第42卷 第2期
2003年3月
厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)
Vol.42 No.2
Mar. 2003

文章编号:0438-0479(2003)02-0153-04

一个非对称GARCH模型的严平稳遍历性

刘 继 春
(厦门大学数学系,福建 厦门 361005)

摘要:讨论了一个非对称广义自回归条件异方差新模型的严平稳性及遍历性,并且给出了该模型存在高阶矩的条件.

关键词:非对称广义自回归条件异方差;严平稳性;遍历性
中图分类号:O 211.6 文献标识码:A

具有自回归条件异方差(ARCH)的时间序列模型,首先是由文献[1]提出,它假定预测误差 ε_t 为实值时间序列,记 ψ_t 为截止到时刻 t 的所有信息的信息集,且

$$\varepsilon_t = z_t h_t^{1/2},$$

$$z_t \sim i.i.d.,\ E(z_t)=0,\ Var(z_t)=1 \quad (1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 \quad (2)$$

其中 h_t 是给定信息集合 ψ_{t-1} 时 ε_t 的条件方差,$q>0$,参数 $\alpha_0>0$,$\alpha_i\geqslant 0$,$i=1,2,\cdots,q$.

文献[2]将上述ARCH模型推广到更为流行的广义ARCH(GARCH)模型,即将时刻 t 之前的条件方差作为自变量引人条件方差函数:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j h_{t-j} \quad (3)$$

在金融和经济领域,这类模型有着重要的应用[2~5].但是,由于 h_t 只包含过去的条件方差 h_{t-i} 和预测误差的平方项 ε_{t-i}^2,因此,这样的 h_t 只能刻划 ε_{t-i} 的大小(即消息的大小)而不能反映其正负(即消息的好坏)对序列波动的影响.

为了刻划消息的不对称影响,文献[6]和[7]分别提出了指数GARCH(exponential GARCH或EGARCH)模型和非对称GARCH(Asymmetric GARCH或AGARCH)模型.由于AGARCH模型和EGARCH模型分别存在初估计比较困难和极大似然估计运算困难等不足,文献[8]给出了新的AGARCH模型,其条件方差函数为

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}(a_i|\varepsilon_{t-i}| + b_i\varepsilon_{t-i})^2 + \sum_{j=1}^{p}\gamma_j h_{t-j} \quad (4)$$

其中 $p\geqslant 0$,$q>0$,$\alpha_0>0$,$\gamma_j\geqslant 0$,$j=1,\cdots,p$.这种构造的想法是预测误差时滞变量的绝对值越大(可理解成消息越大),它们对 h_t 的影响也就越大;而时滞的正负(可理解成消息的好坏)则经常对 h_t 产生不对称的影响,例如坏消息往往比好消息有着更大的影响力.式(4)经简单变形可写成

$$h_t = \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)\varepsilon|\varepsilon| + C(L)h_t \quad (5)$$

其中,$p\geqslant 0$,$q>0$,$\alpha_0>0$,$\alpha_i = a_i^2 + b_i^2 \geqslant 0$,$\beta_i = 2a_ib_i$,$i=1,\cdots,q$;$\gamma_j\geqslant 0$,$j=1,\cdots,p$;$L$ 表示后移算子,$A(z)=\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\cdots+\alpha_q z^q$ 是系数多项式,$B(z)$ 和 $C(z)$ 分别表示相应的 q 阶和 p 阶系数多项式.进一步还假设了下面条件成立:

$$\mu_{k_1,k_2} = E(z_t^{k_1}|z_t|^{k_2}) \quad (6)$$

存在,其中 k_1 和 k_2 为正整数.

文献[8]证明了由式(1),(5)和(6)所定义的AGARCH(q,q,p)模型的宽平稳性及其最简单模型AGARCH(1,1,1)偶数阶矩存在的充要条件.然而,对于这一类非线性时间序列模型,我们更感兴趣的是它的严平稳性及遍历性[9].在文中,将证明文献[8]所给出的AGARCH(q,q,p)模型存在严平稳及遍历解的充要条件.同时也证明了该模型存在偶数阶矩的条件,方法不是文献[8]方法的简单推广.

1 严平稳性及遍历性

现在,考虑由式(1),(5)和(6)所定义的模型,

收稿日期:2002-08-23
作者简介:刘继春(1965-),男,副教授,博士.

