总40卷　第1期
2007年3月
数　学　研　究
Journal of Mathematical Study
Vol. 40　No. 1
Mar. 2007

方差 Gamma 过程与期权定价 *

杜立金[1]　　刘继春[2]
(1. 山东财政学院经济系, 山东 济南 250014; 2. 厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘　要　研究了几何 Lévy 过程中, 具有代表性的一类过程-方差 Gamma 过程下的等价鞅测度类问题, 并且讨论了其具有的分析性质. 进一步, 我们也考虑了基于该过程的普通期权的定价.

关键词　方差 Gamma 过程; 纯跳; 期权定价
中图分类号　O 211. 9　F840. 62　　文献标识码　A

1　引　　言

经典的B-S 期权定价公式假定股票价格是连续变化的几何布朗运动(BM), 实证研究发现该过程与实际数据有显著的不一致, 如: 有尖峰厚尾现象和波动率聚类. 为更好的拟合数据, 揭示价格过程的实质, 近年金融数学领域开始研究几何 Lévy 过程. 本文考虑其中一类有代表性的几何 Lévy 过程-方差 Gamma 过程, 该过程能很好的解释尖峰厚尾现象, 但其样本轨道不含连续项, 从而不是几何 BM 的直接推广. 本文讨论方差 Gamma 过程的分析性质, 给出该过程的等价鞅测度类和基于测度变换的期权定价公式, 并讨论对数效用最优下的期权均衡定价. 关于方差Gamma 过程的理论和实证研究见于[1- 5].

2　模型与等价鞅测度

因 Gamma 分布无穷可分, 于是我们可以定义标准的 Gamma 过程 $\gamma(t) \sim G(t, 1)$, 取

$$Y(t) = \theta t + \sigma W(t),$$

其中 $W(t)$ 是标准 BM. 设 k 是常数, $\gamma_0(t) = \gamma(kt)$. 于是方差 Gamma 过程为

$$X(t) = \theta\gamma_0(t) + \sigma W(\gamma_0(t)).$$

进一步, $X(t)$ 的条件特征函数是

$$\phi_{X(t)|\gamma_0(t)}(u) = E(e^{iuX(t)} \mid \gamma_0(t)) = \exp\left\{iu\theta\gamma_0(t) - \frac{\sigma^2u^2}{2}\gamma_0(t)\right\}.$$

再由 $\gamma_0(t)$ 的特征函数是$(1 - iu)^{-kt}$ 得

$$\phi_X(u) = \left(1 - iu\theta + \frac{\sigma^2u^2}{2}\right)^{-kt}. \tag{1}$$

记 $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ 是两个独立标准 Gamma 过程, 设

* 收稿日期: 2005- 01- 24

$$X(t)=\frac{\nu_1}{\mu_1}\gamma_1\left(\frac{\mu_1^2}{\nu_1}t\right)-\frac{\nu_2}{\mu_2}\gamma_2\left(\frac{\mu_2^2}{\nu_2}t\right).$$

取 $\frac{\mu_1^2}{\nu_1}=\frac{\mu_2^2}{\nu_2}=k$, 其特征函数可写成

$$\left(1-i\left(\frac{\nu_1}{\mu_1}-\frac{\nu_2}{\mu_2}\right)u+\frac{\nu_1}{\mu_1}\frac{\nu_2}{\mu_2}u^2\right)^{-kt}.$$

由(1)式取 $\theta=\frac{\nu_1}{\mu_1}-\frac{\nu_2}{\mu_2},\sigma=\left(2\frac{\nu_1}{\mu_1}\frac{\nu_2}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{2}}$, 可知方差 $Gamma$ 过程可写成两 $Gamma$ 过程的差[3].

