第43卷 第3期
2004年5月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol. 43 No. 3
May 2004

文章编号: 0438-0479(2004)03-0302-04

局部风险最小下保险合约的套期保值

杜立金, 刘继春, 汤思英
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 单位联系保险合约的偿付额与金融市场中某特定股票的价格有关, 我们考虑一同时描述金融市场和保险群体不确定性的模型, 其不完全性来源于股价的混合扩散和保险个体的死亡, 我们给出该模型下的最小鞅测度并在局部风险最小准则下考查单位联系寿险合约的套期保值问题.

关键词: 最小鞅测度; 局部风险最小; Föllmer-Schweizer 分解; 单位联系保险

中图分类号: O 211.9; F 840.62 文献标识码: A

由于寿险业竞争激烈和市场风险的加大, 上世纪70年代美国寿险市场最早开始出现偿付额与金融市场投资收益相关联的保险合约. 该类型合约将投资风险部分或全部转移给保单持有人. 单位联系保险合约(unit-linked insurance contracts)偿付额是某特定股票价格的函数, 可看作或有债权, 其风险来源于金融市场和被保险群体. Møller(1998)[1] 在这类保险合约中引入局部风险最小准则, 给出市场模型服从几何 Brown 运动时单位联系保险合约的套期保值策略. Møller(2000)[2] 中不再将市场模型限制在几何 Brown 运动而是考虑连续半鞅, 保险风险源含不连续部分且与金融市场有相关性时的保值策略. 我们考虑在市场模型是带跳的混合扩散模型下, 保险风险源是与金融市场独立的 Poisson 过程时的局部风险最小套期保值策略. 金融市场中的局部风险最小理论见文献[3~7]等.

1 市场模型和局部风险最小理论

给定$(\Omega, \mathscr{F}, P)$和右连续完备化 σ-域流 $F = (\mathscr{F}_t)_{0\leqslant t\leqslant T<\infty}$($T$ 是一定值, 标记合约到期日, $\mathscr{F}_t$ 表示在 t 时刻已知的所有有关信息), 考虑混合扩散模型

$$\begin{cases} dB_t = B_t r_t dt \\ dS_t = S_{t-}(B_t dt + \sigma(t, S_{t-}) dW_t + \\ \quad \phi(t, S_{t-}) dM_t^m) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $B := (B_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$(下面 S, M 等均省略下标以表示整个过程)为无风险债券, S 为股票价格过程, $M = N^m - \int \lambda_u du$($m$ 表示市场)为补偿 Poisson 过程, λ_t 为 t 时刻 Poisson 过程的强度, M^m 与 W 独立. 记 $\mathscr{G}_t := \sigma(W_s, M_s^m; s \leqslant t)$, 也即 $\mathscr{G}_t = \sigma(S_s: s \leqslant t)$, 记 $\mathscr{G} = (\mathscr{G}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$. 对系数的假设有:

1) 利率 r_t 和跳强度 λ_t 是非负确定性有界函数, 漂移率 b_t 有界且 $\mathscr{G}$-可料;

2) $\sigma: [0, T] \times (0, \infty) \to R^+$ 关于(t, x)连续且 Höllder 连续, 且 $0 < k_1 < \sigma(t, x) \leqslant k_2$;

3) $\phi: [0, T] \times (0, \infty) \to (-1, \infty)$, 且 $0 < k_1 < |\phi(t, x)| < k_2$, $\phi(t, x) \geqslant \varepsilon > -1$.

k_1, k_2, ε 为实数. 除特别指明, 下边书写的系数均为上面定义的函数形式.

由式(1)股票贴现价格过程 $S_t^* = (S_t / B_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 满足

$$dS^* = S_-^*((b - r)dt + \sigma dW + \phi dM^m),$$

这里 S^* 为半鞅, 此时有 Doob-Meyer 分解

$$S^* = S_0 + M + A.$$

其中 $M = \int S_-^*(\sigma dW + \phi dM^m)$ 是零初值一致可积 $\mathscr{G}$ 鞅, $A = \int S_-^*(b - r)dt$ 是零初值有限变差过程, 进一步假设 M 和 A 平方可积.