即

$$\begin{cases}\varepsilon_t = z_t h_t^{1/2}, \\ \quad z_t \sim i.\,i.\,d.,\ E(z_t) = 0,\ Var(z_t) = 1; \\ h_t = \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)\varepsilon_t|\varepsilon_t| + C(L)h_t,\end{cases} \tag{7}$$

其中$\{z_t\}$ 满足式(6), $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, \cdots, q$; $\gamma_j \geqslant 0$, $j = 1, \cdots, p$.

设 $x_t = z_t^2$, $y_t = z_t|z_t|$, $\mathbf{u}_t = (\varepsilon_t^2, \cdots, \varepsilon_{t-q+1}^2, \varepsilon_t|\varepsilon_t|, \cdots, \varepsilon_{t-q+1}|\varepsilon_{t-q+1}|, h_t, \cdots, h_{t-p+1})^\tau$, $\mathbf{v}_t = (\alpha_0 x_t, 0, \cdots, 0, \alpha_0 y_t, 0, \cdots, 0, \alpha_0, 0 \cdots, 0)^\tau$, 记

$$D = \begin{bmatrix} I_q & 0 & 0 \\ I_q & I_q & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 I_q, I_p 分别表示 q 阶和 p 阶单位阵, A_t, D 和 G 的分块方式相同, 且 $A = E(A_t)$, $\mathbf{v} = E(\mathbf{v}_t)$, A_t 的具体表达式如式(8).

$$A_t = \begin{bmatrix} A_{11,t} & A_{12,t} & A_{13,t} \\ A_{21,t} & A_{22,t} & A_{23,t} \\ A_{31,t} & A_{32,t} & A_{33,t} \end{bmatrix},$$

$$A_t = \begin{bmatrix}
\alpha_1 x_t & \cdots & \alpha_{q-1}x_t & \alpha_q x_t & \beta_1 x_t & \cdots & \beta_{q-1}x_t & \beta_q x_t & \gamma_1 x_t & \cdots & \gamma_{p-1}x_t & \gamma_p x_t \\
1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\alpha_1 y_t & \cdots & \alpha_{q-1} & y_t & \alpha_q y_t & \beta_1 y_t & \cdots & \beta_{q-1}y_t & \beta_q y_t & \gamma_1 y_t & \cdots & \gamma_{p-1}y_t \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\alpha_1 & \cdots & \alpha_{q-1} & \alpha_q & \beta_1 & \cdots & \beta_{q-1} & \beta_q & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{p-1} & \gamma_p \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0
\end{bmatrix} \tag{8}$$

于是模型式(7) 可写成一阶高维形式

$$\mathbf{u}_t = A_t \mathbf{u}_{t-1} + \mathbf{v}_t \tag{9}$$

引理1. 1　如果 $A(1) + \mu_{1,1}B(1) + C(1) < 1$, 则随机级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1} A_{t-j}\right)\mathbf{v}_{t-k}$$

以概率 1 地收敛. 记

$$\mathbf{u}_t = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1} A_{t-j}\right)\mathbf{v}_{t-k} + \mathbf{v}_t \tag{10}$$

则$\{\mathbf{u}_t\}$ 是严平稳遍历随机序列, 且满足随机差分方程(9).

证明　由 A_t, $\mathbf{v}_t$ 的定义, 有式(11)

$$B_t = DA_tD^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11,t} - A_{12,t} & A_{12,t} & A_{13,t} \\ A_{11,t} + A_{21,t} - A_{12,t} - A_{22,t} & A_{12,t} + A_{22,t} & A_{13,t} + A_{23,t} \\ A_{31,t} - A_{32,t} & A_{32,t} & A_{33,t} \end{bmatrix} \tag{11}$$

和 $\mathbf{b}_t = D\mathbf{v}_t = (\alpha_0 x_t, 0, \cdots, 0, \alpha_0(x_t + y_t), 0, \cdots, 0, \alpha_0, 0, \cdots, 0)^\tau$. 再根据 $x_t \pm y_t \geqslant 0$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\alpha_i \pm \beta_i \geqslant 0$, $i = 1, \cdots, q$, $\gamma_j \geqslant 0$, $j = 1, \cdots, p$, 易知$\{B_t\}$ 和$\{\mathbf{b}_t\}$ 都是独立同分布的非负随机序列, 以及 $A(1) + \mu_{1,1}B(1) + C(1) \geqslant 0$, 且当 $k \neq j$ 时, B_{t-j} 与 $\mathbf{b}_{t-k}$ 独立, 于是, 知

$$E\left[\left(\prod_{j=0}^{k-1} B_{t-j}\right)\mathbf{b}_{t-k}\right] = E\left[\left(D\prod_{j=0}^{k-1} A_{t-j}\right)\mathbf{v}_{t-k}\right] = DA^k\mathbf{v}$$

