname{grad}\rho(\eta), \xi - \eta\rangle| \geq \epsilon} \alpha(\xi)\, {}^T k(\eta,\xi), \eta \in M$$

利用局部化技巧[8] 和定理 1, 有如下的 Stein 流形上凸区域的 Сохоцкий-Plemelj 公式:

定理 2 设 $f(\xi)\in\mathscr{D}^{0,0}(M)$, $\alpha(\xi)\in\mathscr{D}^{n,n-1}(M)$, $\nu\geq\max(2nK,0)$, 则对 $\forall\eta\in M$. 有 Сохоцкий–Plemelj 公式

$$F^{+}(\eta)=\mathrm{V.P.}\int_{M_\xi}f(\xi)K(\eta,\xi)+\frac{1}{2}f(\eta) \tag{10}$$

$$A^{-}(\eta)=\mathrm{V.P.}\int_{M_\xi}\alpha(\xi)^{T}K(\eta,\xi)-\frac{1}{2}\alpha(\eta) \tag{11}$$

成立. 这里, Cauchy 主值 $\mathrm{V.P.}\int_{M_\xi}f(\xi)K(\eta,\xi)$ 定义在下面的式(20). Canchy 主值 $\mathrm{V.P.}\int_{M_\xi}\alpha(\xi)^{T}K(\eta,\xi)$ 类似可定义.

证 由有限覆盖定理, 设 $\{U_j\}_{j=1}^{m}$ 是 U_D 的局部有限覆盖, 而且就是坐标邻域. 将 $\eta\in M$ 固定时, 由 $S(\cdot,\cdot)$ 的双全纯性, 取 $\delta>0$, 使得 $W_\eta=S(\eta,\cdot)$ 将 η 的某一邻域(不妨设为 U_j) 双全纯地映射到 C^n 中球 $B_\delta=\{\xi^*\in C^n:|\xi^*|<\delta\}$, 且 $\eta=W_\eta^{-1}(0)$. 记 $H_j=W_\eta(U_j\cap M)$ 为 B_δ 中通过零点的超曲面, $z=W_\eta^{-1}(z^*)$, $\xi=W_\eta^{-1}(\xi^*)$,

$$\varphi(z,\xi)=\varphi(W_\eta^{-1}(z^*),W_\eta^{-1}(\xi^*))\triangleq:\hat{\varphi}(z^*,\xi^*),$$

$$f(\xi)=f(W_\eta^{-1}(\xi^*))\triangleq:\hat{f}(\xi^*),\ \rho(\xi)=\rho(W_\eta^{-1}(\xi^*))\triangleq:\hat{\rho}(\xi^*)$$

$$S(z,\xi)=S(W_\eta^{-1}(z^*),W_\eta^{-1}(\xi^*))\triangleq:\hat{S}(z^*,\xi^*).$$

设 $\hat{S}(z^*,\xi^*)$ 的局部坐标为 $u(z^*,\xi^*)$, 则 $u(z^*,\xi^*)$ 和 $\hat{\varphi}(z^*,\xi^*)$ 是 $B_\delta\times B_\delta$ 上的全纯函数, 又 $u(z^*,z^*)=0$, 由 Hefer 定理得

$$u_j(z^*,\xi^*)=\sum_{l=1}^{n}r_{jl}(z^*,\xi^*)(\xi_l^*-z_l^*) \tag{12}$$

这里, $r_{jl}(z^*,\xi^*)$ 关于 z^*,ξ^* 全纯.

又 $u(0,\xi^*)=\hat{S}(0,\xi^*)=S(\eta,W_\eta^{-1}(\xi^*))=W_\eta(W_\eta^{-1}(\xi^*))=\xi^*$, (这里 $S(\eta,\cdot)=W_\eta$) 我们有

$$r_{jk}(0,\xi^*)=\delta_{jk}=\begin{cases}1, 当\ j=k\ 时\\ 0, 当\ j\neq k\ 时\end{cases} \tag{13}$$

当 (z^*,ξ^*) 在 $(0,0)$ 的充分小的邻域(不失一般性, 可设此邻域就是 $B_\delta\times B_\delta$) 时, 有

$\det\Gamma\neq 0$,

其中 $\Gamma=(r_{jl}(z^*,\xi^*))_{1\leq j,l\leq n}$.

