文章编号:0438-0479(2004)04-0460-05

一族GARCH模型的概率性质

李正开, 刘继春, 姚伟杰
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 简要回顾了异方差ARCH(GARCH)模型的有关背景, 并以此为基础提出了一族广义自回归条件异方差(GARCH)模型 $h_t^{\delta} = g_{t-1} + c_{t-1}h_{t-1}^{\rho}$, 然后讨论了这族广义自回归条件异方差(GARCH)模型的严平稳性及遍历性, 同时给出了该模型存在高阶矩的充分条件, 并对这族GARCH模型的一类子模型进行了模拟.

关键词: 广义自回归条件异方差; 严平稳性; 遍历性; 惟一性; 模拟
中图分类号: O 211.6 文献标识码: A

自回归条件异方差(ARCH)的时间序列模型, 最早由Engle[1]提出: 假定预测误差 ε_t 为实随机变量, 记 F_t 为时刻 t 的信息集, 且

$$\begin{cases} \varepsilon_t = z_t h_t^{1/2}; \\ h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2; \\ z \sim \text{i.i.d.},\ E(z_t) = 0,\ Var(z_t) = 1. \end{cases}$$

其中, h_t 是 ε_t 在给定信息集合 F_{t-1} 时的条件方差, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \cdots, q$.

Bollerslev[2] 将上述ARCH模型推广到广义ARCH(GARCH)模型, 即再把时刻 t 之前的条件方差也加入到时刻 t 的条件方差函数之中:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j},\quad \beta_j \geqslant 0, j = 1, 2, \cdots, p.$$

之后, 许多计量经济研究者还把GARCH模型推广为EGARCH(exponential-GARCH)、AVGARCH(absolute value GARCH)、NLGARCH(nonlinear GARCH)、TGARCH(threshold GARCH)模型等等.

He等人[3] 将多种GARCH模型综合成下面的形式(沿用文献[3]的有关说法, 我们不妨称之为general GARCH族), 并给出矩的性质:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = z_t h_t; \\ h_t^k = g(z_{t-1}) + c(z_{t-1}) h_{t-1}^k,\quad k = 1 \text{ 或 } 2; \\ P\{h_t^k > 0\} = 1. \end{cases}$$

Ling等人[4] 进一步研究了general GARCH的平稳性和矩的存在性.

Diebolt等人[5] 提出 β-ARCH的概念, 接着, Guégan等人[6] 给出了 β-ARCH的概率性质, Hili[7] 讨论了 β-ARCH的估计问题. 该模型为:

$$X_t = aX_{t-1} + \{a_0 + [\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i^{+}(X_{t-i})^{+} + a_i^{-}(X_{t-i})^{-})]^{2\beta}\}^{1/2}\varepsilon_t.$$

而 β-ARCH的直接推广就是 β-GARCH:

$$\begin{cases} X_t = \varepsilon_t h_t^{1/2}, \\ h_t = \sum_{j=1}^{q} b_j h_{t-j} + \{a_0 + [\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{+}(X_{t-i})^{+} + a_i^{-}(X_{t-i})^{-})]^{2\beta}\}^{1/2}. \end{cases}$$

β-ARCH(β-GARCH)的优点在于: 首先, 当 $\beta = 1$ 时即是一般意义下的ARCH(GARCH), 因此 β-ARCH(β-GARCH) 适用性比ARCH(GARCH)强; 而且, β-ARCH(β-GARCH) 模型突破了ARCH(GARCH)只允许出现二次形式的限制, 而且系数满足很弱的条件模型就存在平稳遍历解; 此外, β-ARCH(β-GARCH)模型在金融应用中有重要的价值[6].

本文中将He[3] 的general GARCH扩展成类似于 β-GARCH的形式, 并给出这族GARCH模型的平稳遍历解, 高阶矩存在的充分条件, 并对基本模型进行了模拟.