Bellamy & Jeanblanc[8] 考查了该市场模型的不完全性, 证明了 S^* 的等价鞅测度不唯一. 我们后面考虑以 Föllmer & Schweizer[4] 提出的最小鞅测度作为价格测度, 给出该模型下保险债权的局部风险最小套期保值策略.

收稿日期: 2003-11-05

作者简介: 杜立金(1980-), 男, 硕士研究生.

投资策略 $\varphi=(\xi,\eta)$, ξ 是可料的, 为投资于股票的份数, η 为相应的无风险债券份数, 价值过程和相应贴现价值过程分别为

$$\hat{V}_t=\xi_t S_t+\eta_t B_t,\quad V_t=\xi_t S_t^*+\eta_t.$$

定义成本过程

$$C_t(\varphi):=V_t(\varphi)-\int_0^t \xi_u \mathrm{d}S_u.$$

投资策略 φ 的风险过程定义为

$$R_t(\varphi):=E((C_T(\varphi)-C_t(\varphi))^2\mid \mathscr{F}_t).$$

对一或有债权, 如欧式看涨期权, 记其在 t 时价值为 H, 若 $V_T(\varphi)=H$, 该组合策略 φ 称为 H- 允许的.

定义　一 H- 允许策略 φ 是局部风险最小的, 若相应成本过程 $C(\varphi)$ 是平方可积鞅且与 M 正交.

注　1) Schweizer[7] 给出了局部风险最小的直观定义: 设 $\Delta=(\varepsilon,\delta)$ 为策略 φ 的一个小扰动, τ 为 $[0,T]$ 的一个分割

$$\gamma^\tau[\varphi,\Delta](\Omega,t):=\sum_{t_i\in\tau}\frac{R_{t_i}(\varphi+\Delta|_{(t_i,t_{i+1}]})-R_{t_i}(\varphi)}{E[\langle M\rangle_{t_{i+1}}-\langle M\rangle_{t_i}\mid F_{t_i}]}(\omega)\, I_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$$

若 $\lim_{n\to\infty}\inf \gamma^\tau[\varphi,\Delta]\geqslant 0$, $P-a.s.$, 则 φ 为局部风险最小投资策略. 可以证明在较一般的条件下, 定义 1 与 Schweizer 的定义等价(见文献[7] 命题 2.3).

2) $C(\varphi)\in M^2(P)$, 则称 φ 是均值自融资的. $M^2(P)$ 表示 P 下平方可积鞅全体.

命题 1[9]　半鞅模型下 H 的局部风险最小策略存在 $\Leftrightarrow H$ 有如下分解

$$H=H_0+\int_0^t \xi_u^H \mathrm{d}S_u+L_t^H,\ P-a.s.$$

其中 H_0 是常数, $\xi^H\in L^2(S)$, $L_t^H\in M^2(P)$ 且与 M 正交, 即 $L_t^H M$ 仍在 P 下是鞅, $L^2(S)$ 由下式定义

$$L^2(S)=\{\xi\mid \xi \text{实值可料且}(\int \xi^2\mathrm{d}\langle S\rangle)^{\frac{1}{2}} \text{平方可积}\}.$$

注　1) 该分解称为 H 的 Föllmer-Schweizer 分解;

2) 这时局部风险最小策略 $\varphi=(\xi^H,\eta^H)$, $\eta^H=V-\xi^H S$.

当 S 为鞅时, Föllmer-Schweizer 分解即为 Kunita-Watanable分解; 当 S 不是鞅时, Monat & Stricker[6] 给出一般条件下 F-S 分解存在性的证明. 假设 $A\ll\langle M\rangle$, 其可料密度为 $\alpha=(\alpha)_{0\leqslant t\leqslant T}$. 记 $\overline{K(t)}:=\int_0^t \alpha_u^2\mathrm{d}\langle M\rangle_u$. 下面不加证明的引用 M & S 的定理

命题 2[6]　若 $\overline{K(t)}$ 一致有界, 则 $\forall H\in L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$, 有唯一的 F-S 分解, 即若有

$$H=H_0+\int_0^T \xi^H \mathrm{d}S_s+L_T^H=H'_0+\int_0^T \xi'^H\mathrm{d}S_s+L_T'^H,$$

其中 (H_0,ξ^H,L^H) 与 (H'_0,ξ'^H,L'^H) 满足分解条件, 则

$$H_0=H'_0,\quad L^H=L'^H\ P-a.s.$$

$\xi^H=\xi'^H$ 在 $L^2(M)$ 意义下.

