第 38 卷　第 4 期　　厦门大学学报(自然科学版)　　Vol. 38　No. 4
1999 年 7 月　　Journal of Xiamen University (Natural Science)　　Jul. 1999

具有非光滑边界的强拟凸多面体上的 Koppelman-Leray-Norguet 公式①

邱春晖
(厦门大学数学系　厦门　361005)

褚仁华
(中国人民解放军 38672 部队 32　蚌埠　233012)

摘要　得到了 C^n 空间中具有非光滑边界的强拟凸多面体上 $(0, q)$ 微分形式的 Koppelman-Leray-Norguet 公式及其 $\bar{\partial}$-方程的连续解, 其特点是不含有边界积分, 从而避免了边界积分的复杂估计.

关键词　强拟凸多面体, 非光滑边界, Koppelman-Leray-Norguet 公式, $\bar{\partial}$-方程
中国图书分类号　O 174.56

Range & Siu[1] 得到了 C^n 空间中具有逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界的强拟凸域上 $(0,q)$ 型 Koppelman-Leray-Norguet 公式及其 $\bar{\partial}$-方程的解, 并对解的一致估计做了研究. 对于一般的具有逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界的强拟凸多面体, Henkin & Chirka[2] 给出了 Koppelman-Leray-Norguet 公式及其 $\bar{\partial}$-方程的解. 本文的目的是将文献[2] 中的 Koppelman-Leray-Norguet 公式推广到 C^n 空间中边界不必光滑的强拟凸多面体上, 并得到了 $\bar{\partial}$-方程的解, 其特点是通过构造新的积分核, 以体积积分代替边界积分, 不含有边界积分, 从而避免了边界积分的复杂估计.

为简单起见, 我们采用文献[1～3] 的记号.

设 D 是 C^n 空间中的强拟凸多面体, 即存在 $\bar{D}$ 的一个邻域, 有限多个开集 $M_1, \cdots, M_N$, 全纯映射 $F_k: U_D \to M_k, k = 1, \cdots, N$, 以及强拟凸开集 $D_k \subset M_k, k = 1, \cdots, N$, 使得

$$D = F_1^{-1}(D_1) \cap \cdots \cap F_n^{-1}(D_N)$$

如果 $\rho_1, \cdots, \rho_N$ 分别是 $\partial D_1, \cdots, \partial D_N$ 的某一领域 $\theta_1, \cdots, \theta_N$ 中的强多次调和 $C^{(2)}$ 函数, 使得

$$D_k \cap \theta_k = \{z \in \theta_k: \rho_k(z) < 0\}, \ k = 1, \cdots, N$$

那么 $\partial D \subseteq F_1^{-1}(\theta_1) \cup \cdots \cup F_N^{-1}(\theta_N)$, 并且点 $z \in F_1^{-1}(\theta_1) \cup \cdots \cup F_N^{-1}(\theta_N)$ 属于 D, 当且仅当对每一 $1 \leq k \leq N$ 有 $z \in F_k^{-1}(\theta_k)$, $\rho_k(F_k(\theta_k)) < 0$.

记 $N(\rho_k) = \{z \in \bar{\theta}_k: \rho_k(z) = 0\}, k = 1, \cdots, N$, 并假设 $N(\rho_k) \subset\subset \theta_k, k = 1, \cdots, N$, (我们不必假设 D 是实非退化的), 收缩 θ_k 后, 可找到 $\epsilon > 0, \alpha > 0$ 及定义在 $z \in D_k \cup \theta_k, \xi \in \theta_k$ 的 $C^{(1)}$ 函数 $\Phi_k(z, \xi)$ 和 $\tilde{\Phi}_k(z, \xi)$ 满足以下条件[3]:

---

① 本文 1998-10-10 收到;　国家自然科学基金资助项目(19771068) 及福建省自然科学基金资助项目(A9810001)

1) $\Phi_k(z,\xi)$ 和 $\tilde{\Phi}_k(z,\xi)$ 关于 $z \in D_k \cup \theta_k$ 全纯.