由 $\gamma(t)$ 的 Lévy 密度(见附录) $l_\gamma(x)=\frac{e^{-x}}{x},\ x>0,$

得 $X(t)$ 的 Lévy 密度(见附录) $l_X(x)=\begin{cases}k\frac{e^{-\alpha_1 x}}{x}, & x>0,\\ -k\frac{e^{\alpha_2 x}}{x}, & x<0,\end{cases}$

且有 $\psi_X(u)\triangleq\ln(\phi_X(u))=t\int_R(e^{iux}-1)l_X(x)\,dx,$

其中 $\alpha_1=\frac{\mu_1}{\nu_1},\ \alpha_2=\frac{\mu_2}{\nu_2}$. $X(t)$ 有 Lévy-Itô 分解

$$X(t)=bt+\int_{[0,t]}\int_{|x|\le 1}x(\mu(du,dx)-l_X(x)\,dx\,du)+\int_{[0,t]}\int_{|x|>1}x\mu(du,dx)$$

其中, $b=k\left(\frac{1-e^{-\alpha_1}}{\alpha_1}-\frac{1-e^{-\alpha_2}}{\alpha_2}\right)$, μ 是 $X(t)$ 的跳测度, $\nu(dt,dx)\triangleq l_X(x)\,dx\,dt$ 是 $X(t)$ 相应跳测度的补偿. 由 $\int_R x\,l_X(x)\,dx<\infty$ 知 $X(t)$ 是有限变差, 再由 $\int_{|x|<1}l_X(x)\,dx=\infty$ 可以看出在任何有限区间上过程有无穷多个跳, 称该过程具有无穷活性.

记市场模型

$$\begin{cases}B(t)=e^{rt},\\ S(t)=S_0e^{X_t},\end{cases}\tag{2}$$

其中 $B(t)$ 表示无风险债券, $S(t)$ 表示股票价格, 我们研究该市场模型下时期 $[0,T]$ 的普通期权定价问题. 记股票贴现价格过程 $S^*(t)=e^{-rt}S(t)=S_0e^{-rt+X_t}$, $\mathscr{F}_t=\sigma(S(u);u\le t)$. 下面命题给出 S^* 的等价鞅测度(EMM), $\mathscr{M}(\ne\emptyset)$ 表示市场模型(2)的等价鞅测度集.

命题 1 设 $Q\in\mathscr{M}$, 取密度过程 $L_t=\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathscr{F}_t}$, 有

$$L_t=\epsilon((Y-1)*(\mu-\nu))_t,$$

其中 ϵ 表示 Doleas-Dade 指数, μ 为 X 的跳测度, ν 为其补偿, $Y=Y(t,x)$ 是一严正可料函数使得

$$\int_{[0,t]}dt\int_R\left(\sqrt{Y(u,x)}-1\right)^2 l_X(x)\,dx<\infty\qquad P\text{-}a.s.$$

取满足上式的 Y, 得到相应的等价鞅测度应满足对任一时间 t, 有

$$-rt+k\int_{[0,t]}du\int_{(0,\infty)}(e^x-1)Y(u,x)\frac{e^{-\alpha_1 x}}{x}dx+k\int_{[0,t]}du\int_{(-\infty,0]}(e^x-1)Y(u,x)\frac{e^{\alpha_2 x}}{x}dx=0.\tag{3}$$

证明 设等价鞅测度 Q, 并记 $L_t=\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathscr{F}_t}$, 则 L_t 在 P 下是鞅. 由可料表示定理[6], 存在

$Y = Y(t, x)$ 满足

$$L_t = (Y - 1) * (\mu - \nu)$$

由 Girsanov 定理关于随机测度公式, 跳测度 μ 在 Q 下的补偿

$$\nu^Q(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = Y(t, x)\nu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = Y(t, x) l_X(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

从而对 $0 \leq s < t$, 根据 $\Psi_X(-i)$, 代入 $l_X(x)$ 得

$$\begin{aligned}E^Q(S_t^* \mid \mathscr{F}_s) &= S_s^* E^Q(\exp\{-r(t-s) + X_t - X_s\} \mid \mathscr{F}_s)\\ &= S_s^* \exp\left\{-r(t-s) + \int_{[s,t]}\int_R (e^x - 1) Y(u,x) l_X(x)(\mathrm{d}x)\mathrm{d}u\right\}\\ &= S_s^* \exp\left\{-r(t-s) + k\int_{[s,t]}\int_{[0,\infty)}(e^x - 1) Y(u,x)\frac{e^{-\alpha_1 x}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}u\right.\\ &\quad \left. - k\int_{[s,t]}\int_{[-\infty,0]}(e^x - 1) Y(u,x)\frac{e^{\alpha_2 x}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}u\right\}.\end{aligned}$$