由式(12) 可得

$$W_\xi(S(z,\xi))=\det\Gamma\cdot d\xi^*+T(z^*,\xi^*) \tag{14}$$

其中, $T(z^*,\xi^*)$ 含有 dr_{jl}, 且

$$|T(z^*,\xi^*)|\leq C|\xi^*-z^*|,\ C\ 为常数. \tag{15}$$

将式(14) 代入式(2), 则 Aizenberg 核可写成

$$\hat{K}(^*,\xi^*)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\hat{\varphi}(z^*,\xi^*)\frac{\det\Gamma\cdot W'_{\xi^*}(\mathrm{grad}\hat{\rho}(\xi^*))\wedge d\xi^*}{\langle\mathrm{grad}\hat{\rho}(\xi^*),u(z^*,\xi^*)\rangle^n}+$$

$$\hat{\varphi}(z^*,\xi^*)A(z^*,\xi^*)\triangleq:\hat{\varphi}(z^*,\xi^*)B(z^*,\xi^*)+\hat{\varphi}(z^*,\xi^*)A(z^*,\xi^*) \tag{16}$$

这里, 外微分形式 $B(z^*,\xi^*)$ 不包含 dr_{jl} 的项, 而 $A(z^*,\xi^*)$ 则包含 dr_{jl} 的项, 因此

$$|A(z^*,\xi^*)|=O(|\xi^*-z^*|^{1-n}).$$

记 $\mathrm{grad}\hat{\rho}(\xi^*)=(\hat{\rho}'_1(\xi^*),\cdots,\hat{\rho}'_n(\xi^*))$, 则由式(12) 得

$$\langle \operatorname{grad}\hat{\rho}(\xi^*), u(z^*,\xi^*)\rangle = \sum_{j=1}^{n}\hat{\rho}_j'(\xi^*)u_j(z^*,\xi^*) =$$
$$\sum_{j=1}^{n}\hat{\rho}_j'(\xi^*)\sum_{l=1}^{n}r_{jl}(z^*,\xi^*)(\xi_l^*-z_l^*) = \sum_{l=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{n}\hat{\rho}_j'(\xi^*)r_{jl}(z^*,\xi^*)\Big](\xi_l^*-z_l^*).$$

记 $v_l(z^*,\xi^*) = \sum_{j=1}^{n}\hat{\rho}_j'(\xi^*)r_{jl}(z^*,\xi^*)$, $(l=1,\cdots,n)$, $v(z^*,\xi^*) = (v_1(z^*,\xi^*),\cdots,v_n(z^*,\xi^*))$, 则由式(13) 知, 当 $z^*\to 0$ 时, $v_l(0,\xi^*) = \sum_{j=1}^{n}\hat{\rho}_j'(\xi^*)r_{jl}(0,\xi^*) = \sum_{j=1}^{n}\hat{\rho}_j'(\xi^*)\delta_{jl} = \hat{\rho}_l'(\xi^*)$, $v(0,\xi^*) = \operatorname{grad}\hat{\rho}(\xi^*)$, 即

$$\langle \operatorname{grad}\hat{\rho}(\xi^*), u(z^*,\xi^*)\rangle = \langle v(z^*,\xi^*), \xi^*-z^*\rangle.$$

由于 $\det\Gamma = \det\Gamma^t$ (Γ^t 表示 Γ 的转置). 因此, 由 $r_{jl}(z^*,\xi^*)$ 关于 z^*,ξ^* 全纯, 有

$$B(z^*,\xi^*) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\det\Gamma\cdot W_{\xi^*}'(\operatorname{grad}\hat{\rho}(\xi^*))\wedge d\xi^*}{\langle \operatorname{grad}\rho(\xi^*), u(z^*,\xi^*)\rangle^n} =$$
$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{W_{\xi^*}'(v(\xi^*,\xi^*))\wedge d\xi^*}{\langle v(z^*,\xi^*),\xi^*-z^*\rangle^n}$$

当 $z^*\to 0$ 时

$$B(0,\xi^*) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{W_{\xi^*}'(v(0,\xi^*))\wedge d\xi^*}{\langle v(0,\xi^*),\xi^*-0\rangle^n} =$$
$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{W_{\xi^*}'(\operatorname{grad}\hat{\rho}(\xi^*))\wedge d\xi^*}{\langle \operatorname{grad}\hat{\rho}(\xi^*),\xi^*-0\rangle^n} = k(0,\xi^*) \tag{17}$$

由于 $|\hat{\varphi}(z^*,\xi^*)-1| = |\hat{\varphi}(z^*,\xi^*)-\hat{\varphi}(z^*,z^*)| = 0(|\xi^*-z^*|)$, 则

$$F^+(z) = \int_{M_\xi} f(\xi)K(z,\xi) = \sum_{j=1}^{m}\int_{\xi^*\in H_j}\hat{f}(\xi^*)\hat{\varphi}(z^*,\xi^*)A(z^*,\xi^*) +$$
$$\sum_{j=1}^{m}\int_{\xi^*\in H_j}\hat{f}(\xi^*)(\hat{\varphi}(z^*,\xi^*)-1)B(z^*,\xi^*) + \sum_{j=1}^{m}\int_{\xi^*\in H_j}\hat{f}(\xi^*)B(z^*,\xi^*) \tag{18}$$