2) $\Phi_k(z,\xi) \neq 0, \tilde{\Phi}_k(z,\xi) \neq 0$, 当 $z \in D_k \cup \theta_k, \xi \in \theta_k$, 且 $|\xi - z| \geq \epsilon$ (1)

$\operatorname{Re}\Phi_k(z,\xi) \geq \alpha(\rho_k(\xi) - \rho_k(z) + |\xi - z|^2)$, 当 $z \in D_k \cup \theta_k, \xi \in \theta_k$, 且 $|\xi - z| \leq \epsilon$ (2)

$\operatorname{Re}\tilde{\Phi}_k(z,\xi) \geq \alpha(-\rho_k(\xi) - \rho_k(z) + |\xi - z|^2)$,

当 $z \in D_k \cup \theta_k, \xi \in \theta_k$, 且 $|\xi - z| \leq \epsilon$ (3)

$\Phi_k(z,z) = 0$, 对所有 $z \in \theta_k$ (4)

3) $\tilde{\Phi}_k(z,\xi) = \Phi_k(z,\xi)$, 当 $\xi \in N(\rho_k), z \in D_k \cup \theta_k$ 时 (5)

令　$\Psi_k(z,\xi) = \Phi_k(F_k(z), F_k(\xi)), \tilde{\Psi}_k(z,\xi) = \tilde{\Phi}_k(F_k(z), F_k(\xi))$, 当 $z \in F_k^{-1}(D_k \cup \theta_k), \xi \in F_k^{-1}(\theta_k)$ 时.

收缩 θ_k 后, 可找到一定义在 $z \in F_k^{-1}(D_k \cup \theta_k), \xi \in F_k^{-1}(\theta_k)$ 上的 $T^*(C^n)$ 值 $C^{(1)}$ 映射 $h_k^*(z,\xi)$ 满足下列条件[3]:

1) $h_k^*(z,\xi) \in T_z^*(C^n)$, 当 $z \in F_k^{-1}(D_k \cup \theta_k), \xi \in F_k^{-1}(\theta_k)$

2) $h_k^*(z,\xi)$ 关于 $z \in F_k^{-1}(D_k \cup \theta_k)$ 全纯

3) $\Psi_k(z,\xi) = \langle h_k^*(z,\xi), \xi - z\rangle$, 当 $z \in F_k^{-1}(D_k \cup \theta_k), \xi \in F_k^{-1}(\theta_k)$ 时 (6)

设 $S_k = \{z \in \partial D \cap \theta_k : \rho_k(F_k(z)) = 0\}, k = 1, \cdots, N$, 记 $P(N)$ 为对整数 $1 \leq k_1, \cdots, k_l \leq N$ 的所有有序集 $K = (k_1, \cdots, k_l)$ 的集合, $P'(N)$ 为对整数 $1 \leq k_1 < \cdots < k_l \leq N$ 的每一严格增加的所有有序集 $K = (k_1, \cdots, k_l)$ 的集合.

对 $K = (k_1, \cdots, k_l) \in P(N)$, 定义

$$S_K = \begin{cases} S_{k_1} \wedge \cdots \wedge S_{k_l} & \text{如果整数 } k_1, \cdots, k_l \text{ 是不同的} \\ \not\subset & \text{反之} \end{cases}$$

选择 S_K 上的定向, 使 $\partial D = \sum_{k=1}^{N} S_k$, $\partial S_K = \sum_{j=1}^{N} S_{Kj}$, 其中 ∂D 和 ∂S_K 分别具有由 D 和 S_K 诱导的定向, 又 $Kj = (k_1, \cdots, k_l, j)$, 则 S_K 的定向对 K 的分量是斜对称的.

记所有点 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_N) \in R^{N+1}$ 的子集为 Δ 使得当 $k = 0, 1, \cdots, N$ 时 $\lambda_k \geq 0$ 及 $\sum_{k=0}^{N} \lambda_k = 1$, 以形式 $d\lambda_1 \wedge \cdots \wedge d\lambda_N$ 定义 Δ 的定向. 对 $K = (k_1, \cdots, k_l) \in P'(N)$, 定义 $\Delta_K = \{\lambda \in \Delta : \sum_{r=1}^{l} \lambda_{k_r} = 1\}$ 并选择 Δ_K 的定向使得 $\partial\Delta_K = \sum_{r=1}^{l} (-1)^{r-1} \Delta_{k_1 \cdots \hat{k}_r \cdots k_l}$, 其中 $\hat{k}_r$ 表示省略 k_r.

