第 43 卷 第 4 期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 43 No. 4
2004 年 7 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Jul. 2004
**文章编号**:0438-0479(2004)04-0465-04

# 最小对称熵鞅测度和不完备市场中的定价问题

**汤思英,刘继春,杜立金**
(厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005)

**摘要**:在等价鞅测度集$\mathbf{M}_e \neq \phi$的条件下,文章给出了最小对称熵鞅测度的概念. 利用这一新的准则,确定了鞅测度,提供了存在惟一最小对称熵鞅测度的充分条件. 进一步,刻画了最小对称熵鞅测度密度的特征. 最后,在不完备市场的条件下,讨论了对称熵最小化和效用函数最大化的等价性.

**关键词**:等价鞅测度;对称熵鞅测度;不完备市场
**中图分类号**:O 212.6;F 830.9 **文献标识码**:A

在不完备的市场中,存在着一些等价鞅测度,完全的套期保值是不可能的. 在这种情况下,无套利价格是一个区间,它们对应着不同的等价鞅测度[1]. 对于等价鞅测度的选择,人们已经给出了一些准则. 最常见的有最小鞅测度[2] 和最优方差鞅测度[3].

另外,基于相对熵的最小熵鞅测度准则也是人们所熟知的[4~8]. 相对熵是用来表示两个概率测度之间"距离"的量,但它不具有距离的对称性. 为了克服这一缺陷,首先我们将引入对称熵的概念. 然后,在等价鞅测度集$\mathbf{M}_e \neq \phi$的条件下,给出了最小对称熵鞅测度的准则,提供了存在惟一最小对称熵鞅测度的充分条件. 进一步,刻画了最小对称熵鞅测度密度的特征. 最后,在不完备市场的条件下,讨论了对称熵最小化和效用函数最大化的等价性.

## 1 最小对称熵鞅测度

首先,通过带流的概率空间$(\Omega,\mathbf{F},(\mathbf{F}_t)_{0\le t\le T},P)$对金融市场随机性建立模型. 假定$\sigma$域流$F=((\mathbf{F}_t)_{0\le t\le T})$满足通常的右连续和完备的条件,并且$\sigma$域$\mathbf{F}_0$是平凡的且$\mathbf{F}_T=\mathbf{F}$.

用定义在$(\Omega,\mathbf{F},(\mathbf{F}_t)_{0\le t\le T},P)$上的随机过程$S^0,\cdots,S^d$表示$d+1$个可交易的资产的价格. 进一步,假设$S=(S^0,\cdots,S^d)$是适应的、右连续左极限存在的严格正的半鞅. 证券 0 被认为是一个 numeráire[1]. 折现过程$S:=\frac{1}{S^0}(S^0,\cdots,S^d)=(1,\frac{1}{S^0}S^1,\cdots,\frac{1}{S^0}S^d)$. 交易策略$\phi=(\phi^0,\cdots,\phi^d)$是$R^{d+1}$-值、可料的随机过程,$\phi_t^i$表示在时刻$t$投资在证券$i$上的份数. $G(\phi)$ ($G_t(\phi):=\int \phi_s\cdot \mathrm{d}S_s$) 表示折现增益过程,而折现价值过程是$V_t(\phi)=V_0(\phi)+G_t(\phi)$,这里$V_0(\phi)$是初始投资.

$L^0(P)$、$L^\infty(P)$和$L^1(P)$分别表示在$(\Omega,\mathbf{F})$上$P$-有限、$P$-本性有界和$P$-可积的随机变量全体. 令

$$K:=Lin\{G_t(\phi)-G_s(\phi):\phi\in L^\infty(P),\ 0\le s\le t\le T\}.$$

其中$Lin\{\cdot\}$表示由满足条件的元素所生成的线性空间. 进一步,令

$$\mathbf{M}:=\{Q\ll P:E_Q(k)=0,\forall k\in K\},$$
$$\mathbf{M}_e:=\{Q\in\mathbf{M}:Q\sim P\}.$$

在本文中,总假设$\mathbf{M}_e\neq\phi$成立. 为了方便,现将最小熵鞅测度(MEM)的概念重新叙述如下:

定义 1 1) 设$Q$是$(\Omega,\mathbf{F})$上的概率测度. $Q$对$P$的相对熵$I(Q,P)$被定义为:若$Q\ll P$,则

$$I(Q,P)=E_P(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\ln(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P})),$$

否则,$I(Q,P)=+\infty$.

