总32卷 第2期
1999年6月
数 学 研 究
Journal of Mathematical Study
Vol. 32 No. 2
June 1999

拓广的 $B-M$ 型积分的边界性质①

姜 永
(福建农业大学基础部, 福州 350002)
邱春晖
(厦门大学数学系, 厦门 361005)

摘 要 研究 C^n 中有界域上拓广的 $B-M$ 型积分的边界性质, 得到了 Сохочкий-Plemelj 公式及边界值的连续性.

关键词 拓广的 $B-M$ 核, Cauchy 主值, Сохочкий-Plemelj 公式

关于多复变数积分表示的边界性质的研究, 最早是陆启铿和钟同德[1], B. A. Какичев[2], 他们研究了 Bochner-Martinelli 型(以下简称为 $B-M$ 型) 积分的边界性质, 得到了类似于单复变数的 Сохоцкий-Plemelj 公式. 最近, 许多作者研究了不同区域的积分表示的边界性质[3~5]. 本文的主要目的是研究 C^n 中有界域上拓广的 $B-M$ 型积分的边界性质, 首先定义奇异积分的 Cauchy 主值, 然后证明满足 Hölder 条件的被积函数所确定的奇异积分存在着 Cauchy 主值, 并得到了 Сохоцкий-Plemelj 公式及边界值的连续性.

1 拓广的 $B-M$ 型积分表示

姚宗元[6]得到了如下的拓广的 $B-M$ 型积分表示:

引理 设 D 是 C^n 中的有界域, 具有逐块光滑边界 ∂D, 如果函数 $f(z) \in Ac(D)$ (即 $f(z)$ 在 D 内全纯, 在 $\bar{D}$ 上连续), 则下面拓广的 $B-M$ 公式成立:

$$\int_{\partial D_\zeta} f(\zeta) K(\zeta, z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0 & z \bar{\in} \bar{D} \end{cases} \tag{1}$$

其中

$$K(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n} |\zeta_k - z_k|^{m-2} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k) d\bar{\zeta}_{[k]} \wedge d\zeta}{\left[\sum_{k=1}^{n} |\zeta_k - z_k|^m\right]^n} \tag{2}$$

称为拓广的 $B-M$ 核, 这里 $m = 2, 3, \cdots, N (N < +\infty)$, 积分核的奇性为

$$mn - [(m-2)n + 1] = 2n - 1,$$

特别当 $m = 2$ 时, $K(\zeta, z)$ 即为通常的 $B-M$ 核

① 本文于1998-09-02收到; 国家和福建省自然科学基金资助项目

$$W(\zeta-z,\overline{\zeta}-\overline{z})=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\overline{\zeta}_k-\overline{z}_k)\,d\overline{\zeta}[k]\wedge d\zeta}{|\zeta-z|^{2n}} \tag{3}$$

此时, 式(1)即为 $B-M$ 积分公式.

这里值得注意的是式(1), 当 $m>2$ 时, 比起 $m=2$ 时的 $B-M$ 公式, 它使 $f(\zeta)$ 在边界上的要求可减轻, 因当 $m>2$ 时, 式(1) 的核 $K(\zeta,z)$ 中含有因子 $\prod_{k=1}^{n}|\zeta_k-z_k|^{m-2}$, 从而对某些 k, $k=1,2,\cdots,n$, $\zeta_k=z_k$ 时, $\prod_{k=1}^{n}|\zeta_k-z_k|^{m-2}=0$, 这时积分为零, 所以除了 $\zeta_1\neq z_1,\cdots,\zeta_n\neq z_n$, 即$(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)$ 的每一坐标都不等于内点$(z_1,\cdots,z_n)$ 的任一个坐标的那些边界点外, 在边界的其它部分, $f(\zeta)$ 可不要求连续, 只要求定义即可, 甚至本来没有意义, 只要我们对它补充定义也可以, 而这一点是与 $B-M$ 公式不同的. 为了节省篇幅, 我们沿用文[3～6] 的记号.

2　Сохоцкий-Plemelj 公式

定义1　若函数 $f(\zeta)$ 在 ∂D 上连续, 则

$$F(z)=\int_{\partial D_\zeta}f(\zeta)K(\zeta,z),\ z\in C^n\setminus\partial D \tag{4}$$

称为拓广的 $B-M$ 型积分.

定义2　当点 $\eta\in\partial D$ 时, $f(\zeta)$ 是定义在 ∂D 上的函数, 则积分

$$F(\eta)=\int_{\partial D_\zeta}f(\zeta)K(\zeta,\eta) \tag{5}$$

称为 ∂D 上的奇异积分.