由 S^* 在 Q 下是鞅得

$$-r(t-s) + k\int_{[s,t]}\int_{[0,\infty)}(e^x - 1) Y(u,x)\frac{e^{-\alpha_1 x}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}u - k\int_{[s,t]}\int_{[-\infty,0]}(e^x - 1) Y(u,x)\frac{e^{\alpha_2 x}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}u = 0.$$

根据命题1, 我们通过取适当的 Y 满足方程(3) 找到等价鞅测度, 在这些概率测度下定价都是无套利的, 得到的价格都是可行的. 注意到 $X(t)$ 在 Q 下不一定是 Lévy 过程, 有可能失去独立增量性质, 我们接着考虑等价鞅测度的一个子类, 在该子类中的鞅测度下对数价格过程仍是 Lévy 过程. 定义非随机函数[5] $y: R \to R_+$ 且满足

$$\int_R \left(\sqrt{y(x)} - 1\right)^2 l_X(x)\mathrm{d}x < \infty.$$

系 对命题1中 $Y(t, x)$ 取上述定义的函数 $y(x)$, 则 $X(t)$ 在 Q 下是 Lévy 过程, 且等价鞅测度满足下述方程

$$-r + k\int_{[0,\infty)}(e^x - 1) y(x)\frac{e^{-\alpha_1 x}}{x}\mathrm{d}x - k\int_{[-\infty,0]}(e^x - 1) y(x)\frac{e^{\alpha_2 x}}{x}\mathrm{d}x = 0. \tag{4}$$

证明 由 $y(x)$ 的定义知 $L_t = \mathscr{E}((y - 1) * (\mu - \nu))$ 是鞅, 且是一密度过程. 在 Q 下, 过程 $X(t)$ 的跳测度补偿是 $\nu^Q(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = y(x) l_X(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$, 可以分离出 Lévy 测度, 从而是 Lévy 过程. 再由(3) 式即得(4) 式.

注 1. Esscher 变换是寻找鞅测度的一种重要方法[7], Esscher 鞅测度 Q^E 满足

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q^E}{\mathrm{d}P}\right|_{\mathscr{F}_t} = e^{\eta X(t) - t\int_R (e^{\eta x} - 1) l_X(x)\mathrm{d}x}$$

其中 η 满足 $\int_R e^{\eta x}(e^x - 1) l_X(x)\mathrm{d}x - r = 0$. 我们在系中取 $y(x) = e^{\eta x}$, η 为适当参数, 则与 Esscher 鞅测度对应, 且在等价鞅测度下对数价格过程仍是方差 Gamma 过程;

2. 若取

$$y(x) = \begin{cases}\dfrac{\hat{k}e^{-(\eta_1 - \alpha_1)x}}{k|x|^{\beta_1}}, & x > 0;\\ \dfrac{\hat{k}e^{(\eta_2 - \alpha_2)x}}{k|x|^{\beta_2}}, & x < 0,\end{cases}$$

$\hat{k},\beta_1,\beta_2,\eta_1,\eta_2$ 取适当参数,则等价鞅测度下对数价格过程是 CGMY 过程[8],方差 Gamma 过程是CGMY 过程的特例.

3 普通期权定价方法

为求解期权定价公式,类似[9],我们讨论价格过程的一些分析性质. 用 S_0 表示股票初始时刻价格,下文中用 X_T 表示过程 X 在 T 时刻随机变量,用 t 表示时间时,我们主要在括号内表示,有时也用下标表示,下文不再解释. 由 $S^*(t)=S_0e^{-rt+X(t)}$, 利用 Itô 公式,可得 $S^*(t)$ 是下面方程的解

$$S^*(t)=S_0+\int_{[0,t]}S^*(t-)\mathrm{d}\hat{X}(t),$$

这里 $\hat{X}(t):=-rt+X(t)+\sum_{u\in(0,t]}(e^{\triangle X_u}-1-\triangle X_u)$, 这样有 $S^*(t)=S_0\epsilon(\hat{X}(t))$. 又