2) 若概率测度$Q_0\in\mathbf{M}$满足

$$I(Q_0,P)=\min_{Q\in\mathbf{M}}I(Q,P),$$

则称概率测度$Q_0$是最小熵鞅测度(MEM).

上述所定义的相对熵可理解为两个测度之间的"距离". 而在一般情况下,$I(Q,P)$与$I(P,Q)$是

**收稿日期**:2003-10-23
**基金项目**:厦门大学校级自选课题基金(0020 Y07008)资助
**作者简介**:汤思英(1978-),女,硕士研究生.

不相同的,为了克服这一不足,我们引入对称熵的概念.

**定义 2** 1) 若 $Q \sim P$,则

$$S(Q,P) = (I(P,Q) + I(Q,P))/2.$$

被称为概率测度 $Q$ 和 $P$ 的对称熵.

2) 若概率测度 $Q_0 \in \mathbf{M}_e$ 满足

$$S(Q_0,P) = \min_{Q \in \mathbf{M}_e} S(Q,P),$$

则称概率测度 $Q_0$ 是最小对称熵鞅测度(MSEM). 根据上面的定义,显然有 $S(Q,P) = S(P,Q)$. 以下为了叙述的方便,省略上面定义中的系数 1/2.

如果 $M$ 是 $(\Omega,\mathbf{F})$ 上的一个概率测度的集合. 设

$$S(M,P) = \inf\{S(Q,P) : Q \in \mathbf{M}_e\}.$$

注意到在 $Q \sim P$ 的情况下,可以得到

$$S(Q,P) = E_P\left(\frac{dQ}{dP}\ln\frac{dQ}{dP}\right) + E_Q\left(\frac{dQ}{dP}\ln\frac{dQ}{dP}\right) = E_P\left(\left(\frac{dQ}{dP} - 1\right)\ln\frac{dQ}{dP}\right).$$

为了讨论方便,不妨设 $\Phi(x) = (x-1)\ln x$, $x \in (0,+\infty)$. 容易验证函数 $\Phi(x)$ 是严凸的和非单调的,所以它存在着惟一的最小值. 令

$$\mathbf{M}^0 = \{Q \in \mathbf{M}_e : S(Q,P) < +\infty\},$$

$$\mathbf{L} := \bigcap_{Q \in \mathbf{M}^0} L^1(Q).$$

**定理 1** 若 $S(\mathbf{M}_e,P) < +\infty$,且 $\tilde{S}$ 是有界的,则存在着惟一的最小对称熵鞅测度.

证 如果证明了对称熵测度的存在性,则其惟一性可由函数 $\Phi(x)$ 的严凸性得出. 取定 $\{Q_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbf{M}^0$,使得 $S(Q_n,P) \downarrow S(\mathbf{M}_e,P)$. 由于

$$\sup_{n\geq 1} E_P\left(\Phi\left(\frac{dQ_n}{dP}\right)\right) \leq S(Q_1,P),$$