下面给出寻找 F-S 分解的具体方法[6,7,9]:

设 $\tilde{Z}$ 是 SDE

$$\begin{cases}\tilde{Z}_0=1\\ \mathrm{d}\tilde{Z}_t=-\alpha_t\tilde{Z}_{t-}\mathrm{d}M_t\end{cases}$$

的解. $\tilde{Z}:=\dfrac{\mathrm{d}\tilde{P}}{\mathrm{d}P}$, 由 $\overline{K}$ 一致有界, $\tilde{P}$ 是 S^* 的最小鞅测度, 定义 $V_t=\tilde{E}(H\mid F_t)$, V 在 $\tilde{P}$ 下是鞅, 取

$$\xi_t=\frac{\mathrm{d}\langle V_t,S^*\rangle_t}{\mathrm{d}\langle S^*,S^*\rangle_t},$$

$$L_t=V_t-V_0-\int_0^t \xi_u\mathrm{d}S_u^* \tag{2}$$

则 $\varphi_t=(\xi_t^H,\eta_t^H)$, $\eta_t^H=V_t-\xi_t S_t^*$. 这时 L_t 与 $\int_0^t \xi_u\mathrm{d}S_u^*$ 中鞅部分正交, 从而得到局部风险最小策略.

2　保险合约的套期保值

选定一年龄为 x 的群体, 采用 Møller[1] 的记号, l_x 表示群体人数, T_i 表示第 i 个个体的余命, 假设 $T_1,T_2,\cdots,T_{l_x}$ 是定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 i.i.d 非负 r.v, 且有连续的死力函数 μ_{x+t}, 生存函数

$${}_tp_x=P(T_x>t)=\exp(-\int_0^t \mu_{x+\tau}\mathrm{d}\tau).$$

定义计数过程 $N_t^i=(N_t^i)_{0\leqslant t\leqslant T}$ (i 表示保险),

$$N_t^i:=\sum_{l=1}^{l_x} I(T_l\leqslant t).$$

假设 N^i 与 S 独立, $\mathscr{H}=(\mathscr{H}_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$, 其中 $\mathscr{H}_t=\sigma(N_u^i;u\leqslant t)$.

$$E(\mathrm{d}N_t^i\mid \mathscr{H}_{t-})=(l_x-N_{t-}^i)\mu_{x+t}\mathrm{d}t=:\gamma_t\mathrm{d}t.$$

$\gamma_t\mathrm{d}t$ 称为 $\mathrm{d}N_t^i$ 的强度, 再定义 $\mathscr{H}$ 鞅

$$M_t^i = N_t^i - \int_0^t \gamma_u \mathrm{d}u.$$

取$\mathscr{F}_t = \mathscr{G}_t \vee H_t$,并记$\mathscr{F} = \mathscr{F}_T$,考虑生存保险,该保险合约规定参加者如果在 T 时刻生存将得到保额 $g(S_T)$,S_T 为T 时刻市场上股票价格.如纯单位联系保险 $g(S_T) = S_T$,带保证的单位联系保险 $g(S_T) = \max(S_T, K)$(其中 K 是公司承诺给付的最小值),作变形$g(S_T) = \max(S_T, K) = K + (S_T - K)^+$,就得到一常数与一欧式期权和的形式.公司对该群体的给付现值

$$H = g(S_T)B_T^{-1}\sum_{l=1}^{l_x} I(T_l > T) = g(S_T)B_T^{-1}(l_x - N_T^i).$$

对模型(1)满足命题2条件,最小鞅测度$\tilde{P}$由$\frac{\mathrm{d}\tilde{P}}{\mathrm{d}P}\Big|_{\mathscr{F}_t} = \tilde{Z}_t$定义,根据求F-S分解方法和可料密度$\alpha$定义取$\tilde{Z}$是

$$\mathrm{d}\tilde{Z}_t = -\frac{b-r}{S_{t-}^*(\sigma^2 + \phi^2\lambda)}\tilde{Z}_{t-}\mathrm{d}M_t$$