1 基本模型及其性质

在此, 首先考虑下面的GARCH(1,1)模型(基本模型):

收稿日期: 2003-11-05
基金项目: 厦门大学校级自选课题(0020Y07008)
作者简介: 李正开(1977-), 男, 硕士研究生.

$$
\begin{cases}
\varepsilon_t = z_t h_t^k; \\
h_t = g(z_{t-1}) + c(z_{t-1}) h_{t-1}^{\gamma} \triangleq g_{t-1} + c_{t-1} h_{t-1}^{\gamma}; \\
P\{h_t > 0\} = 1.
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中 $z \sim$ i. i. d.; $E[z_t] = 0$, $E[z_t^2] = 1$; $g(\cdot)$, $c(\cdot) > 0$; $Eg_t < \infty$, $Ec_t < \infty$; $0 < \gamma \leqslant 1$; $k = 1$ 或 $\frac{1}{2}$.

可以直观地从模型(1) 本身看出, 当 $k = 1$, $\gamma = 1$ 时, 就是文献[3] 的 general GARCH(1, 1); 而模型(1) 在形式上非常类似于文献[6] 的 β-GARCH(1, 1), 在后面又可以发现模型(1) 在概率性质上也非常类似于文献[6] 的 β-GARCH(1, 1), 所以有理由认为这族模型有比较广泛的适用性.

注 1　首先考虑模型(1) 的原因在于: 这族模型比较简单, 可以比较容易得到其有关性质, 而在下一节中扩展模型的有关性质是模型(1) 的性质的简单推广, 证明并未有本质区别; 另外, 模型(1) 还是许多模型的概括[3, 4].

注 2　k 取 1 或 $\frac{1}{2}$ 是因为: 当 $k = 1$ 时, 将 h_t 理解成 ε_t 的条件标准差, 而且与 He 等人[3] 的 general GARCH 统一起来; 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, h_t 就是最常见的 ε_t 的条件方差; 而且无论 $k = 1$ 还是 $k = \frac{1}{2}$, 都不会对模型带来本质的影响, 二者的区别仅仅在于: k 的取值会影响 ε_t 矩阶数确定, 读者很容易在我们的证明中看到这一点.

注 3　当考虑 ε_t 的 r 阶矩时, 若没有特别地说明, 自然地认为 z_t 的 r 阶矩存在.

注 4　模型(1) 还没有完全包含文献[3, 4] 中的 general GARCH 模型, 然而我们的扩展模型可以完全涵盖这族模型.

下面给出主要的定理, 定理的证明在后面给出. 我们只给出 $k = 1$ 时的情形, 这主要是与文献[3] 的有关结论对应起来; 对于 $k = \frac{1}{2}$ 的情形, 证明和结论完全类似, 只是注意 ε_t 矩的阶数.

定理 1　当 $\gamma \in (0, 1)$ 时, 模型(1) 有惟一平稳遍历解; 当 $\gamma = 1$ 时, 且 $Ec_t < 1$, 模型(1. 1) 有惟一平稳遍历解.

定理 2　设 $Eg_t^m < \infty$, $Ec_t^m < \infty$, 则当 $\gamma \in (0, 1)$ 时, 模型(1) 有 m 阶矩; 当 $\gamma = 1$ 时, 且 $Ec_t^m < 1$, 模型(1) 有 m 阶矩.

由定理 1 和定理 2 可以看出, 当 $\gamma \in (0, 1)$ 时, 模型(1) 的一个优越性体现在无需 $Ec_t < 1$ 这样的条件, 这个条件在一般常见的 ARCH(GARCH) 中即是要求系数矩阵(的 Kronecker 积) 的谱半径小于 1(有关内容可以参见文献[8]), 但是, 在作参数估计时往往无法达到这个要求. 因此, 从理论上讲, 对模型(1) 进行参数估计时, 只需对一个参数加以限制即可实现良好的估计.

2　扩展模型及其性质

上面给出了模型(1) 的结论, 下面将模型(1) 扩展成为:

$$
\begin{cases}
\varepsilon_t = z_t h_t^k; \\
h_t^{\delta} = g_{t-1} + c_{t-1} h_{t-1}^{\rho}. \\
P\{h_t > 0\} = 1.
\end{cases}
\tag{2}
$$

其中 $z \sim$ i. i. d.; $E[z_t] = 0$, $E[z_t^2] = 1$; $g(\cdot)$, $c(\cdot) > 0$; $E[g_t] < \infty$, $E[c_t] < \infty$; $E[g_t^{\frac{1}{\delta}}] < \infty$, $E[c_t^{\frac{1}{\delta}}] < \infty$; $0 < \rho \leqslant \delta$; $k = 1$ 或 $\frac{1}{2}$.