和 $\lim_{x\to\infty}(\Phi(x)/x) = +\infty$, 我们容易得到 $\{\frac{dQ_n}{dP}\}_{n\geq 1}$ 是一致可积的. 根据 Dunford-Pettis 紧致性原理[9], 我们可以找到这样一个子列, 仍用 $\{\frac{dQ_n}{dP}\}_{n\geq 1}$ 来表示,在 $\sigma(L^1(P),L^\infty(P))$ 拓扑空间中是收敛的. 然后,利用 Hahn-Banach 定理[9],可以找到 $\{Q_n\}_{n\geq 1}$ 的凸组合序列 $\{Q_n\}_{n\geq 1}$, 使得 $\{\frac{dQ_n}{dP}\}_{n\geq 1}$ 在 $L^1(P)$ 范数拓扑空间,对 $\phi_0 = \frac{dQ_0}{dP} \in L^1(P)$ 来说是收敛的. 因为 $Q_n \in \mathbf{M}^0$,并且过程 $S$ 是有界的,有

$$0 = E_{Q_n}(f) = E_P\left(f\frac{dQ_n}{dP}\right) \to E_P\left(f\frac{dQ_0}{dP}\right) = E_{Q_0}(f), \quad \forall f \in K \subseteq L^\infty(P).$$

因此 $Q_0 \in \mathbf{M}_e$. 由 $S(Q_n,P)$ 的凸性和对于 $n$ 的单调性,有 $S(Q_n,P) \leq S(Q_n,P)$. 再由 Fatou 引理,有

$$S(Q_0,P) \leq \liminf_{n\to+\infty} S(Q_n,P) \leq \liminf_{n\to+\infty} S(Q_n,P) = S(\mathbf{M}_e,P).$$

为了研究 MSEM 的密度,下面的引理是需要的.

**引理 1** 设 $Q_0, Q_1 \in \mathbf{M}^0$,并且记 $Q_x = xQ_1 + (1-x)Q_0$, $x \in [0,1]$. 则

$$\frac{d}{dx}S(Q_x,P)\Big|_{x=0} = E_{Q_1}\left(\ln\left(\frac{dQ_0}{dP}\right)\right) - I(Q_0,P) + 1 - E_P\left(\frac{dQ_1}{dQ_0}\right).$$

证 在文献[6]中有:

$$\frac{d}{dx}I(Q_x,P)\Big|_{x=0} = E_{Q_1}\left(\ln\frac{dQ_0}{dP}\right) - I(Q_0,P).$$

因此,只需要证明:

$$\frac{d}{dx}I(P,Q_x)\Big|_{x=0} = 1 - E_P\left(\frac{dQ_1}{dQ_0}\right).$$

事实上,

$$\frac{d}{dx}I(P,Q_x)\Big|_{x=0} = \lim_{x\downarrow 0} E_P\left(\frac{\ln\frac{dP}{dQ_x} - \ln\frac{dP}{dQ_0}}{x}\right) =$$

$$E_P\left(-\left(\ln\frac{dQ_x}{dP}\right)'\Big| x=0\right) = 1 - E_P\left(\frac{dQ_1}{dQ_0}\right).$$

**定理 2** 假设 $S(\mathbf{M}_e,P) < +\infty$, $Q_0$ 是最小对称熵鞅测度(MSEM)当且仅当

(i) $Q_0 \in \mathbf{M}_e$;

(ii) $\left(\frac{dQ_0}{dP}\right)^{-1} - \ln\frac{dQ_0}{dP} = c + f_0$;

其中 $f_0 \in L^1(Q_0)$, $E_{Q_0}(f_0) = 0$, $c \leq 1$;

(iii) $f_0 \in C_0$,其中 $C_0 := \{f \in \mathbf{L} : E_{Q_1}(f_0) \leq 0,\ Q_1 \in \mathbf{M}^0\}$.

证 先证充分性. 设 $Q_0 \in \mathbf{M}_e$,有

$$S(Q_1,P) - S(Q_0,P) =$$

$$E_{Q_1}\left(\ln\frac{dQ_1}{dP}\right) + E_P\left(\ln\frac{dP}{dQ_1}\right) - E_{Q_0}\left(\ln\frac{dQ_0}{dP}\right) - E_P\left(\ln\frac{dP}{dQ_0}\right) \geq$$

$$E_{Q_1}\left(\ln\frac{dQ_0}{dP}\right) + E_P\left(\ln\frac{dQ_0}{dQ_1}\right) - E_{Q_0}\left(\ln\frac{dQ_0}{dP}\right) =$$

$$E_P\left(\frac{dQ_1}{dQ_0}\right) - E_{Q_1}(f_0) - 1 - E_P\left(\ln\frac{dQ_1}{dQ_0}\right) \geq 0.$$

