第 38 卷 第 1 期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 38 No. 1
1999 年 1 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Jan. 1999

Stein 流形上具有非光滑边界的带权因子的 Koppelman-Leray 公式[1]

邱春晖 林良裕
(厦门大学数学系 厦门 361005)

摘要 得到 Stein 流形上具有非光滑边界的强拟凸域的(p,q)微分形式的带权因子的 Koppelman-Leray 公式及其$\bar{\partial}$-方程的带权因子的解,其特点是不含边界的积分,从而避免边界积分的复杂估计.

关键词 Stein 流形, Koppelman-Leray 公式, 非光滑边界, 带权因子, (p,q)微分形式, $\bar{\partial}$-方程
中国图书分类号 O174.56

熟知Stein 流形是一极重要的流形, 在Stein 流形上有很多非常数的全纯函数. C^n 就是一个 Stein 流形, 所以在 Stein 流形上研究多元复分析是很自然的[1]. 尤其对于Stein 流形上的(p,q)型微分形式, 它和$(0,q)$型微分形式不同, 这时不能像 C^n 空间一样采用 Euclid 度量, 因为在 Stein 流形上 Euclid 度量不是全纯变换下的不变式. 为了解决不变度量的问题, 本文引进 Hermite 度量和陈联络[2,3], 构造了 Stein 流形上(p,q)型微分形式在不变度量下的带权因子的积分核, 得到了Stein 流形强拟凸域上具有非光滑边界的带权因子的Koppelman-Leray 公式及其$\bar{\partial}$-方程的带权因子的解. 其特点是以体积积分代替边界积分, 不含有边界积分, 避免了边界积分的复杂估计. 本文蕴含着文献[1,4] 的结果.

为简单起见, 我们采用文献[1～3] 的定义和记号.

1 带权因子的 Koppelman-Leray 公式

设 M 是一复 n 维Stein 流形, $D\subset\subset M$ 是一强拟凸域, ρ是边界 ∂D 的邻域θ上的强多次调和 $C^{(2)}$ 函数使得$D\cap\theta=\{z\in D: \rho(z)<0\}$. 记$N(\rho)=\{z\in\bar{\theta}: \rho(z)=0\}$, 并假设$N(\rho)\subset\subset\theta$(我们不必假设当$z\in\partial D$时 $d\rho(z)\neq 0$). 由于 $D\subset\subset M$, 不失一般性, 可假设 M 是一更大的 Stein 流形的相对紧开集. 设 $S(z,\xi)$, $\varphi(z,\xi)$, K如同文献[1] 中引理 4.2.4 所言, 则由文献[1] 中定理 4.8.3 和引理4.8.2, 收缩θ后, 可以找到$\epsilon>0$, $\alpha>0$ 以及定义在$z\in D\cup\theta$, $\xi\in\theta$的 $C^{(1)}$ 函数 $\Phi(z,\xi)$, $\tilde{\Phi}(z,\xi)$ 满足下列条件[1]:

1) $\Phi(z,\xi)$ 和 $\tilde{\Phi}(z,\xi)$ 在$z\in D\cup\theta$上全纯;

2) $\Phi(z,\xi)\neq 0$, $\tilde{\Phi}(z,\xi)\neq 0$, 当$z\in D\cup\theta$, $\xi\in\theta$且 $\mathrm{dist}(z,\xi)\geq\epsilon$时; (1)

[1] 本文 1998-05-28 收到; 国家自然科学基金和福建省自然科学基金资助项目

$$\Phi(z,\xi) \geq \alpha(\rho(\xi) - \rho(z) + [\mathrm{dist}(z,\xi)]^2), \text{当} z \in D \cup \theta, \xi \in \theta, \text{且} \mathrm{dist}(z,\xi) \leq \epsilon; \tag{2}$$

$$\widetilde{\Phi}(z,\xi) \geq \alpha(-\rho(\xi) - \rho(z) + [\mathrm{dist}(z,\xi)]^2), \text{当} z \in D \cup \theta, \xi \in \theta, \text{且} \mathrm{dist}(z,\xi) \leq \epsilon; \tag{3}$$

$$\Phi(z,z) = 0, \text{对所有} z \in \theta. \tag{4}$$

3) $\widetilde{\Phi}(z,\xi) = \Phi(z,\xi)$, 当 $\xi \in N(\rho)$, $z \in D \cup \theta$ 时. (5)