至此, 模型(2) 完全包括了文献[3, 4] 的 general GARCH 模型,

在这里 k 仍然取 1, 模型(2) 的性质可以概括为下面的定理, 证明完全类似于模型(1), 证明不再另外给出, 只在后面给出一个概要.

定理 3　当 $0 < \rho < \delta$ 时, 模型(2) 有惟一平稳遍历解; 当 $\rho = \delta$ 时, 且 $Ec_t < 1$, 模型(2) 有惟一平稳遍历解.

定理 4　设 $Eg_t^m < \infty$, $Ec_t^m < \infty$, $Eg_t^{\frac{m}{\delta}} < \infty$, $Ec_t^{\frac{m}{\delta}} < \infty$, 则当 $0 < \rho < \delta$ 时, 模型(2) 有 m 阶矩; 当 $0 < \rho = \delta$ 时, 且 $Ec_t^m < 1$, 模型(2) 有 m 阶矩.

3　模型(1) 的模拟

我们模拟一个简单的模型:

$$
\begin{cases}
x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t; \\
\varepsilon_t = z_t h_t^{\frac{1}{2}}; \\
h_t = \alpha + \theta h_{t-1}^{\gamma}.
\end{cases}
\tag{3}
$$

注 5　第 2 个方程的右端不是 h_t 而是 $h_t^{\frac{1}{2}}$, 已经知道这并不影响我们所得的结果, 只是涉及矩的阶数, 只需稍微修正一些条件就可以得到我们希望的结论.

注 6　与模型(1) 比较, 在此 $g_t = \alpha$, $c_t = \theta$, 并

且假设模型(3) 中的参数已经满足模型(1) 以及定理1之条件. 以后若无特别说明, 都假定满足所需条件.

我们利用SAS系统模拟了该模型, 共产生了 $n = 200$ 个观测值. 当 ε_t 服从条件正态分布和条件 t 分布时, 分别采用极大似然法(MLE) 和伪极大似然法(QMLE) 进行参数估计. 结果如表1.

进一步, 我们模拟更复杂的模型:

$$\begin{cases} x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t; \\ \varepsilon_t = z_t h_t^{\frac{1}{2}}; \\ h_t = \alpha_0 + \alpha_1(\varepsilon_{t-1}^2)^{\gamma} + \theta h_{t-1}^{\gamma}. \end{cases} \tag{4}$$

注7 在此, $g_t = \alpha_0$, $c_t = \alpha_1(z_t^2)^{\gamma} + \theta$.

这次模拟出的观测值共 $n = 4\ 000$ 个, 模拟的结果如表2.

关于模拟结果的一些结论和说明:

1) 从以上的比较结果可以看出, 我们的模型从本质上不会给参数估计带来困难. 另外, 随着观测值个数 n 的增加, 估计结果的精度会显著提高(限于篇幅, 在此未将其它结果列于表中).

2) 当 ε_t 的条件分布是 $t(5)$ 时, 我们采用QMLE方法对每一组参数进行估计, 其结果在很大程度上是令人满意的. 这说明当 ε_t 的条件分布离正态较远时, 利用QMLE方法估计我们的模型还是在一定程度上可以得出不错的结果.

3) 我们两个模型使用不同的模拟观测值个数, 是因为模型(4) 当采用QMLE方法估计参数且观测值个数 $n = 1000$ 时或更少时, α_0, α_1 的估计值会比较差(MLE方法不存在此类问题), 但是随着 n 的增加, 估计效果会变得越来越好. 这似乎说明: 我们模

表1 模型(3) 参数的估计值之比较

Tab. 1 The comparison between several different estimations of the model(3)

参数真值		φ_1	φ_2	α	θ	γ
		0.5	0.2	1	2	0.8
估	Normal*	0.490813	0.215751	1.000097	1.999875	0.794817
计	$t(30)$**	0.573639	0.212284	1.000313	2.000609	0.794339
值	$t(5)$***	0.528167	0.184356	0.999864	1.997653	0.783290
参数真值		φ_1	φ_2	α	θ	γ
		0.6	0.3	0.5	1.25	0.85
估	Normal*	0.593647	0.305297	0.500567	1.254783	0.855200
计	$t(30)$**	0.582397	0.308170	0.499818	1.249174	0.848204
值	$t(5)$***	0.573590	0.223238	0.503766	1.263581	0.871715

* 表示 ε_t 的条件分布为正态分布, 参数估计方法为MLE.