相反地,令 $c = 1 - I(Q_0,P)$,

$$f_0 = I(Q_0, P) - 1 + \frac{dP}{dQ_0} + \ln\frac{dP}{dQ_0}.$$

则(i) 和(ii) 成立. 利用引理 1,有

$$0 \le \frac{d}{dx}S(Q_x, P)\,|_{x=0} = E_{Q_1}\left(\ln\left(\frac{dQ_0}{dP}\right)\right) - I(Q_0, P) + 1 - E_P\left(\frac{dQ_1}{dQ_0}\right) = - E_{Q_1}(f_0).$$

因此(iii) 成立.

**定理 3**　设 $C = K - L_+^\infty(P)$ 和 $\overline{C}^Q$ 表示 $C$ 在 $L^1(Q)$ 中的闭包,则 $C_0 = \bigcap_{Q\in \mathbf{M}^0} \overline{C}^Q$.

证　若 $Q \in \mathbf{M}_e$, 则对任意 $f \in C$ 显然有 $E_Q(f) \le 0$, 因此 $\bigcap_{Q\in \mathbf{M}^0}\overline{C}^Q \subseteq C_0$. 相反地,我们利用反证法. 设 $Q \in \mathbf{M}^0$, $f_0 \in C_0$,但 $f_0 \notin \overline{C}^Q$. 根据 Hahn-Banach 定理[9], 存在 $\eta \in L^\infty(Q)$ 使得 $0 = \sup_{f\in C}E_Q(\eta f) < E_Q(\eta f_0)$. 又因为 $-1_{\{\eta<0\}} \in C$, 显然有 $\eta \ge 0$ $Q$-a.s.. 记 $\eta^1 := \eta/E(\eta)$,进一步,设 $dQ_1/dQ = \eta^1$,我们知道 $Q_1 \sim Q$. 因 $K \subseteq C$ 是一个线性空间, 所以对任意 $f \in K$, 由 $\sup_{f\in C}E_Q(\eta f) = 0$ 可以得到 $E_{Q_1}(f) = 0$,进而 $Q_1 \in \mathbf{M}_e$. 再根据 $\eta^1 \in L^\infty(Q)$ 和 $Q \in \mathbf{M}^0$,知道

$$S(Q_1, P) = E_Q(\eta^1 \ln \eta^1) + E_P\left(\eta^1 \frac{dQ}{dP}\ln\left(\frac{dQ}{dP}\right)\right) - E_P(\ln \eta^1) + I(P, Q) < +\infty,$$

所以, $Q_1 \in \mathbf{M}^0$. 而 $E_{Q_1}(f_0) > 0$,与 $f_0 \in C_0$ 矛盾.

**推论 1**　如果定理 2 的 (i) 和 (ii) 成立, 且 $S(\mathbf{M}_e, P) < +\infty$,则

a) 若 $f_0 \in K$ 或 $f_0 \in C$, 则 $Q_0$ 是 MSEM;

b) 若 $Q_0$ 是 MSEM, 则 $f_0 \in \overline{C}^{Q_0} \cap \mathbf{L}$ 或 $f_0 \in \overline{K}^{Q_0} \cap \mathbf{L}$($\overline{K}^Q$ 表示 $C$ 在 $L^1(Q)$ 中的闭包).

对于离散时金融市场,即交易只在整数时 1,2,…, $T$ 发生时,给出下面的结论. 首先,记

$$\overset{\Lambda}{K} := Lin\left\{\sum_{t=1}^T \phi_t \cdot (S_t - S_{t-1}) : \phi \in L^0(P)\right\},$$

$$K_0 := \overset{\Lambda}{K} \cap \mathbf{L}.$$

类似文献[6] 中的定理 2.5 证明,可得以下定理.