由文献[1]中推论4.9.4, 收缩 θ 后, 可找到一定义在 $z \in D \cup \theta$, $\xi \in \theta$ 上的 $T^*(M)$ 值 $C^{(1)}$ 映射 $S^*(z,\xi)$ 满足下列条件[1]:

1) $S^*(z,\xi) \in T_z^*(M)$, 当 $z \in D \cup \theta$, $\xi \in \theta$ 时;

2) $S^*(z,\xi)$ 关于 $z \in D \cup \theta$ 全纯;

3) $\varphi(z,\xi)\Phi(z,\xi) = \langle S^*(z,\xi), S(z,\xi)\rangle$, 当 $z \in D \cup \theta$, $\xi \in \theta$ 时. (6)

当 $z \in D$, $\xi \in \partial D$ 时, 则由式(6)得

$$\frac{\varphi(z,\xi)S^*(z,\xi)}{\langle S^*(z,\xi), S(z,\xi)\rangle} = \frac{S^*(z,\xi)}{\Phi(z,\xi)} \tag{7}$$

引进一 C^∞ 映射 $Q = (Q_1, \cdots, Q_n): E^*(M \times M) \to \widetilde{E}^*(M \times M)$, 对于每一个固定的 ξ, $Q(z,\xi)$ 关于 z 全纯. 设 $G(z)$ 在复平面 C^1 上全纯, 其定义域包含映射 $M \times M \to C^1$, $(z,\xi) \to \langle Q(z,\xi), S(z,\xi)\rangle$ 的像集, 且 $G(0) = 1$. 仍用 Q 记作 $\langle Q, DS\rangle$, 这并不会引起混乱.

对在 $D \times \partial D \times [0,1]$ 的某邻域 $\subseteq D \times M \times [0,1]$ 的所有使得 $\langle S^*(z,\xi), S(z,\xi)\rangle \neq 0$ 的 (z,ξ,λ), 定义

$$t^*(S^*, \hat{S}, S) = \lambda \frac{\hat{S}(z,\xi)}{\| S(z,\xi)\|_\theta^2} + (1-\lambda)\frac{S^*(z,\xi)}{\langle S^*(z,\xi), S(z,\xi)\rangle} \tag{8}$$

由式(1)可知, $\Phi(z,\xi) \neq 0$, 因此, $(S^*, 1)$ 是 D 的 Leray 截面. 当 ∂D 是 $C^{(1)}$ 逐块光滑时, 我们有如下的带权因子的 Koppelman-Leray 公式[5].

引理 1[5] 设 $D \subset\subset M$ 具有 $C^{(1)}$ 逐块光滑边界, $\upsilon \geq 2n¼$, $1 \leq q \leq n$, 若 $C(\widetilde{T}(M \times M)) = D^2 = 0$, 则对每一个在 $\bar{D}$ 上连续并且 $\bar{\partial} f$ 在 $\bar{D}$ 仍然连续的 (p,q) 微分形式 f, 有

$$(-1)^{p+q} f(z) = \bar{\partial}_z\left[\int_{\partial D\times[0,1]} f(\xi) \wedge \bar{\Omega}(z,\xi,\lambda) + \int_D f(\xi) \wedge \Omega(z,\xi)\right] - \left[\int_{\partial D\times[0,1]} \bar{\partial}_\xi f(\xi) \wedge \bar{\Omega}(z,\xi,\lambda) + \int_D \bar{\partial}_\xi f(\xi) \wedge \Omega(z,\xi)\right], z \in D \tag{9}$$

其中 $$\Omega(z,\xi) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\varphi(z,\xi)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q, S\rangle)(\bar{\partial} Q)^k \wedge \frac{\langle \hat{S}, DS\rangle \wedge \langle \bar{\partial}_\xi \hat{S}, DS\rangle^{n-k-1}}{\| S\|_\theta^{2(n-k)}}$$

$$\bar{\Omega}(z,\xi,\lambda) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\varphi(z,\xi)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q, S\rangle)(\bar{\partial} Q)^k \wedge \langle t^*, DS\rangle \wedge \langle \Delta t^*, DS\rangle^{n-k-1}$$

ý $\bar{\partial}\hat{S} = \bar{\partial}_{z,\xi}\hat{u}$ ($\hat{u}$ 为 $\hat{S}$ 的局部坐标表示)

$\Delta t^* = (\bar{\partial}_{z,\xi} + d\lambda)\upsilon$, ($\upsilon$ 为 t^* 的局部坐标表示)

特别地, 对每一个在 $\bar{D}$ 上连续在 D 内满足 $\bar{\partial} f = 0$ 的 (p,q) 微分形式 f,

$$g := (-1)^{p+q}\left[\int_{\partial D\times[0,1]} f(\xi)\wedge\widetilde{\Omega}(z,\xi,\lambda) + \int_D f(\xi)\wedge\Omega(z,\xi)\right]$$

是 $\bar{\partial}$-方程 $\bar{\partial}g = f$ 的连续解.