的解.再取价值过程

$$V_t = \tilde{E}(H \mid \mathscr{F}_t) = \tilde{E}[g(S_T)B_T^{-1}(l_x - N_T^i) \mid \mathscr{F}_t],$$

由N^i与S独立,

$$\begin{aligned} V_t &= B_T^{-1}\tilde{E}(\tilde{E}(l_x - N_T^i \mid \mathscr{G}_T \vee \mathscr{H}_t)g(S_t) \mid \mathscr{F}_t) = \\ &B_T^{-1}\tilde{E}(\tilde{E}(l_x - N_T^i \mid \mathscr{H}_t)g(S_T) \mid \mathscr{F}_t) = \\ &B_T^{-1}\tilde{E}(l_x - N_T^i \mid \mathscr{H}_t)\tilde{E}(g(S_T) \mid \mathscr{F}_t) = \\ &\tilde{E}((l_x - N_T^i) \mid \mathscr{F}_t)B_t^{-1}\tilde{E}(B_tB_T^{-1}g(S_T) \mid \mathscr{F}_t) \end{aligned} \quad (3)$$

其中第2个等号和最后1个等号可由典型方法得到.再由$l_x - N_T^i$表示余命超过t的个体总数以及N^i与S独立,从而$\mathscr{G}$,$\mathscr{H}$独立,

$$\tilde{E}(l_x - N_T^i \mid \mathscr{F}_t) = \tilde{E}(\sum_{l=1}^{l_x} I(T_l > t) \mid \mathscr{H}_t) = \sum_{l: T_l > t} {}_{T-t}p_{x+t} = (l_x - N_t^i)\,{}_{T-t}p_{x+t},$$

由${}_0p_{x+t} = 1$知$((l_x - N_t)\,{}_{T-t}p_{x+t})$是鞅.又

$$\tilde{E}(B_tB_T^{-1}g(S_T) \mid \mathscr{F}_t) = \tilde{E}(B_tB_T^{-1}g(S_T) \mid \mathscr{G}_t) =: F^g(t, S_t) \quad (4)$$

命题3 假设$F^g \in C^{1,2}$,$B_t^{-1}F^g(t, S_t)$在$\tilde{P}$下是鞅,则有分解

$$B_t^{-1}F^g(t, S_t) = F^g(0, S_0) + \int_0^t F_S^g \mathrm{d}S^* + \int_0^t (B_t^{-1}\Delta F^g - \phi S_-^* F_S^g)\mathrm{d}\tilde{M},$$

且满足方程

$$-r\overline{F}^g + F_t^g + (r - \phi\tilde{\lambda})S_- F_S^g + \frac{1}{2}\sigma^2 S_-^2 F_{SS}^g + \tilde{\lambda}\Delta F^g = 0,$$

其中$S_t = S_{t-}(1+\phi)$,$\Delta F^g = F^g(t, (1+\phi)S_{t-}) - F^g(t, S_{t-})$,$\tilde{M} = N_t^m - \int_0^t \tilde{\lambda}\mathrm{d}t$,$\tilde{\lambda} = \lambda(1 - \frac{(b-r)\phi}{\sigma^2 + \phi^2\lambda})$是Poisson过程$N^m$在$\tilde{P}$下强度.为书写方便我们用简写$\overline{F}^g$记$F^g(t, S_t)$,而用$F^g$记$F^g(t, S_{t-})$.