**定理 4**　如果用 $K_0$ 代替 $C_0$,定理 2 仍然成立.

## 2　对称熵鞅测度的金融解释

投资组合的最优化,通常是基于效用函数期望的最大化.

**定义 3**　1) 如果一个函数 $u: R \to R$ 满足:

a) $u$ 是二次可微;

b) $\lim_{x\to\infty} u'(x) = 0$;

c) 对任意的 $x \in R$, $u'(x) > 0$, $u''(x) < 0$,

则称 $u$ 是一个效用函数.

2) 我们用 $\mathbf{L}'(S)$ 表示满足 $E_P(|V_T(\phi)|) < \infty$的所有投资组合 $\phi$ 的集合.

3) 如果一个投资组合 $\phi \in \mathbf{L}'(S)$ 满足对任意的投资组合 $\phi \in \mathbf{L}'(S)$ 都有

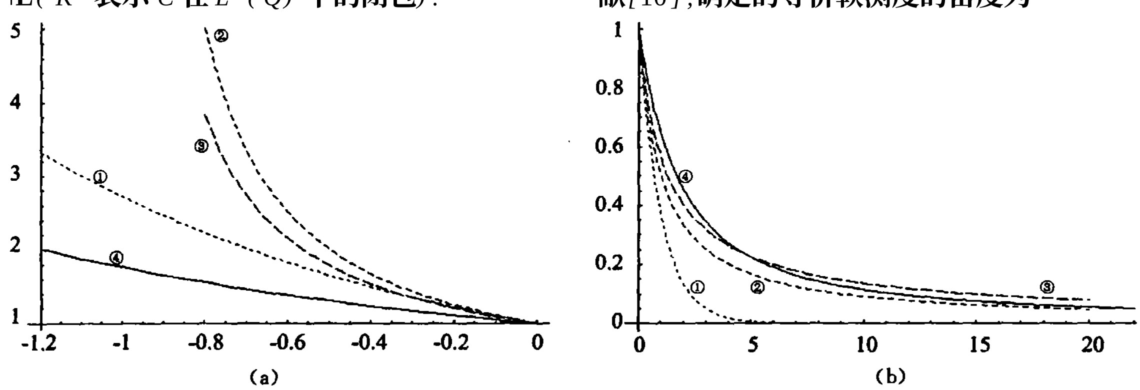
$$E_P(u(V_T(\phi))) \ge E_P(u(V_T(\phi))),$$

则 $\phi$ 被称为 $u$ - 最优的.

这样,得到 $u$- 最优的 $\phi$ 就是求解下面的问题:

$$\sup_{\phi\in\mathbf{L}'(S)} E_P(u(V_T(\phi))).$$

设 $x := V_0(\phi)$, $U_x := \sup_{\phi\in\mathbf{L}'(S)} E_P(u(V_T(\phi)))$. 知道 $x$ 与 $\phi$ 无关. 由文献[10],确定的等价鞅测度的密度为




(a)　　　　(b)

图 1　4 种函数曲线图　(a): $y \ge 1$; (b): $0.1 \le y \le 1$

①$y = e^{-x}$　②$y = (x+1)^{-\frac{5}{6}}$　③$y = (x+1)^{-1}$　④$y + xy + y\ln y = 1$

Fig. 1　Graphs of functions

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = \frac{u'(V_T(\phi))}{U'_x},$$

其中 $\phi$ 是一个 $u$- 最优的投资策略.