2　不含边界积分的带权因子的 Koppelman-Leray 公式

选取 $\chi\in C_0^{\infty}(\theta)$, 使得在 $N(\rho)$ 的某邻域上有 $\chi = 1$. 由式(1) 和(3) 可知, 对每个 $z\in D$, 存在 $N(\rho)$ 的邻域 $V_z\subseteq\theta$, 使得当 $\xi\in(D\cap\theta)\cup V_z$ 时, 有 $\widetilde{\Phi}(z,\xi)\neq 0$. 由于 $\mathrm{Supp}\chi\subset\subset\theta$, 因此对固定的 $z\in D$, 映射 $\dfrac{\chi(\xi)S^*(z,\xi)}{\widetilde{\Phi}(z,\xi)}$ 在 $\xi\in D\cup V_z$ 上是 $C^{(1)}$ 的. 令

$$\tilde{t}^*(S^*,\hat{S},S) = \lambda\frac{\hat{S}(z,\xi)}{|S(z,\xi)|_\theta^2} + (1-\lambda)\frac{\chi(\xi)S^*(z,\xi)}{\widetilde{\Phi}(z,\xi)},\quad 0\le\lambda\le 1$$

则对 $z\in\bar{D}$, $\xi\in\bar{D}\setminus\{z\}$, 映射 $\varphi(z,\xi)\tilde{t}^*(S^*,\hat{S},S)$ 关于 ξ 有连续的一阶导数, 关于 z 有连续的小于或等于 2 阶的导数(参考文献[1] 中引理 4.2.4(V)). 因此, 微分形式

$$\widetilde{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi i)^n}\varphi(z,\xi)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,S\rangle)(\bar{\partial}Q)^k\wedge \langle\tilde{t}^*,DS\rangle\wedge\langle\Delta\tilde{t}^*,DS\rangle^{n-k-1} \tag{10}$$

$$\hat{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi i)^n}\varphi(z,\xi)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,S\rangle)(\bar{\partial}Q)^k\wedge\langle\Delta\tilde{t}^*,DS\rangle^{n-k} \tag{11}$$

关于 $z\in D$, $\xi\in D\setminus\{z\}$ 连续(关于 z 是 $C^{(1)}$ 的).

设 $\tilde{t}^*$ 的局部坐标表示为 v^*, 记

$$W(DS) = DS_{j_1}\wedge\cdots\wedge DS_{j_{n-k}}$$

$$W(\Delta\tilde{t}^*) = \bar{\partial}v_{j_1}^*\wedge\cdots\wedge\bar{\partial}v_{j_{n-k}}^*$$

$$W'(\Delta\tilde{t}^*) = \sum_{l=1}^{n-k}(-1)^{j_l-1}v_{j_l}^*\bigwedge_{l\neq p}\bar{\partial}v_{j_p}^*$$

其中 $1\le j_1<\cdots<j_{n-k}\le n$.

引理 2　1) $$\frac{n!}{k!}W(\Delta\tilde{t}^*)\wedge W(DS) = (-1)^{(n-k)(n-k-1)k}\langle\Delta\tilde{t}^*,DS\rangle^{n-k} \tag{12}$$

2) $$\langle\tilde{t}^*,DS\rangle\wedge\langle\Delta\tilde{t}^*,DS\rangle^{n-k-1} = (-1)^{(n-k)(n-k-1)k}\frac{1}{n-k}\frac{n!}{k!}W'(\Delta\tilde{t}^*)\wedge W(DS) \tag{13}$$

证　1) 显然.