证明 由$B_t^{-1}F^g(t, S_t) = \tilde{E}(B_T^{-1}g(S_t) \mid \mathscr{F}_t)$和重期望性质可知$B_t^{-1}F^g(t, S_t)$在$\tilde{P}$下是鞅;由Ito公式

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(B_t^{-1}F^g) &= -rB_t^{-1}F^g\mathrm{d}t + B_t^{-1}\mathrm{d}F^g = \\ &B_t^{-1}(-r\overline{F}^g + F_t^g + rS_- F_S^g + \frac{1}{2}\sigma^2 S_-^2 F_{SS}^g)\mathrm{d}t + \\ &F_S^g(\sigma S_-^*\mathrm{d}w + \phi S_-^*\mathrm{d}M_t^m + (b-r)S_-^*\mathrm{d}t) - \\ &\phi S_-^* F_S^g \mathrm{d}N_t^m + B_t^{-1}\Delta F^g\mathrm{d}N_t^m = \\ &B_t^{-1}(-r\overline{F}^g + F_t^g + (r - \phi\tilde{\lambda})S_- F_S^g + \\ &\frac{1}{2}\sigma^2 S_-^2 F_{SS}^g + \tilde{\lambda}\Delta F^g)\mathrm{d}t + F_S^g\mathrm{d}S^* + \\ &(B_t^{-1}\Delta F^g - \phi S_-^* F_S^g)\mathrm{d}\tilde{M}. \end{aligned}$$

由Girsanov定理知S^*,$\tilde{M}$在$\tilde{P}$下是鞅,从而有命题中方程成立.

下面命题给出以或有债权形式出现的保险合约的套期保值策略.

命题4 单位联系生存保险的局部风险最小套期保值策略$\varphi = (\xi, \eta)$由下式给出

$$\xi_t = (l_x - N_{t-}^i)\,{}_{T-t}p_{x+t}[F_S^g + \frac{(B_t^{-1}\Delta F^g - \phi S_-^* F_S^g)\phi\lambda}{(\sigma^2 + \phi^2\lambda)S_-^*}] \quad (5)$$

$$\eta_t = V_t - \xi_t S_t^*.$$

证明 由独立性,知M^m与M^i是正交的,且$[M^m, M^i] = [N^m, N^i] = \sum_{0 \leqslant s \leqslant t}\Delta N^m \Delta N^i = 0 \quad P-a.s.$,故结合式(3)、(4),由Ito公式

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V_t &= B_t^{-1}F^g(t, S_t)\mathrm{d}((l_x - N_{t-}^i)\,{}_{T-t}p_{x+t}) + \\ &(l_x - N_{t-}^i)\,{}_{T-t}p_{x+t}\mathrm{d}(B_t^{-1}F^g(t, S_t)) = \\ &(l_x - N_{t-}^i)B_t^{-1}F^g(t, S_t)\,{}_{T-t}p_{x+t}\mu_{x+t}\mathrm{d}t + \\ &(l_x - N_{t-}^i)\,{}_{T-t}p_{x+t}\mathrm{d}(B_t^{-1}F^g(t, S_t)) + \\ &\Delta V_t\mathrm{d}N_t^i = (l_x - N_{t-}^i)\,{}_{T-t}p_{x+t}F_S^g\mathrm{d}S^* + \\ &(l_x - N_{t-}^i)\,{}_{T-t}p_{x+t}(B_t^{-1}\Delta F^g - \phi S_-^* F_S^g)\mathrm{d}\tilde{M} + \\ &(-B_t^{-1}\overline{F}^g\,{}_{T-t}p_{x+t})\mathrm{d}M^i. \end{aligned}$$

再由式(2)以及M^i与S^*独立,整理可得

$$\begin{aligned} \xi &= (l_x - N_{t-}^i)\,{}_{T-t}p_{x+t} \\ &[F_S^g\mathrm{d}\langle S^*, S^*\rangle + (B_t^{-1}\Delta F^g - \phi S_-^* F_S^g) \\ &\mathrm{d}\langle\tilde{M}, S^*\rangle]/\mathrm{d}\langle S^*, S^*\rangle = \end{aligned}$$

$$(l_x - N^i_{t-})\,{}_{T-t}p_{x+t}[F^g_S + \frac{(B_t^{-1}\Delta F^g - \phi S^*_- F^g_S)\phi\lambda}{(\sigma^2 + \phi^2\lambda)S^*_-}].$$