现在,回到最小对称熵鞅测度. 假设 $S$ 有界. 若 $S(\mathbf{M}_e, P) < +\infty$,则存在惟一的 MSEM $Q_0 \in \mathbf{M}_e$. 特别是对于一个离散时金融市场,由定理 2,知

$$\left(\frac{\mathrm{d}Q_0}{\mathrm{d}P}\right)^{-1} - \ln\frac{\mathrm{d}Q_0}{\mathrm{d}P} = c + f_0,$$

其中 $f_0 = \sum_{t=1}^{T}\phi_t \cdot (S_t - S_{t-1}) \in K_0$, $c = 1 - I(Q_0, P)$. 因此,最小对称熵鞅测度所对应的效用函数 $u$ 应满足下式(其中 $a = U_x$ 是常数):

$$(au'(x))^{-1} - \ln(au'(x)) = c + x.$$

常见的效用函数有 $u_1(x) := \ln(x+1)$, $u_2(x) := -e^{-x}$ 和 $u_3(x) := (x+1)^{1-b}/(1-b)$, $0 < b < 1$ 等. 它们分别满足:

$$u'_1(x)^{-1} = x + 1; \quad -\ln(u'_2(x)) = x;$$

$$u'_3(x) = (x+1)^{-b}.$$

我们利用图形来对 $u'$, $u'_1$, $u'_2$, $u'_3$ 进行比较. 不失一般性,取 $a = c = 1$ 和 $b = 5/6$,分别令 $y = u'$, $u'_1$, $u'_2$, $u'_3$ 得到 4 条曲线方程为:

$$y + xy + y\ln y = 1 \qquad (1)$$

$$y = (x+1)^{-1}, \quad x > -1 \qquad (2)$$

$$y = e^{-x} \qquad (3)$$

$$y = (x+1)^{-5/6}, \quad x > -1 \qquad (4)$$

从图 1,可知,当 $y > 1$ 时, $u'$ 的值最小. 对 $y \le 1$, $u'$ 和 $u'_1$ 最接近.

## 参考文献:


[1] El Karoui N, Quenez M C. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market[J]. SIAM J. Control Optim., 1995, 33:29 - 66.

[2] Föllmer H, Schweizer M. Hedging by sequential regression: an introduction to the mathematics of option trading[J]. ASTIN Bulletin, 1989, 18: 147 - 160.

[3] Delbaen F, Schachermayer W. The variance-optimal martingale measure for continuous processes[J]. Bernoulli, 1996, 2: 81 - 105.

[4] Csiszar I. I-divergence geometry of probability distribution and minimization problems[J]. Ann. Prob., 1975, 3(1): 146 - 158.

[5] Delbaen F, Grandits P, Rheinländer Th, et al. Exponential hedging and entropic penalties[J]. Math. Finance, 2002, 12: 99 - 123.

[6] Frittelli M. The minimal entropy martingale measure and the evaluation problem in incomplete markets[J]. Math. Finance, 2000, 10: 39 - 52.

[7] Mania M, Santacroce M, Tevzadze R. A semimartingale BSDE related to the minimal entropy martingale measure[J]. Finance Stochast, 2003, 7: 385 - 402.

[8] Rouge R, El Karoui N. Pricing via utility maximization and entropy[J]. Math. Finance, 2000, 10: 259 - 276.

[9] Meyer P A. Probability and Potentials[M]. Waltham Mass: Blaisdell Publishing Company, 1966.

[10] Davis M H A. Option pricing in incomplete markets[A]. Mathematics of Derivative Securities[C]. England: Cambridge University Press, 1997. 216 - 226.


# The Minimal Symmetric Entropy Martingale Measure and the Valuation Problem in Incomplete Markets

TANG Si-ying, LIU Ji-chun, DU Li-jin

(School of Mathematical Science, Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

**Abstract:** Under the assumption that the set $\mathbf{M}_e \neq \phi$ of equivalent martingale measures, the concept of the minimal symmetric entropy martingale measure (MSEM) was brought out. Then by the new rule, a martingale measure was found, and sufficient conditions for the existence of a unique equivalent martingale measure that minimizes the symmetric entropy was given. Moreover, the characterization of the density of the minimal symmetric entropy martingale was provided. Finally, the equivalence between the minimization of the symmetric entropy and the maximization of the utility function was discussed.

**Key words:** equivalent martingale measure; symmetric entropy martingale measures; incomplete markets