2) 定义向量[3] $a = \sum_{l=1}^{n-k}v_{j_l}^*\dfrac{\partial}{\bar{\partial}v_{j_l}^*}$, 用向量 a 对式(12) 两边作收缩运算, 利用

$$a\lrcorner W(\Delta\tilde{t}^*) = W'(\Delta\tilde{t}^*)$$

$$a\lrcorner\langle\Delta\tilde{t}^*,DS\rangle^{n-k} = (n-k)\langle\tilde{t}^*,DS\rangle\wedge\langle\Delta\tilde{t}^*,DS\rangle^{n-k-1}$$

即可得式(13).

引理 3　若 $C(\widetilde{T}(M\times M)) = D^2 = 0$, 则

$$\mathrm{d}\widetilde{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S) = (\bar{\partial}_{z,\xi}+\mathrm{d}\lambda)\widetilde{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S) = \hat{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S) \tag{14}$$

证　由于 $C(\widetilde{T}(M\times M)) = D^2 = 0$, $G(z)$ 关于 z 全纯, 由引理 2 有

$$(\bar{\partial}_{z,\xi}+\mathrm{d}\lambda)\tilde{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S)=(\bar{\partial}_{z,\xi}+\mathrm{d}\lambda)\Big[\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\varphi(z,\xi)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,S\rangle)(\bar{\partial}Q)^k\wedge$$

$$(-1)^{(n-k)(n-k-1)k}\frac{1}{n-k}\frac{n!}{k!}W(\Delta\tilde{t}^*)\wedge W(DS)\Big]=$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\varphi(z,\xi)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,S\rangle)(\bar{\partial}Q)^k\wedge(-1)^{(n-k)(n-k-1)k}\frac{n!}{k!}W(\Delta\tilde{t}^*)\wedge W(DS)$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\varphi(z,\xi)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,S\rangle)(\bar{\partial}Q)^k\wedge\langle\Delta\tilde{t}^*,DS\rangle^{n-k}=\hat{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S).$$

引理 4 $\tilde{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S)\big|_{\lambda=1}=\Omega(z,\xi)$

$\tilde{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S)\big|_{\lambda=0}=\overset{\wedge}{\Omega}(z,\xi)$

其中
$$\overset{\wedge}{\Omega}(z,\xi)=\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\varphi(z,\xi)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,S\rangle)(\bar{\partial}Q)^k\wedge$$
$$\langle W_1,DS\rangle\wedge\langle\Delta W_1,DS\rangle^{n-k-1}$$

$$W_1(z,\xi)=\frac{\chi(\xi)S^*(z,\xi)}{\tilde{\Phi}(z,\xi)}$$

引理 5 设(p,q) 形式f 在D 上连续,并且$C(\tilde{T}(M\times M))=D^2=0$,则

$$\mathrm{d}_{\xi,\lambda}[f(\xi)\wedge\tilde{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S)]=\bar{\partial}_\xi f(\xi)\wedge\tilde{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S)+$$
$$(-1)^{p+q}f(\xi)\wedge\hat{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S)-\bar{\partial}_z[f(\xi)\wedge\tilde{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S)] \tag{15}$$

证 因为

$$\mathrm{d}_{\xi,\lambda}[f(\xi)\wedge\tilde{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S)]=(\bar{\partial}_{z,\xi}+\mathrm{d}_\lambda)[f(\xi)\wedge\tilde{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S)]-$$
$$\bar{\partial}_z[f(\xi)\wedge\tilde{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S)]$$

由引理 3 立得式(15).

引理 6 设$\xi\in\partial D$,则

$$\tilde{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S)=\tilde{\Omega}(z,\xi,\lambda) \tag{16}$$

引理 7 对于$\bar{D}$ 上每一连续有界的(p,q) 形式f,有

1) $\int_D f(\xi)\wedge\overset{\wedge}{\Omega}(z,\xi)=0\quad(z\in D)$,若$q\neq1$ (17)

2) $\bar{\partial}_z\int_D f(\xi)\wedge\overset{\wedge}{\Omega}(z,\xi)=0\quad(z\in D)$,若$q=1$ (18)

证 1) 因为$S^*(z,\xi)$、$\tilde{\Phi}(z,\zeta)$ 和$Q(z,\xi)$ 关于z 全纯,$\overset{\wedge}{\Omega}(z,\xi)$ 中$\bar{\partial}_z$ 的次数为0,因此,$\overset{\wedge}{\Omega}(z,\xi)$ 中$\bar{\partial}_\xi$ 的次数为$n-1$,所以,当$q\neq1$时,式(17) 中的积分必为0.