是非负的. 用矩阵论的方法, 可验证矩阵 A 的谱半径$\rho(A) < 1$, 当且仅当 $A(1) + \mu_{1,1}B(1) + C(1) < 1$. 故由引理的条件得

$$\sum_{k=1}^{\infty} E\left[\left(\prod_{j=0}^{k-1} B_{t-j}\right) \mathbf{b}_{t-k}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} D A^{k} \mathbf{v} < \infty.$$

由于 B_t 和 b_t 都是非负的, 由上式, 以概率 1 地有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1} B_{t-j}\right) \mathbf{b}_{t-k} < \infty \tag{12}$$

进一步, 也以概率 1 地有

$$\sum_{k=1}^{\infty} G\left(\prod_{j=0}^{k-1} B_{t-j}\right) \mathbf{b}_{t-k} = G \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1} B_{t-j}\right) \mathbf{b}_{t-k} < \infty \tag{13}$$

根据式(12), (13), 知随机级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1} A_{t-j}\right) \mathbf{v}_{t-k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1} B_{t-j}\right) \mathbf{b}_{t-k} - \sum_{k=1}^{\infty} G\left(\prod_{j=0}^{k-1} B_{t-j}\right) \mathbf{b}_{t-k}$$

以概率 1 地收敛.

显然, 由式(10) 定义的随机序列$\{\mathbf{u}_t\}$ 是严平稳的, 进一步, 由于$\{\mathbf{u}_t\}$ 是独立同分布随机变量序列$\{z_t\}$ 的函数, 所以, 根据文献[10], $\{\mathbf{u}_t\}$ 也是遍历的. 通过直接验证可知 $\mathbf{u}_t$ 满足随机差分方程(9).

引理 1. 2　如果$\{\mathbf{u}_t\}$ 是随机差分方程式(9) 的严平稳解, 且 $E(\mathbf{u}_0)$ 存在, 则

$A(1) + \mu_{1,1} B(1) + C(1) < 1.$

证明　由式(9), 有

$$D\mathbf{u}_0 = \mathbf{b}_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\prod_{j=0}^{k-1} B_{-j}\right) \mathbf{b}_{-k} + \left(\prod_{j=0}^{n-1} B_{-j}\right)(D\mathbf{u}_{-n}).$$

因$\{B_t\}$ 和$\{\mathbf{b}_t\}$ 都是独立同分布的非负随机序列, 易验证 $D\mathbf{u}_t$ 也是非负的, 又因对 $k \neq j$, B_{t-j} 与 $\mathbf{b}_{t-k}$ 相互独立, 因此, 在引理的条件下, 由上式有

$$E(D\mathbf{u}_0) \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} E\left[\left(\prod_{j=0}^{k-1} B_{-j}\right) \mathbf{b}_{-k}\right] = \sum_{k=1}^{n-1} B^{k} \mathbf{b}$$

其中$B = E(B_t) = DAD^{-1}$, $\mathbf{b} = E(\mathbf{b}_t)$. 因此, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} B^k < \infty$, 所以, $\lim_{n\to\infty} B^n = 0$. 由上式, 可得 $\rho(B) < 1$. 进而, $\rho(A) = \rho(D^{-1}BD) = \rho(B) < 1$, 则 $A(1) + \mu_{1,1} B(1) + C(1) < 1$.

引理 1. 3　设$\{\mathbf{u}_t\}$ 是随机差分方程(9) 的严平稳解, 且 $E(\mathbf{u}_0)$ 存在, 若还有一随机序列$\{\mathbf{w}_t\}$, 也是式(9) 的严平稳解, 且 $E(\mathbf{w}_0)$ 存在, 则

$\mathbf{u}_t = \mathbf{w}_t$, a. s. .