由式(6) 有　$\langle h_k^*(z,\xi), \xi - z\rangle = \Phi_k(F_k(z), F_k(\xi))$, 当 $z \in D, \xi \in S_k$ 时

由式(1), $\Phi_k(F_k(z), F_k(\xi)) \neq 0$. 因此, $(h_1^*, \cdots, h_N^*, 1)$ 为 D 的 Leray-Norguet 截面, 当 ∂D 是实非退化时, 有如下的 Koppelman-Leray-Norguet 公式.

引理 1[2,4]　设 D 是 C^n 空间中实非退化的强拟凸多面体, $1 \leq q \leq n$, 则对于 $\bar{D}$ 上每一个连续有界的 $(0,q)$ 形式 f 并且 $\bar{\partial} f$ 在 $\bar{D}$ 上也连续有界, 有

$$(-1)^q f(z) = \bar{\partial}_z \Big[\sum_{K \in P'(N)} (-1)^{|K|} \int_{S_K \times \Delta_{0K}} f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(z,\xi,\lambda) + \int_{D \times \Delta_0} f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(z,\xi,\lambda)\Big] -$$
$$\Big[\sum_{K \in P'(N)} (-1)^{|K|} \int_{S_K \times \Delta_{0K}} \bar{\partial}_\xi f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(z,\xi,\lambda) +$$
$$\int_{D \times \Delta_0} \bar{\partial}_\xi f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(z,\xi,\lambda)\Big], \quad z \in D \tag{7}$$

其中 $\tilde{\Omega}(z,\xi,\lambda) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\langle t^*, d(\xi - z)\rangle \wedge \langle \bar{\partial} t^*, d(\xi - z)\rangle^{n-1}$

$$t^*(z,\xi,\lambda) = \lambda_0 \frac{\bar{\xi} - \bar{z}}{|\xi - z|^2} + \sum_{k \in K} \lambda_k \frac{h_k^*(z,\xi)}{\langle h_k^*(z,\xi), \xi - z\rangle}$$

$$\bar{\partial} = \bar{\partial}_{z,\xi} + d\lambda$$

特别地, 对 $\bar{D}$ 上每一连续有界的 $(0,q)$ 形式 f 使得在 D 内 $\bar{\partial} f = 0$, 则

$$g = (-1)^q \Big[\sum_{K \in P(N)} (-1)^{|K|} \int_{S_K \times \Delta_{0K}} f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(z,\xi,\lambda) + \int_{\partial D \times \Delta_0} f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(z,\xi,\lambda)\Big] \tag{8}$$

是 $\bar{\partial}$-方程 $\bar{\partial} g = f$ 在 D 内的连续解.

1 新核的构造

对 $K = (k_1, \cdots, k_l) \in P(N)$, 如 $k_1, \cdots, k_l$ 是不同的配对, 则置

$$U_{\bar{D}}^K = \{\xi \in U_{\bar{D}} : \rho_{k_1}(\xi) = \cdots = \rho_{k_l}(\xi)\}$$

否则置 $U_{\bar{D}}^K = \varnothing$

记 $\rho_K (K \in P(N))$ 为 $U_{\bar{D}}^K$ 上由下式定义的函数

$$\rho_K(\xi) = \rho_{k_r}(\xi) \qquad (\xi \in U_{\bar{D}}^K, r = 1, \cdots, l)$$

现在对所有 $K \in P(N)$, 定义

$$\Gamma_K = \{\xi \in U_{\bar{D}}^K : \rho_j(\xi) \le \rho_K(\xi) \le 0, j = 1, \cdots, N\}$$

不难看出 Γ_K 是 $\bar{D}$ 的具有逐块 $C^{(2)}$ 边界的 $C^{(2)}$ 子流形, 并且

$$\bar{D} = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_N$$

$$\partial\Gamma_K = S_K \cup \Gamma_{K1} \cup \cdots \cup \Gamma_{KN}, K \in P(N)$$

选择 Γ_K 的定向使得它对于 K 的分量是斜对称的并且满足不述条件:

$\Gamma_1, \cdots, \Gamma_N$ 带有 C^n 的定向, 且如果 $K \in P(N)$ 和 $1 \le j \le N$, $j \notin K$ 则 Γ_{Kj} 的定向和 $-\partial\Gamma_K$ 的一样.