定义3　以 $\Omega_\epsilon^{(m)}(\eta)$ 表示以 η 为中心, ϵ 为半径的完全圆型域, 即

$$\Omega_\epsilon^{(m)}(\eta)=\left\{\zeta\in C^n:\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k-z_k|^m<\epsilon^m\right\}.$$

若极限

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{\partial D_\zeta-\partial D_\zeta\cap\Omega_\epsilon^{(m)}(\eta)}f(\zeta)K(\zeta,\eta) \tag{6}$$

存在, 则称这极限为奇异积分(5)的 Cauchy 主值, 通常以 V.P. $\int_{\partial D_\zeta}f(\zeta)K(\zeta,\eta)$ 表之.

定理1　设 D 是 C^n 中具有逐块光滑边界 ∂D 的有界域, 若函数 $f(\zeta)$ 在 ∂D 上连续且 $f\in H(\alpha,\partial D)$, $0<\alpha<1$, $m\geq2$, 则如下的 Сохоцкий-Plemelj 公式

$$F_i(\eta)=\mathrm{V.P.}\int_{\partial D}f(\zeta)K(\zeta,\eta)+\frac{2^{n-1}}{m^n}f(\eta),\ \eta\in\partial D \tag{7}$$

$$F_e(\eta)=\mathrm{V.P.}\int_{\partial D}f(\zeta)K(\zeta,\eta)-\frac{2^{n-1}}{m^n}f(\eta),\ \eta\in\partial D \tag{8}$$

成立. 这里 $F_i(\eta)$ 和 $F_e(\eta)$ 分别表示 $F(z)$ 当 z 分别从 $D^+=D$ 和 $D^-=C^n\setminus\overline{D}$ 趋于 $\eta\in\partial D$ 时的极限值.

由式(7) 和(8) 即得 Plemelj 跳跃公式

$$F_i(\eta)-F_e(\eta)=\left(\frac{2}{m}\right)^nf(\eta),\ \eta\in\partial D. \tag{9}$$

证明　当 $m=2$ 时, $K(\zeta,\eta)$ 即为通常的 $B-M$ 核 $W(\zeta-\eta,\overline{\zeta-\eta})$, 由文[1] 有

$$F_i(\eta)=\text{V.P.}\int_{\partial D}f(\zeta)W(\zeta-\eta,\overline{\zeta-\eta})+\frac{1}{2}f(\eta),\eta\in\partial D \tag{10}$$

$$F_e(\eta)=\text{V.P.}\int_{\partial D}f(\zeta)W(\zeta-\eta,\overline{\zeta-\eta})-\frac{1}{2}f(\eta),\eta\in\partial D \tag{11}$$

即式(7)、(8)成立.

当 $m>2$时, 拓广的 $B-M$ 核为

$$K(\zeta,\eta)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\cdot\left(\frac{m}{2}\right)^{n-1}\frac{\prod_{k=1}^{n}|\zeta_k-\eta_k|^{m-2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\overline{\zeta_k}-\overline{\eta_k})\,d\overline{\zeta_{[k]}}\wedge d\zeta}{\left[\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k-\eta_k|^m\right]^n}$$

$$=\left(\frac{2}{m}\right)^n\cdot\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\overline{\zeta_k}-\overline{\eta_k}\right)^{\frac{m}{2}}d_{\overline{\zeta}}\left(\overline{\zeta-\eta}\right)^{\frac{m}{2}}_{[k]}\wedge d_{\zeta}(\zeta-\eta)^{\frac{m}{2}}}{\left[\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k-\eta_k|^m\right]^n}$$

对于给定的 $\eta\in\partial D$, 只需作变换

$$(\xi-\eta)^{\frac{m}{2}}=\zeta^* \tag{12}$$

它把点 $\zeta=\eta$ 变为 $\zeta=0$, 把 z 变为 z^*, D 变为 D^*, ∂D 变为 ∂D^*, $0\in\partial D^*$, 把完全圆型域 $\Omega_\epsilon^{(m)}(\eta)$ 变为超球 $S_\epsilon(0)=\{\zeta^*\in C^n:|\zeta^*|<\epsilon\}$, 则

$$(\zeta-\eta)^{\frac{m}{2}}=\zeta^*$$

$$d_\zeta(\zeta-\eta)^{\frac{m}{2}}=d\zeta^*$$

$$d_{\overline{\zeta}}(\overline{\zeta-\eta})^{\frac{m}{2}}_{[k]}=d\overline{\zeta^*_{[k]}}$$

$$K(\zeta,\eta)=\left(\frac{2}{m}\right)^nW(\zeta^*-0,\overline{\zeta^*-0}) \tag{13}$$