证明　设 $\mathbf{c}_t = D(\mathbf{u}_t - \mathbf{w}_t)$, 由式(9), 有

$$\mathbf{c}_t = D\left[\left(\prod_{j=0}^{t-1} A_{t-j}\right)(\mathbf{u}_0 - \mathbf{w}_0)\right] = \left(\prod_{j=0}^{t-1} B_{t-j}\right)(D\mathbf{u}_0 - D\mathbf{w}_0)$$

进一步, 用$(C)_{ij}$ 表示矩阵C 的(i, j) 元素. 下面先证明对 $1 \leqslant i \leqslant 2q + p$, 存在常数 $a > 0$ 和 $0 < \lambda < 1$, 使得

$$E\left|\left[\left(\prod_{j=0}^{t-1} B_{t-j}\right)(D\mathbf{u}_0 - D\mathbf{w}_0)\right]_i\right| \leqslant a\lambda^t \tag{14}$$

仅对 $i = 1$ 时证明式(14), 其它情况类似可证. 根据非负随机序列$\{B_t\}$ 的独立性, 有

$$E\left[\left(\prod_{j=0}^{t-1} B_{t-j}\right)_{1s}\right] = (B^t)_{1s} = (DA^tD^{-1})_{1s},$$

其中 $B = E(B_t) = DAD^{-1}$ 非负. 根据引理 1. 2, $\rho(A) < 1$, 易得 $\rho(B) < 1$. 进而可知, 存在常数 $\varepsilon > 0$, 满足 $\lambda = \rho(B) + \varepsilon < 1$ 及常数 $c = c(B, \varepsilon)$, 使得$(B^t)_{1s} \leqslant c[\rho(B) + \varepsilon]^t$. 这样, 有

$$E\left|\left[\left(\prod_{j=0}^{t-1} B_{t-j}\right)(D\mathbf{u}_0 - D\mathbf{w}_0)\right]_1\right| \leqslant a\lambda^t,$$

其中 $a = c\sum_{s=1}^{2q+p} E\,|\,(D\mathbf{u}_0 - D\mathbf{w}_0)_s\,|$. 因此, 由 Borel-Catelli 引理, 知

$\lim_{t\to\infty} \mathbf{c}_t = 0$, a. s. ,

进一步有 $D\mathbf{u}_t = D\mathbf{w}_t$, (a. s.), 即 $\mathbf{u}_t = \mathbf{w}_t$(a. s.).

定理 1. 4　AGARCH 模型(7) 有严平稳遍历解$\{\varepsilon_t\}$, 且 $E(\varepsilon_0^2)$ 存在, 当且仅当 $A(1) + \mu_{1,1} B(1) + C(1) < 1$. 此时的平稳遍历解也唯一.

证明　由式(7) 和(9) 可知, $\{\varepsilon_t\}$ 是模型(7) 的严平稳遍历解, 当且仅当 $\mathbf{u}_t$ 是模型(9) 的严平稳遍历解. 根据引理 1. 1, 1. 2, 1. 3, 结论是显然的.

2　高阶矩

对于 AGARCH 模型(7), 可利用其严平稳遍历解的明显表达式, 讨论其高阶矩. 记

$L^s = \{x: \|x\| = E^{1/s} |x|^s < \infty, s > 0\}$,

其中 x 是随机变量. 有下面的定理.

定理 2. 1　对于 AGARCH 模型(7), 假定 $A(1) + \mu_{1,1} B(1) + C(1) < 1$, 进一步, 如果 $\rho(A_t^{\otimes s}) < 1$($\otimes$ 表示 Kronecker 积), 则$|\varepsilon_t|^2 \in L^s$.

证明　仅对 $s = 2$ 给出证明, 其它情况类似. 记

$$S_n(t) = \mathbf{b}_t + \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=0}^{k-1} B_{t-j}\right) \mathbf{b}_{t-k},$$

$$X_{n+m,n}(t) = S_{n+m}(t) - S_n(t), \quad m \geqslant 1,$$

$$Y_{n+m,n}(t) = vec(X_{n+m,n}(t) X^{\tau}_{n+m,n}(t)),$$

其中 $vec(\cdot)$ 表示拉直运算. 进一步, 有

$$X_{n+m,n}(t) = B_t X_{n-1+m,n-1}(t-1).$$

利用 Kronecker 积和拉直运算的性质, 可得

$$Y_{n+m,n}(t)=(B_t^{\otimes 2})Y_{n-1+m,n-1}(t-1).$$

注意到 $Y_{n-1+m,n-1}(t-1)$ 是 ϕ_{t-1} 可测的, $\{B_t\}$ 是非负独立同分布的, 由上式可得

$$EY_{n+m,n}=(E(B_t^{\otimes 2}))^n EY_{m,0}(t-n).$$

记

$$e_i=\sum_{k=1}^{m}\alpha_0\left[\left(\prod_{j=0}^{k-1}B_{t-n-j}\right)_{i1}x_{t-n-k}+\left(\prod_{j=0}^{k-1}B_{t-n-j}\right)_{iq+1}\eta_{t-n-k}+\left(\prod_{j=0}^{k-1}B_{t-n-j}\right)_{i2q+1}\right],$$