** 表示 ε_t 的条件分布为 t 分布, 自由度为30, 参数估计方法为QMLE.

*** 表示 ε_t 的条件分布为 t 分布, 自由度为5, 参数估计方法为QMLE. (下同)

表2 模型(4) 参数的估计值之比较

Tab. 2 The comparison between several different estimations of the model(4)

参数真值		φ_1	φ_2	α_0	α_1	θ	γ
		0.5	0.2	1	0.6	2	0.8
估	Normal	0.479022	0.190689	1.002656	0.631992	1.993106	0.801339
计	$t(30)$	0.451735	0.234524	1.000570	0.604830	1.995310	0.796901
值	$t(5)$	0.512505	0.176465	1.0014649	0.670276	1.879509	0.810535
参数真值		φ_1	φ_2	α_0	α_1	θ	γ
		0.6	0.3	0.5	0.75	1.25	0.85
估	Normal	0.563598	0.3400785	0.499314	0.747927	1.250242	0.852581
计	$t(30)$	0.579733	0.322986	0.516383	0.772427	1.210619	0.852753
值	$t(5)$	0.635289	0.277055	0.590641	0.701722	1.110964	0.881392

型的参数估计, QML Estimator 与 ML Estimator 存在着渐进相合性(ARCH 模型在这方面的渐进理论, 参见 Weiss[9]). 目前在理论上, 我们还没有证明出这个猜想.

4) 对于模型(4) 需用大量数据(约2 500个观测以上) 才能得出较好的估计值, 一个合理的解释是该模型可能较适用于高频数据情形.

4　有关证明

4.1　定理 1 的证明

分成两部分来证明定理 1.

当 $\gamma = 1$ 时, 见文献[3, 4]. 下面仅讨论 $0 < \gamma < 1$ 的情形.

(i) h_t 是平稳遍历的.

令

$$\begin{cases} h_t^{(0)} = g_{t-1}; \\ h_t^{(n)} = g_{t-1} + c_{t-1}[h_{t-1}^{(n-1)}]^{\gamma}. \end{cases} \tag{5}$$

(a) 命题 1: $\{h_t^{(n)}\}$ 关于 n 是增的.

证明 (用归纳法可证明: $\forall t, h_t^{(n)} > h_t^{(n-1)}$.)

事实上, 当 $n = 0$ 时, 显然 $\forall t, h_t^{(1)} > h_t^{(0)}$. 假设, $\forall t, h_t^{(k)} > h_t^{(k-1)}$, 则由

$$h_t^{(k+1)} = g_{t-1} + c_{t-1}[h_{t-1}^{(k)}]^{\gamma},$$

$$h_t^{(k)} = g_{t-1} + c_{t-1}[h_{t-1}^{(k-1)}]^{\gamma},$$

以及, 由归纳假设 t 的任意性知

$$h_{t-1}^{(k)} > h_{t-1}^{(k-1)}.$$

又因为 $c_{t-1} > 0$, $\gamma > 0$, 故有 $h_{t-1}^{(k+1)} > h_{t-1}^{(k)}$. 命题成立.

(b) 命题 2: $h_t^{(n)}$ 与 $h_{t-1}^{(n)}$ 同分布.

事实上, 若$\{z_t\}$ 是 i. i. d, 则 $f(z_1, \cdots, z_n)$ 与 $f(z_{i_1}, \cdots, z_{i_n})$ 同分布从而由 $h_t^{(n)}$ 的构造可知命题成立. 于是,

$$E[h_t^{(n)}] \leqslant E[g_{t-1}] + E[c_{t-1}][E(h_t^{(n-1)})]^{\gamma}.$$

令 $E[h_t^{(n)}] = x_n$, $E[g_{t-1}] = a$, $E[c_{t-1}] = b$, 于是上式变为:

$x_n \leqslant a + b(x_{n-1})^{\gamma}$, 其中, $\{x_n\}$ 是增的且大于 0, 并有 $a > 0$, $b > 0$.