引理 2 [5] $\sum_{K \in P(N)} (-1)^{|K|} \partial(\Gamma_K \times \Delta_{0K})$

$$= \bar{D} \times \Delta_0 + \sum_{K \in P(N)} (-1)^{|K|} S_K \times \Delta_{0K} - \sum_{K \in P(N)} \Gamma_K \times \Delta_K$$

选取 $\chi_k \in C_0^\infty(\theta_k)$ $(k = 1, \cdots, N)$, 使得在 $N(\rho_k)$ 的某领域上有 $\chi_k = 1$. 由式(1)和(3)可知, 对每个 $z \in D_k$, 存在 $N(\rho_k)$ 的邻域 $V_k \subseteq \theta_k$, 使得当 $\xi \in (D_k \cap \theta_k) \cup V_k$ 时, 有 $\Phi_k(z,\xi) \neq 0$, 由于 $\mathrm{Supp}\chi_k \subset\subset \theta_k$, 因此对每一固定的 $z \in F_k^{-1}(D_k)$, 映射 $\chi_k(F_k(\xi)) h_k^*(z,\xi) / \Psi_k(z,\xi)$ 在 $\xi \in F_k^{-1}(D_k \cup V_k)$ 上是 $C^{(1)}$ 的. 对 $K \in P(N)$, 令

$$\tilde{t}^*(z,\xi,\lambda) = \lambda_0 \frac{\bar{\xi} - \bar{z}}{|\xi - z|^2} + \sum_{k \in K} \lambda_k \frac{\chi_k(F_k(\xi)) h_k^*(z,\xi)}{\Psi_k(z,\xi)}$$

则对 $z \in F_k^{-1}(\bar{D}_k)$, ξ 属于 $F_k^{-1}(D_k \cup V_k) \backslash \{z\}$ 的某一领域, 映射 $\tilde{t}^*(z,\xi,\lambda)$ 关于 ξ 有连续的一阶导数, 关于 z 有连续的小于或等于二阶的导数, 因此, 微分形式

$$\tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \langle \tilde{t}^*, d(\xi - z)\rangle \wedge \langle \bar{\partial} \tilde{t}^*, d(\xi - z)\rangle^{n-1}$$

$$\hat{\Omega}(\tilde{t}^*. z, \xi) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \langle \bar{\partial} \tilde{t}^*, d(\xi - z)\rangle^n$$

关于 $z \in F_k^{-1}(\bar{D}_k)$, $\xi \in F_k^{-1}(\bar{D}_k \cup V_k) \backslash \{z\}$ 连续(关于 z 是 $C^{(1)}$ 的).

引理 3 $d\tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) = (\bar{\partial}_{z,\xi} + d\lambda)\tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) = \hat{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi)$

引理 4　$\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi)\big|_{\Delta_0} = \Omega(z,\xi) = \tilde{\Omega}(z,\xi,\lambda)\big|_{\Delta_0}$ 其中

$$\Omega(z,\xi) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\frac{\langle\bar{\xi}-\bar{z}, \mathrm{d}(\xi-z)\rangle\wedge\langle\bar{\partial}(\bar{\xi}-\bar{z}), \mathrm{d}(\xi-z)\rangle^{n-1}}{|\xi-z|^{2n}}$$

引理 5　设 f 是 D 上一连续有界的 $(0,q)$ 形式, 则

$$\mathrm{d}_{\xi,\lambda}[f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z,\xi)] = \bar{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z,\xi) + (-1)^q f(\xi)\wedge\hat{\Omega}(\tilde{t}^*, z,\xi) - \bar{\partial}_z[f(\xi)\wedge\Omega(\tilde{t}^*, z,\xi)] \tag{9}$$

证　因为

$$\mathrm{d}_{\xi,\lambda}[f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z,\xi)] = (\bar{\partial}_{z,\xi}+\mathrm{d}_\lambda)[f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z,\xi)] - \bar{\partial}_z[f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z,\xi)]$$

由引理 3 即得式(9).