$\eta_t=x_t+y_t$, 注意到

$$\left(\left(\prod_{j=0}^{k-1}B_{t-n-j}\right)_{i1}\right)^2=\left(\prod_{j=0}^{k-1}(B_{t-n-j}\otimes B_{t-n-j}\right)_{i1,i1},$$

其中记号 $(\cdot)_{i1,i1}$ 表示原来矩阵中 $(i,1)$ 元素在 *Kronecker* 积中的位置. 进一步, 根据 *Holder* 不等式和 *Minkowski* 不等式, 有

$$(Ee_i^2)^{1/2}\leqslant c_0\sum_{k=1}^{m}\{\{[(E(B_t^{\otimes 2}))^k]_{i1,i1}\}^{1/2}+\{[(E(B_t^{\otimes 2}))^k]_{iq+1,iq+1}\}^{1/2}+\{[(E(B_t^{\otimes 2}))^k]_{i2q+1,i2q+1}\}^{1/2}\}.$$

由于 $\rho(E(A_t^{\otimes 2}))<1$, 可得 $\lambda=\rho(E(B_t^{\otimes 2}))=\rho(E(D(A_t^{\otimes 2})D^{-1}))=\rho(E(A_t^{\otimes 2}))<1$, 故存在常数 $c_1>0$, 使得 $[((E(B_t^{\otimes 2}))^k]_{i1,i1}\leqslant c_1\lambda^k$. 所以, 存在常数 c_2, 使得 $(Ee_i^2)^{1/2}\leqslant c_2\sum_{k=1}^{m}\lambda^{k/2}<\infty$. 进而, 存在常数 c_3, 使得 $E(Y_{n+m,n}(t))_1\leqslant c_3\lambda^n$. 设 $\delta=(1,0,\cdots,0)$, 有

$$(E(\delta^{\mathrm{T}}X_{n+m,n}(t))^2)^{1/2}=(E(Y_{n+m,n}(t))_1)^{1/2}\leqslant\sqrt{c_3}\lambda^{n/2}\to 0,\ n,m\to\infty,$$

这说明 $\varepsilon_{t,n}^2=\delta^{\mathrm{T}}S_n(t)$ 是 L^2 中的 *Cauchy* 基本列. 而 $\varepsilon_t^2=\delta^{\mathrm{T}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\prod_{j=0}^{k-1}B_{t-j}\right)\mathbf{b}_{t-k}+\mathbf{b}_t\right)$, 故 $\varepsilon_t^2\in L^2$.

参考文献:

[1] Engle R F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U. K. inflation[J]. Econometrica, 1982, 50: 987- 1 008.

[2] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity[J]. J. Econometrics, 1986, 31: 307- 327.

[3] Bollerslev T, Engle R F, Woodridge J M. A capital asset pricing model with time varying covariance[J]. J. Political Economy, 1988, 96: 116- 131.

[4] Weiss A A. ARMA models with ARCH errors[J]. J. Time Series Analysis, 1984, 5: 129- 143.

[5] Bollerslev T, Chou R Y, Kroner K F. ARCH modeling in finance[J]. J. Econometrics, 1992, 52: 5- 59.

[6] Nelson D B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new appriach[J]. Econometria, 1990, 59: 347 - 370.

[7] Schwert G W. Stock volatility and the crash of 87[J]. Review of Financial Studies, 1990, 3: 77- 102.

[8] 吴硕思,方兆本. 非对称广义自回归条件异方差的新模型[J]. 应用概论统计, 2000, 16(4): 416- 422.

[9] Ling S. On the probabilistic properties of a double threshold ARCH conditional heteroskedasticity model[J]. Journal of Applied Probablity, 1999, 36: 1- 18.

[10] 王梓坤. 随机过程论[M]. 北京: 科学出版社, 1978.

[11] 张谋成, 黎稳. 非负矩阵论[M]. 广州: 广东高等教育出版社, 1995.

On the Strict Stationary Property and the Ergodicity of a Model for Asymmtric GARCH

LIU Ji-chun

(Dept. of Math., Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract: In this paper, the author discuss the strict stationary property and the ergodicity of a new model for asymmetric general autoregressive conditional heteroskedasticity, and give the sufficient conditions for the existence of even-order moments of the model.

Key words: asymmetric-GARCH; strict stationary; ergodicity