记 $\hat{f}(\zeta^*)=f(z)$, 则

$$F_i(\eta)=\lim_{z\to\eta}\int_{\partial D}f(\zeta)K(\zeta,z)$$

$$=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{\partial D-\partial D\cap\Omega_\epsilon^{(m)}(\eta)}f(\zeta)K(\zeta,\eta)+\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{\partial D\cap\Omega_\epsilon^{(m)}(\eta)}f(\zeta)K(\zeta,\eta)\triangleq:I_1+I_2$$

由变换(12)及式(13)和文[1], 有

$$I_1=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{\partial D^*-\partial D^*\cap S_\epsilon(0)}\hat{f}(\zeta^*)\left(\frac{2}{m}\right)^nW(\zeta^*-0,\overline{\zeta^*-0})$$

$$=\text{V.P.}\left(\frac{2}{m}\right)^n\int_{\partial D^*}\hat{f}(\zeta^*)W(\zeta^*-0,\overline{\zeta^*-0})$$

即

$$\text{V.P.}\int_{\partial D}f(\zeta)K(\zeta,\eta)=I_1=\text{V.P.}\left(\frac{2}{m}\right)^n\int_{\partial D^*}\hat{f}(\zeta^*)W(\zeta^*-0,\overline{\zeta^*-0}).$$

$$I_2=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{\partial D^*\cap S_\epsilon(0)}\hat{f}(\zeta^*)\left(\frac{2}{m}\right)^nW(\zeta^*-0,\overline{\zeta^*-0})$$

$$= \left(\frac{2}{m}\right)^n \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{D^*\cap S_\epsilon(0)} \hat{f}(\zeta) W(\zeta - 0, \zeta - 0) = \left(\frac{2}{m}\right)^n \cdot \frac{1}{2}\hat{f}(0) = \frac{2^{n-1}}{m^n} f(\eta)$$

这就证明了式(7). 类似可证式(8)成立. □

利用通常的 $B-M$ 积分表示的边界值的连续性[1], 有

定理 2　若函数 $f(\zeta) \in H(\alpha, \partial D), 0 < \alpha < 1$, 则 $F_i(\eta), F_e(\eta) \in H(\alpha, \partial D), \eta \in \partial D$, 并且若 $\partial D \in C^{(k)}(1 \leq k < +\infty), f \in C^{(r)}, 0 \leq r \leq k$, 则 $F(z) \in C^{(r)}, z \in C^n$.

定理 3　若函数 $f(z) \in A_c(D)$, 则

$$F_i(\eta) = \left(\frac{2}{m}\right)^n f(\eta), \quad \eta \in \partial D.$$

证明　考察 Cauchy 型积分(4), 由于 $f(z) \in A_c(D)$, 由引理可知

$$F(z) = 0, \qquad z \in D^-$$

因此

$$F_e(\eta) = 0, \qquad \eta \in \partial D \tag{14}$$

由式(14)及 Plemelj 跳跃公式(9)即得

$$F_i(\eta) = \left(\frac{2}{m}\right)^n f(\eta), \qquad \eta \in \partial D.$$ □

参　考　文　献

1　陆启铿, 钟同德. Привалов 定理的拓广. 数学学报, 1957, 7: 144～165

2　Какичев В. А. Характер непрерывности граничных значений интеграла мартинелли-дохнера, Учен. Зап. Мос. Одл Пед. ин-ма, 1960, 96: 145～150

3　钟同德. 多复变函数的积分表示与多维奇异积分方程. 厦门: 厦门大学出版社, 1986

4　钟同德, 黄沙. 多元复分析. 石家庄: 河北教育出版社, 1990

5　龚升. 多复变数的奇异积分. 上海: 上海科学技术出版社, 1982

6　姚宗元. 关于 C^n 空间中有界域上的积分表示. 厦门大学学报(自然科学版), 1986, 3: 260～269

The Boundary Behaviour of the Extensional Bochner-Martinelli Type Integral

Jiang Yong　(Dept. of Fundamental Subjects, FAU, Fuzhou 350002)

Qiu Chunhui　(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005)

Abstract　In this paper, the boundary behaviour of the extensional Bochner-Martinelli type integral on a bounded domain in C^n is studied. The Сохоцкий-Plemelj formula and continuous character of boundary value are obtained.

Key words　the extensional Bochner-Martinelli kernel, Cauchy principal value, Сохоцкий-Plemelj formula