$$\begin{aligned}\hat{X}(t)&=-rt+X(t)+\int_{[0,t]}\int_{R\setminus\{0\}}(e^x-1-x)\mu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)\\&=(b-r)t+\int_{[0,t]}\int_{\{|x|\le 1\}}x(\mu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)-l_X(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t)+\int_{[0,t]}\int_{\{|x|>1\}}x\mu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)\\&\quad+\int_{[0,t]}\int_{R\setminus\{0\}}(e^x-1-x)\mu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)\\&=(b-r)t+\int_{[0,t]}\int_{\{|x|\le 1\}}(e^x-1)(\mu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)-l_X(x)\mathrm{d}u\mathrm{d}x)\\&\quad+\int_{[0,t]}\int_{\{|x|>1\}}(e^x-1)\mu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)+t\int_R(e^x-1-x)l_X(x)\mathrm{d}x\\&=b_1t+\int_{[0,t]}\int_{\{|x|\le 1\}}(e^x-1)(\mu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)-l_X(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}u)\\&\quad+\int_{[0,t]}\int_{\{|x|>1\}}(e^x-1)\mu(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

其中 $b_1=b-r+\int_{|x|\le 1}(e^x-1-x)l_X(x)\mathrm{d}x$, 接下来寻找 $\hat{X}(t)$ 的 Lévy-Itô 分解. 考虑 $D:=\{t>0;\ e^{\triangle X_t}-1\neq 0\}$, A 是定义在 $R/0$ 上的 Borel 集, $\hat{\mu}$ 表示 $\hat{X}(t)$ 的跳测度, $\hat{\nu}$ 表示跳测度的补偿,则 $\hat{\mu}((0,t],A)=\#\{u\in D\cap(0,t];\ e^{\triangle X_u}-1\in A\}$. 于是 $\hat{\mu}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=\mu(\mathrm{d}t,\ln(1+\mathrm{d}x))$, $\hat{\nu}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=\nu(\mathrm{d}t,\ln(1+\mathrm{d}x))=\frac{l_X(\ln(1+x))}{1+x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$, 进而得到 Lévy-Itô 分解

$$\begin{aligned}\hat{X}(t)&=b_1t+\int_{[0,t]}\int_{\{e^{-1}-1\le x\le e-1\}}x(\hat{\mu}-\hat{\nu})(\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)+\int_{[0,t]}\int_{\{x<e^{-1}-1\}\cup\{x>e-1\}}x\hat{\mu}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)\\&=b_2t+\int_{[0,t]}\int_{|x|\le 1}x(\hat{\mu}-\hat{\nu})(\mathrm{d}x,\mathrm{d}u)+\int_{[0,t]}\int_{|x|>1}x\hat{\mu}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x),\end{aligned}$$

其中 $b_2:=b_1+\int_{\{x<-1\}}l_X(\mathrm{d}x)-\int_{\{\ln 2<x\le 1\}}(e^x-1)l_X(x)\mathrm{d}x$, 代入 $l_X(x)$ 得

$$\hat{\nu}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=\begin{cases}k\dfrac{(1+x)^{-\alpha_1-1}}{\ln(1+x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t & x>0\\[2ex] -k\dfrac{(1+x)^{\alpha_2-1}}{\ln(1+x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t & -1<x<0\end{cases}$$

$$:=\hat{l}_X(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

从而可知 $\hat{X}(t)$ 仍是 Lévy 过程,但不是方差 Gamma 过程,相应有 Lévy 密度 $\hat{l}_X(x)$. 这时,(4) 式

对应有 $-r+\int_{-1}^{\infty}y(\ln(1+x))\hat{l}_X(x)\mathrm{d}x=0$，再由命题1知$S(t)$在$Q$是下鞅，从而$\hat{X}(t)$在$Q$下也是鞅，且有

$$\hat{X}(t)=\int_{[0,t]}\int_R x(\hat{\mu}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)-y(\ln(1+x))\hat{\nu}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}x)).\tag{5}$$