引理 6　若 $\xi\in\partial D$, 则 $\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z,\xi) = \tilde{\Omega}(z,\xi,\lambda)$

引理 7　对 $\bar{D}$ 上每一连续有界 $(0,q)$ 形式 f, 有

1) $\displaystyle\int_{\Gamma_K\times\Delta_K} f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z,\xi) = 0, (z\in D)$ 当 $q\neq 1$ 时　(10)

2) $\displaystyle\bar{\partial}_z\int_{\Gamma_K\times\Delta_K} f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z,\xi) = 0, (z\in D)$ 当 $q=1$ 时　(11)

证　1) 因为在 $\Gamma_K\times\Delta_K$ 上, $\tilde{t}^* = \sum_{k\in K}\lambda_k\chi_k(F_k(\xi))h_k^*(z,\xi)/\Psi_k(z,\xi)$, 又 $h_k^*(z,\xi)$ 和 $\Psi_k(z,\xi)(k=1,\cdots,N)$ 关于 z 全纯, $\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z,\xi)$ 中 $\bar{\partial}_z$ 的次数为 0. 因此, $\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z,\xi)$ 中 $\bar{\partial}_\xi$ 的次数为 $n-1$, 所以当 $q\neq 1$ 时, 式(10) 中的积分必为 0.

2) 当 $q=1$ 时, 由于 $h_k^*(z,\xi)$ 和 $\Psi_k(z,\xi)(k=1,\cdots,N)$ 关于 z 全纯, 因此, 式(11) 成立.

定理 8　设 D 是 C^n 空间中边界不必光滑的强拟凸多面体, 并设 D 具有满足式(1) ～ (5) 的全纯支撑函数 $\Phi_k(z,\xi)$ 和 $\tilde{\Phi}_k(z,\xi)(k=1,\cdots,N)$, 则对于 D 上每一连续有界的 $(0,q)$ 形式 f 使得 $\bar{\partial}f$ 在 D 上仍然连续有界, $1\leq q\leq n$, 有

$$f(z) = \sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}}\bar{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\hat{\Omega}(\tilde{t}^*, z,\xi) + \sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\bar{\partial}_z\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} f(\xi)\wedge\hat{\Omega}(\tilde{t}^*, z,\xi) \tag{12}$$

特别地, 若在 D 上 $\bar{\partial}f(\xi)=0$, 则

$$g := \sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} f(\xi)\wedge\hat{\Omega}(\tilde{t}^*, z,\xi) \tag{13}$$

是 D 上的 $\bar{\partial}$-方程 $\bar{\partial}g=f$ 的连续解.

注 1　$\bar{\partial}$-方程解的表达式(13) 中不含有边界积分, 从而避免了边界积分的复杂估计.

注 2　文献[3] 中的定理 3.1.3 是定理 8 的特例.

证　先证明特殊情况 $\mathrm{d}\rho_k(\xi)\neq 0, \xi\in\partial D, k=1,\cdots,N$, 且 f 和 $\bar{\partial}f$ 在 $\bar{D}$ 上连续时定理成立.

在 $\sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\Gamma_K\times\Delta_{0K}$ 上对 $d_{\xi,\lambda}[f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z,\xi)]$ 应用 Stokes 公式得

$$\sum_{K\in P(N)}(-1)^{|K|}\int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}}\mathrm{d}_{\xi,\lambda}[f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z,\xi)]$$

$$= \sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \int_{\partial(\Gamma_K\times\Delta_{0K})} f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) \tag{14}$$

由引理 2 和引理 5, 有

$$\sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} \bar{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) + (-1)^q \sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} f(\xi)$$
$$\wedge \hat{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) + \sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \bar{\partial}_z \int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi)$$
$$= \int_{D\times\Delta_0} f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) +$$
$$\sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) - \sum_{K\in P(N)} \int_{\Gamma_K\times\Delta_K} f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi)$$

即

$$\sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} f(\xi)\wedge\hat{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) = (-1)^q \Big[\int_{D\times\Delta_0} f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) +$$
$$\sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi)\Big] +$$
$$(-1)^{q+1}\Big[\sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \bar{\partial}_z \int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) +$$
$$\sum_{K\in P(N)} \int_{\Gamma_K\times\Delta_K} f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) + \sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} \bar{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi)\Big] \tag{15}$$

对式(15) 两边求 $\bar{\partial}_z$

$$\sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \bar{\partial}_z \int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} f(\xi)\wedge\hat{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi)$$
$$= (-1)^q\Big[\bar{\partial}_z \int_{D\times\Delta_0} f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) + \sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \bar{\partial}_z \int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi)\Big] +$$
$$(-1)^{q+1}\Big[\sum_{K\in P(N)} \bar{\partial}_z \int_{\Gamma_K\times\Delta_K} f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) +$$
$$\sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \bar{\partial}_z \int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} \bar{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi)\Big] \tag{16}$$