2) 当$q=1$时,由于$S^*(z,\xi)$、$\tilde{\Phi}(z,\xi)$ 和$Q(z,\xi)$ 关于z 全纯,因此,式(18) 成立.

定理 1 设D 是Stein 流形M 上边界不必光滑的强拟凸域,并设D 具有满足式(1) ～(6) 的全纯支撑函数$\Phi(z,\xi)$ 和$\tilde{\Phi}(z,\xi)$.若$C(\tilde{T}(M\times M))=D^2=0$,则对于$D$ 上每一连续有界的(p,q) 形式f 使得$\bar{\partial}f$ 在D 上仍然连续有界,$0\leq p\leq n,1\leq q\leq n$,有

$$f(z)=\int_{D\times[0,1]}\bar{\partial}f(\xi)\wedge\hat{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S)+\bar{\partial}_z\int_{D\times[0,1]}f(\xi)\wedge\hat{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S) \tag{19}$$

特别地,若在D 上$\bar{\partial}f(\xi)=0$,则

$$g:=\int_{D\times[0,1]}f(\xi)\wedge\hat{\Omega}(\tilde{t}^*,\hat{S},S) \tag{20}$$

是 D 上 $\bar{\partial}$-方程 $\bar{\partial} g = f$ 的连续解.

注 1　$\bar{\partial}$ 方程解的表达式(20) 中不含有边界积分, 从而避免了边界积分的复杂估计.

注 2　当 $G \equiv 1, Q \equiv 0$ 时, 定理 1 蕴含着文献[1, 4] 的结果.

定理 1 的证明　先证明特殊情形 $\mathrm{d}\rho(\xi) \neq 0, \xi \in \partial D$ 时, 定理 1 成立.

在 $D \times [0, 1]$ 上, 对 $\mathrm{d}_{\xi,\lambda}[f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S)]$ 应用 Stokes 公式得

$$\int_{D\times[0,1]} \mathrm{d}_{\xi,\lambda}[f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S)] = \int_{\partial\{D\times[0,1]\}} f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S)$$

又　$$\partial\{D \times [0, 1]\} = \partial D \times [0, 1] + D \times \{1\} - D \times \{0\}$$

则由引理 5, 有

$$\int_{D\times[0,1]} \bar{\partial}_\xi f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S) + (-1)^{p+q}\int_{D\times[0,1]} f(\xi) \wedge \hat{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S) -$$
$$\int_{D\times[0,1]} \bar{\partial}_z[f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S)] = \int_{\partial D\times[0,1]} f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S) +$$
$$\int_{D\times\{1\}} f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S) - \int_{D\times\{0\}} f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S)$$

由引理 4 和引理 6, 有

$$\int_{D\times[0,1]} \bar{\partial}_\xi f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S) + (-1)^{p+q}\int_{D\times[0,1]} f(\xi) \wedge \hat{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S) +$$
$$\bar{\partial}_z\int_{D\times[0,1]} f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S) = \int_{\partial D\times[0,1]} f(\xi) \wedge \bar{\Omega}(z, \xi, \lambda) +$$
$$\int_D f(\xi) \wedge \Omega(z, \xi) - \int_D f(\xi) \wedge \hat{\Omega}(z, \xi)$$

即　$$\int_{D\times[0,1]} f(\xi) \wedge \hat{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S) = (-1)^{p+q}\Big[\int_{\partial D\times[0,1]} f(\xi) \wedge \bar{\Omega}(z, \xi, \lambda) +$$
$$\int_D f(\xi) \wedge \Omega(z, \xi)\Big] + (-1)^{p+q+1}\Big[\int_{D\times[0,1]} \bar{\partial}_\xi f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S) +$$
$$\bar{\partial}_z\int_{D\times[0,1]} f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S) + \int_D f(\xi) \wedge \hat{\Omega}(z, \xi)\Big] \tag{21}$$

对式(21) 两边求 $\bar{\partial}_z$

$$\bar{\partial}_z\int_{D\times[0,1]} f(\xi) \wedge \hat{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S) = (-1)^{p+q}\bar{\partial}_z\Big[\int_{\partial D\times[0,1]} f(\xi) \wedge \bar{\Omega}(z, \xi, \lambda) +$$
$$\int_D f(\xi) \wedge \Omega(z, \xi)\Big] + (-1)^{p+q+1}\Big[\bar{\partial}_z\int_{D\times[0,1]} \bar{\partial}_\xi f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S) +$$
$$\bar{\partial}_z\int_D f(\xi) \wedge \hat{\Omega}(z, \xi)\Big] \tag{22}$$