下面考虑期权定价问题. 对一普通欧式期权$C=(S_T-K)^+$，S_T是协议到期时间T时的标的资产价格，K表示执行价. 记$P_t(y)=E^y(e^{-r(T-t)}C|\mathscr{F}_t)$，$E^y$表示命题1系中，取$y=y(x)$时的等价鞅测度下求期望，$P_t(y)$为期权$C$在$t$时的无套利价格. $t=0$时$P(y):=P_0(y)$. 记取$y=y(x)$时相应的等价鞅测度为Q，由上文知$\left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right|_{\mathscr{F}_t}=\epsilon((y-1)*(\mu-\nu))_t$，再记概率测度$Q_1$满足$\left.\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}Q}\right|_{\mathscr{F}_t}=e^{-rt+X(t)}=\epsilon(\hat{X})_t$. 下面命题给出欧式看涨期权价格的概率表示.

命题2　等价鞅测度Q下欧式看涨期权价格$P(y)$满足

$$P(y)=S_0Q_1(A)-e^{-rT}KQ(A),$$

其中$A=\{X_T>\ln(K/S_0)\}$，$Q_1(A)$、$Q(A)$分别表示概率测度Q_1、Q下A的概率.

证明　因为$A=\{S_T>K\}$，故有

$$P(y)=e^{-rT}E^y(S_T-K)^+=e^{-rT}E^yS_TI_A-e^{-rT}KE^yI_A$$

再由$S_T^*/S_0=e^{-rT+X(T)}$是Q下的初始值为1的正值鞅，于是可取概率测度Q_1满足

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}Q}\right|_{\mathscr{F}_t}=e^{-rt+X(t)}=\epsilon(\hat{X})_t$$

由有

$$P(y)=S_0E^{Q_1}I_A-e^{-rT}KE^yI_A=S_0Q_1(A)-e^{-rT}KQ(A).$$

上面的价格随着$y(x)$具体形式的不同而在不同的鞅测度下定价，下面的系给出不同概率测度下方差 Gamma 过程的特征函数.

系　X_T在Q_1下的特征函数是

$$\phi_1(u)=\exp\left\{kT\int_{(0,\infty)}(e^{iux}-1)\frac{y(x)}{x}e^{-(\alpha_1-1)x}\mathrm{d}x-kT\int_{(-\infty,0]}(e^{iux}-1)\frac{y(x)}{x}e^{(\alpha_2+1)x}\mathrm{d}x\right\}.$$

X_T在Q下的特征函数是

$$\phi(u)=\exp\left\{kT\int_{(0,\infty)}(e^{iux}-1)\frac{y(x)}{x}e^{-\alpha_1x}\mathrm{d}x-kT\int_{(-\infty,0]}(e^{iux}-1)\frac{y(x)}{x}e^{\alpha_2x}\mathrm{d}x\right\}.$$

证明　由(5)知$\left.\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}Q}\right|_{\mathscr{F}_t}=\epsilon(\hat{X})_t=\epsilon(x*(\hat{\mu}-y\hat{\nu}))_t=\epsilon((e^x-1)*(\mu-y\nu))_t$，进而知$X(t)$在$Q_1$下跳测度的补偿是

$$\begin{aligned}\hat{\nu}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)&=e^xy(x)\nu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=e^xy(x)l_X(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&=\begin{cases}k\dfrac{y(x)}{x}e^{-(\alpha_1-1)x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t & x>0\\-k\dfrac{y(x)}{x}e^{(\alpha_2+1)x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t & -1<x<0\end{cases}\\&:=\tilde{l}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

于是X_T在Q_1下有特征函数

$$\Phi_1(u) = \exp\left\{T\int_{\mathbb{R}}(e^{iux}-1)\tilde{l}(x)\,\mathrm{d}x\right\}$$
$$= \exp\left\{kT\int_{(0,\infty)}(e^{iux}-1)\frac{\gamma(x)}{x}e^{-(\alpha_1-1)x}\mathrm{d}x - kT\int_{(-\infty,0]}(e^{iux}-1)\frac{\gamma(x)}{x}e^{(\alpha_2+1)x}\mathrm{d}x\right\}.$$

X_T 在 Q 下的特征函数由命题1及其系可得.