在式(15) 中用 $\bar{\partial}_\xi f(\xi)$ 代替 $f(\xi)$, 得

$$\sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} \bar{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\hat{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi)$$
$$= (-1)^{q+1}\Big[\int_{D\times\Delta_0} \bar{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) + \sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} \bar{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi)\Big] +$$
$$(-1)^q\Big[\sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \bar{\partial}_z \int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} \bar{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) +$$
$$\sum_{K\in P(N)} \int_{\Gamma_K\times\Delta_K} \bar{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi)\Big] \tag{17}$$

由引理 7, $\int_{\Gamma_K\times\Delta_K} \bar{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) = 0 \ (\because q \geq 2)$

$$\bar{\partial}_z \int_{\Gamma_K\times\Delta_K} f(\xi)\wedge\overline{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) = 0$$

将式(16) 和(17) 相加, 我们有

$$\sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \bar{\partial}_z \int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} f(\xi)\wedge\hat{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi) + \sum_{K\in P(N)} (-1)^{K} \int_{\Gamma_K\times\Delta_{0K}} \bar{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\hat{\Omega}(\tilde{t}^*, z, \xi)$$

$$= (-1)^q [\bar{\partial}_z \int_{D\times\Delta_0} f(\xi) \wedge \Omega(\tilde{t}^*, z, \xi) + \sum_{K\in P(N)} (-1)^{|K|} \bar{\partial}_z \int_{S_K\times\Delta_{0K}} f(\xi) \wedge \Omega(\tilde{t}^*, z, \xi)] +$$
$$(-1)^{q+1} [\int_{D\times\Delta_0} \bar{\partial}_\xi f(\xi) \wedge \Omega(\tilde{t}^*, z, \xi) + \sum_{K\in P(N)} (-1)^{|K|} \int_{S_K\times\Delta_{0K}} \bar{\partial}_\xi f(\xi) \wedge \Omega(\tilde{t}^*, z, \xi)] \tag{18}$$

由引理 4、引理 6 和引理 1, 式(18) 的右端恰好就是 $f(z)$, 即式(12) 成立.

对于一般情形, 不必假设 $d\rho_k(\xi) \neq 0, \xi \in \partial D, k = 1, \cdots, N$, 对任一在 D 上连续有界的 $(0, q)$ 形式 f 使得 $\bar{\partial} f$ 在 D 上也连续有界, 只须考虑一列一致趋于 D 的强拟凸多面体 D_m, 在 D_m 上如本节开头重新构造新核, 利用 “关于 m 的一致性, ”定理 8 即可得证.

参 考 文 献

1 Range R M, Siu Y T. Uniform estimates for the $\bar{\partial}$-equation on domains with piecewise smooth strictly pseudoconvex boundaries. Math. Ann., 1973, 206: 325～354

2 Henkin G M, Chirka E M. Boundary properties of holomorphic functions of several complex variables. in the collection "The present-day problems of mathematics"4, WINITI, Moscow 1975: 13～142(in Russian)

3 Henkin G M, Leiterer J. Theory of Function on Complex Manifolds. Berlin: Akademic-Verlag Berlin and Birkh user-Verlay, 1984

4 邱春晖. The Koppelman-Leray-Norguet formula of type(p, q) on Stein manifolds. 数学研究与评论, 1991, 11(4): 611～618

5 Laurent-Thiebaut Ch., Leiterer J. Uniform estimates for the Cauchy-Riemann equation on q-convex wedges. Ann. Inst. Fourier(Grenoble), 1993, 43(2): 383～436

6 钟同德, 黄沙. 多元复分析. 石家庄: 河北教育出版社, 1990

The Koppelman-Leray-Norguet Formula for a Strictly Pseudoconvex Polyhedron with Non-smooth Boundaries

Qiu Chunhui

(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005)

Chu Renhua

(38672- 32 of PLA, Bengbu 233012)

Abstract The Koppelman-Leray-Norguet formula of $(0, q)$ differential form for a strictly pseudoconvex polyhedron with not necessarily smooth boundary in C^n is obtained, and an integral representation for the solution of $\bar{\partial}$-equation on this domain which does not involve integral on boundary is given, so one can avoid complexity estimations of boundary integral.

Key words Strictly pseudoconvex polyhedron, Non-smooth boundary, Koppelman-Leray-Norguet formula, $\bar{\partial}$-Equation