(c) 命题 3: 若一个正的增序列$\{x_n\}$ 满足 $x_n \leqslant a + b(x_{n-1})^{\gamma}$, 以及 $a > 0$, $b > 0$, $\gamma \in (0, 1)$, 则$\{x_n\}$ 有界, 即存在 $M > 0$, 使得对所有 n 都有 $x_n < M$.

证明　首先当 $\gamma \in (0, 1)$, 总存在 M_1, 当 $x > M_1$ 时, $x > a + bx^{\gamma}$. 事实上,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{a + bx^{\gamma}} = +\infty.$$

假设$\{x_n\}$ 无界, 则存在 $x^{(0)} \in (M_1, \infty)$, 使得某个 $x_N = x^{(0)}$. 于是,

$$x_{N+1} \leqslant a + b[x_N]^{\gamma} = a + b[x^{(0)}]^{\gamma} < x^{(0)} = x_N,$$

这与$\{x_n\}$ 增相矛盾. 故, $\{x_n\}$ 有界.

(d) 命题 4: h_t 是遍历的.

证明　由(c) 知, 存在 $M > 0$, 使得对所有 n 都有 $E[h_t^{(n)}] < M$.

因此, $h_t^{(n)}$ 收敛a. s, 记为 $h_t^{(n)} \xrightarrow{a.s} h_t$, 从而, $h_t = g_{t-1} + c_{t-1}h_{t-1}^{\gamma}$ a. s. 由 $h_t^{(n)}$ 的构造知, h_t 为一列 i. i. d. r. v. 的函数, 从而 h_t 是遍历的. 进而 ε_t 是遍历的.

由上述证明, 还可以得出 h_t 平稳解的表达式: $h_t = \lim_{n\to\infty} h_t^{(n)}$, 其中, $h_t^{(n)}$, $n = 1, 2, \cdots$, 由式(5) 定义.

(ii) h_t 的惟一性.

设 h_t, $h_{1,t}$ 均为$h_t = g_{t-1} + c_{t-1}h_{t-1}^{\gamma}$ 的 a. s 解. 令

$$A = \{\omega: h_t(\omega) > 0, \text{且 } h_t(\omega) = g_{t-1}(\omega) + c_{t-1}(\omega)h_{t-1}^{\gamma}(\omega)\},$$

$$B = \{\omega: h_{1,t}(\omega) > 0, \text{且 } h_{1,t}(\omega) = g_{t-1}(\omega) + c_{t-1}(\omega)h_{1,t-1}^{\gamma}(\omega)\},$$

有 $P(A) = P(B) = 1$, 故 $P(A \cap B) = 1$. $\forall \omega \in A \cap B$, 且不妨假设, $h_t(\omega) \geqslant h_{1,t}(\omega)$,

由于 g_{t-1}, c_{t-1} 均大于 0, 且 h_t, $h_{1,t}$ 均为解, 所以有 $h_{t-1}(\omega) \geqslant h_{1,t-1}(\omega)$. 进而有, $\forall i = 0, 1, 2, \cdots$, $h_{t-i}(\omega) \geqslant h_{1,t-i}(\omega)$.

所以, 利用微分中值定理以及上述不等式有:

$$\begin{aligned} |h_t(\omega) - h_{1,t}(\omega)| &= \\ c_{t-1}(\omega)(h_{t-1}^{\gamma}(\omega) - h_{1,t-1}^{\gamma}(\omega)) &\leqslant \\ \gamma \frac{h_{1,t}(\omega)}{h_{1,t-1}(\omega)}(h_{t-1}(\omega) - h_{1,t-1}(\omega)) &\leqslant \\ \gamma^k \frac{h_{1,t}(\omega)}{h_{1,t-k}(\omega)}(h_{t-k}(\omega) - h_{1,t-k}(\omega)). \end{aligned}$$

由于存在 M_2, $\forall t$, $0 < g_t(\omega) < h_{1,t}(\omega) < M_2$, 所以

$$|h_t(\omega) - h_{1,t}(\omega)| \leqslant \gamma^k \frac{M_2}{g_t(\omega)}(M_2 - g_t(\omega)).$$

当 $k \to \infty$ 时, 不等式右端趋于 0.

所以, $\forall \omega \in (A \cap B)$, $h_t(\omega) = h_{1,t}(\omega)$. 由 $P(A \cap B) = 1$ 知:

$h_t = h_{1,t}$ a. s.

综上所述, 定理 1 得证.