根据 X_T 的特征函数可以表示出其在 Q 和 Q_1 下的密度函数, 进而得到 $Q(A)$ 和 $Q_1(A)$. 这样, 给定合适的 $\gamma(x)$, 就能得到欧式看涨期权的具体公式. 接着考虑如何选择一个合理的鞅测度问题. 由于股票价格是纯跳过程, 不存在连续项, 不能用风险最小方法[9]. [10] 给出最小熵鞅测度定价方法, 该方法对应指数效用最优. 相对于指数效用, 对数效用假定了投资者风险厌恶程度与他拥有的财富水平有关, 我们给出对数效用最优[11] 下期权定价方法.

用 π 表示投资在风险资产股票上的比例, 则 $1-\pi$ 表示投资到无风险资产债券上的比例, 这里 π 随时间变化, 即 $\pi=\pi(t)$. 为表示方便, 下面一律简写成 π. 用 $W(t)$ 表示资产组合在 t 时的值, 并假定资产组合在任时刻总是正值, 由下面证明可以看出这意味着对任意的 t 有 $\pi\triangle\hat{X}(t) > -1$.

命题 3 设投资者的初始财富在 W_0. 市场模型(2) 下, 期权的最优对数效用定价公式
$$P^* = e^{-rT}E\left[e^{-\int_{[0,T]}\pi^*\mathrm{d}\hat{X}(u)-\int_{[0,T]}\int_{x>-1/\pi^*}(\ln(1+\pi^*x)-\pi^*x)\hat{\mu}(\mathrm{d}u,\,\mathrm{d}x)}C\right],$$
其中 $\pi^*=\pi^*(t)$ 表示对数效用下投资于市场模型(2) 达到效用最大化的解.

证明 由 $\mathrm{d}S(t) = \mathrm{d}(S^*(t)e^{rt}) = S(t-)\mathrm{d}\hat{X}(t) + rS(t-)\mathrm{d}t$ 有
$$dW(t) = \frac{(1-\pi)W(t-)}{B(t)}\mathrm{d}B(t) + \frac{\pi W(t-)}{S(t-)}\mathrm{d}S(t) = rW(t-)\mathrm{d}t + \pi W(t-)\mathrm{d}\hat{X}(t)$$
于是利用 Itô 公式, 可得
$$\ln W(t) = \ln W_0 + rt + \int_{[0,t]}\pi\mathrm{d}\hat{X}(u) + \sum_{u\in[0,t]}\left(\ln\left(\frac{W(u)}{W(u-)}\right) - \frac{\triangle W(u)}{W(u-)}\right)$$
$$= \ln W_0 + rt + \int_{[0,t]}\pi\mathrm{d}\hat{X}(u) + \sum_{u\in[0,t]}(\ln(1+\pi\triangle\hat{X}(u)) - \pi\triangle\hat{X}(u))$$
$$= \ln W_0 + rt + \int_{[0,t]}\pi\mathrm{d}\hat{X}(u) + \int_{[0,t]}\int_{x>-1/\pi}(\ln(1+\pi x)-\pi x)\hat{\mu}(\mathrm{d}u,\,\mathrm{d}x),$$
其中后两项是非随机的. 对 $\ln W(T)$ 取期望得
$$E\ln(W(T)) = \ln W_0 + rT + b_2\int_{[0,T]}\pi\mathrm{d}u + \int_{[0,T]}\int_{|x|>1}\pi x\,\hat{\nu}(\mathrm{d}u,\,\mathrm{d}x)$$
$$+ \int_{[0,T]}\int_{x>-1/\pi}(\ln(1+\pi x)-\pi x)\hat{\nu}(\mathrm{d}u,\,\mathrm{d}x)$$
$$= \ln W_0 + rT + b_2\int_{[0,T]}\pi\mathrm{d}u + \int_{[0,T]}\int_{|x|>1}\pi x\,\hat{l}_X(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u$$
$$+ \int_{[0,T]}\int_{x>-1/\pi}(\ln(1+\pi x)-\pi x)\hat{l}_X(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u.$$
对上式求解使 $E\ln(W(T))$ 最大化的 $\pi=\pi(t)$ 一般需通过数值计算完成. 设找到最优解 π^*, 根据[11], 期权定价公式有
$$P^* = W_0E\left(\frac{C}{W^{\pi^*}}\right) = e^{-rT}E\left[e^{-\int_{[0,T]}\pi^*\mathrm{d}\hat{X}(u)-\int_{[0,T]}\int_{x>-1/\pi^*}(\ln(1+\pi^*x)-\pi^*x)\hat{\mu}(\mathrm{d}u,\,\mathrm{d}x)}C\right].$$