同时得到

$$L_t = V_t - V_0 - \int_0^t \xi_u \mathrm{d}S^*_u =$$
$$\int_0^t (l_x - N^i_{t-})\,{}_{T-t}p_{x+t} \times \frac{(\phi S^*_- F^g_S - B_t^{-1}\Delta F^g)\phi\lambda}{(\sigma^2 + \phi^2\lambda)S^*_-}\mathrm{d}M +$$
$$\int_0^t (l_x - N^i_{t-})\,{}_{T-t}p_{x+t}(B_t^{-1}\Delta F^g - \phi S^*_- F^g_S)\mathrm{d}M^m -$$
$$\int_0^t B_t^{-1}\overline{F}^g_{T-t}p_{x+t}\mathrm{d}M^i.$$

经过简单验证可知 L 与 M 正交, 由命题 1 得到 F-S 分解, 故取 ξ_t 如式(5) 得到策略 φ.

注　1) 当市场模型不连续时, 最小鞅测度 $\tilde{P}$ 下正交的鞅在 P 下不保持正交性, 若取 $\xi_t = \frac{\mathrm{d}\langle V_t, S^*\rangle_t^{\tilde{P}}}{\mathrm{d}\langle S^*, S^*\rangle_t^{\tilde{P}}}$, 则得到的 L 在 P 下与 M 不正交, 从而不能用 Kunita-Watanabe 分解.

2) 比较 Møller(文献[1] 定理4. 4) 的结果, 由于市场模型不连续式(5) 多了加号后面的分式项, 说明当金融市场不连续波动时, 应对连续波动时策略进行适当的调整, 调整幅度在式(5) 中给出.

参考文献:

[1] Møller T. Risk-minimizing hedging strategies for unit-linked life insurance contracts[J]. ASTIN Bull, 1998, 28: 17- 47.

[2] Møller T. Quadratic hedging approaches and indifference pricing in insurance[D]. Denmark: University of Copenhagen Denmark, 2000.

[3] Föllmer H, Sondermann D. Hedging of non-redundant contingent claims[A]. Contributions to Mathematical Economics[C]. Amsterdam: North Holland, 1986. 205- 223.

[4] Föllmer H, Schweizer M. Hedging of contingent claims under incomplete information[A]. Applied Stochastic Analysis, Stochastics Monographs Vol. 5[C]. London/New York: Gordon and Breach, 1991. 389- 414.

[5] Heath D, Platen E, Schweizer M. A comparison of two quadratic approaches to hedging in incomplete markets [J]. Mathematical Finance, 2001, 11: 385- 413.

[6] Monat P, Stricker C. Föllmer-Schweizer decomposition and mean-variance hedging of general claims[J]. Annal of Probability, 1995, 23: 605- 628.

[7] Schweizer M. Option hedging for semimartingales[J]. Stochast. Proc. Appl., 1991, 7: 339- 363.

[8] Bellamy N, Jeanblanc M. Incompleteness of markets driven by a mixed diffusion[J]. Finance and Stochastics, 2000, 4: 209- 222.

[9] Pham H. On quadratic hedging in continous time[J]. Math. meth. oper. Res., 2000, 51: 315- 339.

Hedging Strategy for Unit-linked Insurance Contract Under Local Risk Minimization

DU Li-jin, LIU Ji-chun, TANG Si-ying

(School of Mathematical Science, Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract: Unit-linked insurance contract is a contract where the benefit depend on the price of some specific traded stock. We consider a model describing the uncertainty of the financial market and a portfolio of insured individuals simultaneously. Incompleteness is caused by mix-diffusion market and insured individuals. We give the minimal martingale measure under this model and consider the hedging problem of the unit-linked life insurance contract under local risk minimization.

Key words: minimal martingale measure; local risk minimization; Föllmer-Schweizer decomposition; unit-linked insurance