4.2 定理 2 的证明

设 m 为一个正整数, 且有 $E[g_t^m] < \infty$, $E[c_t^m] < \infty$, 利用 C_r- 不等式得:

$$h_t^m = (g_{t-1} + c_{t-1}h_{t-1}^{\gamma})^m \leqslant C_r g_{t-1}^m + C_r{}^m c_{t-1}(h_{t-1}^m)^{\gamma} \triangleq g_{t-1}^* + c_{t-1}^*(h_{t-1}^m)^{\gamma}.$$

其中 $g_{t-1}^* = C_r g_{t-1}^m$, $c_{t-1}^* = C_r c_{t-1}^m$. 记 $h_t^m = h_t^*$, 则

$$h_t^* \leqslant g_{t-1}^* + c_{t-1}^*(h_{t-1}^*)^{\gamma}.$$

取 $h_t^{*(n)} = [h_t^{(n)}]^m$, 完全类似于(4.1) 的讨论, 存在 M_3, 对所有 t 和 n, $E[h_t^{*(n)}] < M_3$.

于是, 存在 ξ_t, $E\xi_t < \infty$ 使得 $h_t^{*(n)} \xrightarrow{a.s} \xi_t$, 由于 $h_t^{(n)} \xrightarrow{a.s} h_t$, 所以 $\xi_t = (h_t)^m$ a.s. 也就是说, $E[h_t^{*(n)}] \to E[(h_t)^m]$, 故 $E[(h_t)^m] < \infty$.

定理 2 证毕.

4.3 定理 3 和定理 4 的证明

定理3、4的证明完全类似于定理1、2, 以下仅给出概要. 当 $\delta = \rho$ 时, 见[3, 4], 在此仅说明 $\delta > \rho$.

令 $w_t = h_t^{\delta}$, 则模型变为:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = z_t w_t^{\frac{1}{\delta}}; \\ w_t = g_{t-1} + c_{t-1}w_{t-1}^{\gamma}. \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\gamma = \dfrac{\rho}{\delta} \in (0, 1)$.

于是由模型条件知 w_t 有惟一平稳解, 即 h_t^{δ} 有惟一平稳解, 且由 $f(x) = x^{\delta}$ 单调及 $E[g_t^{\frac{1}{\delta}}] < \infty$, $E[c_t^{\frac{1}{\delta}}] < \infty$ 知, h_t 有惟一平稳遍历解, 从而 ε_t 有惟一平稳遍历解.

有关高阶矩的讨论完全类似 4.2.

参考文献:

[1] Engle R F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation[J]. Econometrica, 1982, 50(4): 987-1 007.

[2] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity[J]. J. Econometrics, 1986, 31: 307-327.

[3] He C, Ter-svirta T. Properties of moments of a family of GARCH processes[J]. J. Econometrics, 1999, 92: 173-192.

[4] Ling S, McAleer M. Stationarity and the existence of moments of a family of GARCH processes[J]. J. Econometrics, 2002, 106: 109-117.

[5] Diebolt J, Guégan D. Le modéle de série chronologique autorégressif β-ARCH[J]. C. R. Acad. Sci. Paris, 1991, 312(I): 33-36.

[6] Guégan D, Diebolt J. Probabilistic properties of the β-ARCH model[J]. Stat. Sinica, 1994, 4: 151-183.

[7] Hili O. On the estimation of β-ARCH model[J]. Stat. and Prob. Letters, 1999, 45: 285-293.

[8] 安鸿志, 陈敏. 非线性时间序列分析[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1998.

[9] Weiss A A. Asymptotic theory for ARCH models: estimation and testing[J]. Econometric Theory, 1986, 2: 107-131.

On the Probabilistic Properties of a Family of GARCH Models

LI Zheng-kai, LIU Ji-chun, YAO Wei-jie

(School of Mathematical Science, Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract: In this paper, we briefly review the history of ARCH(GARCH) models. And basing on the background, we develop a family of GARCH model $h_t^{\delta} = g_{t-1} + c_{t-1}h_{t-1}^{\rho}$, then discuss the strict stationarity and ergodicity of a family of GARCH models, and give the sufficient conditions for the existence of higher-order moments of the models. We also simulate a sub-family of models in our models.

Key words: GARCH; strict stationarity; ergodicity; uniqueness; simulation