由于 $\bigcup_{j=1}^{m}H_j = W_\eta(M)$ 是 n 维的, 因此式(18) 右端前两项的积分是正常的, 而由式(17) 可知, 第 3 项积分当 $z^*\to 0$ 时正是 C^n 空间中凸区域积分表示的 Cauchy 型积分, 由定理 1 有

$$\lim_{z^*\to 0}\int_{\xi^*\in W_\eta(M)}\hat{f}(\xi^*)B(z^*,\xi^*) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\substack{\xi^*\in W_\eta(M)\\ |\langle \operatorname{grad}\hat{\rho}(\xi^*),\xi^*-0\rangle|\ge\epsilon}}\hat{f}(\xi^*)k(0,\xi^*) + \frac{1}{2}\hat{f}(0)$$

因此, 当 $D\in z\to\eta\in M$ 时, 即 $z^*\to 0$ 时, 有

$$F^+(\eta) = \int_{\xi^*\in W_\eta(M)}\hat{f}(\xi^*)\hat{\varphi}(0,\xi^*)A(0,\xi^*) +$$
$$\int_{\xi^*\in W_\eta(M)}\hat{f}(\xi^*)(\hat{\varphi}(0,\xi^*)-1)B(0,\xi^*) +$$
$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\substack{\xi^*\in W_\eta(M)\\ |\langle \operatorname{grad}\hat{\rho}(\xi^*),\xi^*-0\rangle|\ge\epsilon}}\hat{f}(\xi^*)k(0,\xi^*) + \frac{1}{2}\hat{f}(0) \tag{19}$$

若令 $\mathrm{V.P.}\int_{M_\xi} f(\xi)K(\eta,\xi) = \int_{\xi^*\in W_\eta(M)}\hat{f}(\xi^*)\hat{\varphi}(0,\xi^*)A(0,\xi^*) +$

$$\int_{\xi^*\in W_\eta(M)}\hat{f}(\xi^*)(\hat{\varphi}(0,\xi^*)-1)B(0,\xi^*) + \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\substack{\xi^*\in W_\eta(M)\\ |\langle \operatorname{grad}\hat{\rho}(\xi^*),\xi^*-0\rangle|\ge\epsilon}}\hat{f}(\xi^*)k(0,\xi^*) \tag{20}$$

则由于 $\hat{f}(0) = f(\eta)$, 可得 Сохоцкий-Plemelj 公式(10). 类似可证公式(11).

应用 Coxoцкий-Plemelj, 可讨论 Stein 流形上凸区域的合成公式和奇异积分方程, 这将另文研究.

参考文献:

[1] 陆启铿, 钟同德. Привалов 定理的拓广[J]. 数学学报, 1957, 7: 144- 165.

[2] Какичев В. А. Характер непрерывности граничных значений интеграла мартинелли-бохнера[J]. Учен. Зап. Моc. Обл. Пеб. ин-ма, 1960, 96: 145- 150.

[3] 钟同德. 多复变函数的积分表示与多维奇异积分方程[M]. 厦门: 厦门大学出版社, 1986.

[4] 钟同德, 黄沙. 多元复分析[M]. 石家庄: 河北教育出版社, 1990.

[5] 龚升. 多复变数的奇异积分[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1982.

[6] Henkin G. M., Leiterer J. Theory of functions on complex manifolds[M]. Berlin: Akademic-Verlag Berlin and Birkhäuser-Verlag Boston, 1984.

[7] Harvey R., Polking J. Fundamental solutions in complex analysis[J]. Duke Mathematical Journal, 1979, 46(2): 253- 341.

[8] Zhong Tongde. Holomorphic extension on Stein manifolds[R]. Research Report NO. 10, Mittag-Leffler Institute, 1987.

The Boundary Behaviour on a Convex Domain in a Stein Manifold

QIU Chun-hui

(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract: The boundary behaviour on a convex domain in C^n and a Stein manifold is studied. By using the technique of localization and the Coxoцкий-Plemelj formula on a convex domain in C^n, Cauchy principal values of singular integrals of Cauchy type integrals with Aizerberg kernel in a Stein manifold are defined and the Coxoцкий-Plemelj formula on a convex domain in a Stein manifold is obtained as follows:

$$F^{+}(\eta) = \mathrm{V.P.}\int_{M_\xi} f(\xi) K(\eta, \xi) + \frac{1}{2} f(\eta), \eta \in M,$$

$$A^{-}(\eta) = \mathrm{V.P.}\int_{M_\xi} \alpha(\xi)^{T} K(\eta, \xi) - \frac{1}{2}\alpha(\eta), \eta \in M,$$

where, $f(\xi) \in \mathscr{D}^{0,0}(M)$, $\alpha(\xi) \in \mathscr{D}^{n,n-1}(M)$, M is the boundary of the convex domain.

Key words: Stein manifold; convex domain; Coxoцкий-plemelj formula; technique of localization