在式(21) 中用 $\bar{\partial}_\xi f(\xi)$ 代替 $f(\xi)$ 得

$$\int_{D\times[0,1]} \bar{\partial}_\xi f(\xi) \wedge \hat{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S) = (-1)^{p+q+1}\Big[\int_{\partial D\times[0,1]} \bar{\partial}_\xi f(\xi) \wedge \bar{\Omega}(z, \xi, \lambda) +$$
$$\int_D \bar{\partial}_\xi f(\xi) \wedge \Omega(z, \xi)\Big] + (-1)^{p+q}\Big[\bar{\partial}_z\int_{D\times[0,1]} \bar{\partial}_\xi f(\xi) \wedge \tilde{\Omega}(\tilde{t}^*, \hat{S}, S) +$$
$$\int_D \bar{\partial}_\xi f(\xi) \wedge \hat{\Omega}(z, \xi)\Big] \tag{23}$$

由引理 7, 有

$$\int_{D}\bar{\partial}_{\xi}f(\xi)\wedge\hat{\bar{\Omega}}(z,\xi)=0(\because q\geq 2),\ \bar{\partial}_{z}\int_{D}f(\xi)\wedge\hat{\bar{\Omega}}(z,\xi)=0$$

将式(22)和(23)相加得

$$\bar{\partial}_{z}\int_{D\times[0,1]}f(\xi)\wedge\hat{\Omega}(\tilde{t}^{*},\hat{S},S)+\int_{D\times[0,1]}\bar{\partial}_{\xi}f(\xi)\wedge\hat{\Omega}(\tilde{t}^{*},\hat{S},S)$$

$$=(-1)^{p+q}\bar{\partial}_{z}\left[\int_{D\times[0,1]}f(\xi)\wedge\bar{\Omega}(z,\xi,\lambda)+\int_{D}f(\xi)\wedge\Omega(z,\xi)\right]+$$

$$(-1)^{p+q+1}\left[\int_{D\times[0,1]}\bar{\partial}_{\xi}f(\xi)\wedge\bar{\Omega}(z,\xi,\lambda)+\int_{D}\bar{\partial}_{\xi}f(\xi)\wedge\Omega(z,\xi)\right]\qquad(24)$$

由引理1, 式(24)的右边恰好就是$f(z)$, 即式(19)成立.

对于一般情形, 不必假设$d\rho(\xi)\neq 0,\xi\in\partial D$. 此时, 只须考虑一列一致趋于$D$的强拟凸开集$D_m$, 在$D_m$上如本节开头重新构造新核, 利用“关于$m$的一致性”, 定理1可得证.

参 考 文 献

1 Henkin G M, Leiterer J. Theory of function on complex manifolds. Berlin: Akademic-Verlag, 1984

2 Demailly J P, Laurent-Thiebaut Ch. Formules int grales pour les formes diff rentielles de type (p,q) dans les vari t s de Stein. Ann. Sci. École Norm Sup., 1987, 20(4): 579～598

3 钟同德, 黄沙. 多元复分析. 石家庄: 河北教育出版社, 1990

4 范国兴. Stein 流形上(p,q)形式$\bar{\partial}$-方程解的不含边界积分的表示及其一致估计: [硕士学位论文]. 厦门: 厦门大学数学系, 1991

5 王志强. Stein 流形上(p,q)形式带权因子的积分表示. 厦门大学学报(自然科学版), 1994, 33(2): 151～154

6 Berndtsson B, Andersson M. Henkin-Ramirez formulas with weight factors. Ann. Inst. Fourier. Grenoble, 1982, 32(3): 91～110

The Koppelman-Leray Formula with Weight Factors for a Strictly Pseudoconvex Domain with Non-smooth Boundary on Stein Manifolds

Qiu Chunhui Lin Liangyu

(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005)

Abstract The Koppelman-Leray formula with weight factors of (p,q) differential forms for a strictly pseudoconvex domain with unnecessarily smooth boundary on a Stein manifold is obtained, and an integral representation for the solution with weight factors of $\bar{\partial}$-equation on this domain, which does not involve integral on boundary, is given, so that one can avoid complexity estimations of boundary integrals.

Key words Stein manifold, Koppelman-Leray formula, Non-smooth boundary, Weight factor, (p,q) differential form, $\bar{\partial}$-equation