注　命题3相当于取鞅测度 Q_2 满足

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}P}\right|_{\mathscr{F}_t} = \exp\left\{-rt - \int_{[0,t]}\pi^* \,\mathrm{d}\hat{X}(u) - \int_{[0,t]}\int_{x>-1/\pi^*}(\ln(1+\pi^* x) - \pi^* x)\hat{\mu}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x)\right\}$$

$$= \exp\left\{-rt - b_2\int_{[0,t]}\pi^*\,\mathrm{d}u - \int_{[0,t]}\int_{|x|\le 1}\pi^* x(\hat{\mu} - \hat{\nu})(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x)\right.$$

$$\left. - \int_{[0,t]}\int_{|x|>1}\pi^* x\hat{\mu}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x) - \int_{[0,t]}\int_{x>-1/\pi^*}(\ln(1+\pi^* x) - \pi^* x)\hat{\mu}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}x)\right\}.$$

4　附　　录

记 $\mathcal{Y}(t)$ 的特征函数为 $\Phi(u)$，$\Psi(u) := \ln\Phi(u)$，$\Psi_X(u) := \ln\Phi_X(u)$．易知特征函数 $\Phi_{\mathcal{Y}(t)}(-iu) = (1-u)^{-t} = \exp\{-t\ln(1-u)\}$．考虑 $t=1$ 时由

$$-\ln(1-u) = -\int_0^u\frac{\mathrm{d}u}{1-y} = \int_0^u\mathrm{d}y\int_0^\infty e^{-(1-y)x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\infty\mathrm{d}x\int_0^u e^{-(1-y)x}\mathrm{d}y = \int_0^\infty\frac{e^{-x}}{x}(e^{ux}-1)\,\mathrm{d}x.$$

(1) 将 u 用 iu 代替，即得 Lévy-Khintchine 公式

$$\Psi(u) = \int_0^\infty(e^{iux}-1)\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$$

$$= iu\int_0^1 x\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x + \int_0^\infty(e^{iux} - 1 - iuxI_{[|x|<1]})\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$$

$$= i(1-e^{-1})u + \int_0^\infty(e^{iux} - 1 - iuxI_{[|x|<1]})\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$$

进而得到 Lévy 特征 $\left(1-e^{-1}, 0, \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x\right)$．存在 Lévy 密度

$$\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x.$$

(2) 又有

$$\ln\left(1 - iu\theta + \frac{\sigma^2u^2}{2}\right) = \ln\left(1 - iu\frac{\nu_1}{\mu_1}\right) + \ln\left(1 + iu\frac{\nu_2}{\mu_2}\right)$$

于是分别用 $iu\frac{\nu_1}{\mu_1}$，$-iu\frac{\nu_2}{\mu_2}$ 代替 u，有

$$\Psi_X(u) = kt\left[\int_0^\infty\left(e^{iu\frac{\nu_1}{\mu_1}x} - 1\right)\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x + \int_0^\infty\left(e^{-iu\frac{\nu_2}{\mu_2}x} - 1\right)\frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= kt\left[\int_0^\infty\left(e^{iux} - 1\right)\frac{e^{-\frac{\mu_1}{\nu_1}x}}{x}\mathrm{d}x + \int_0^\infty\left(e^{-iux} - 1\right)\frac{e^{-\frac{\mu_2}{\nu_2}x}}{x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= kt\left[\int_0^\infty\left(e^{iux} - 1\right)\frac{e^{-\alpha_1x}}{x}\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0\left(e^{iux} - 1\right)\frac{e^{\alpha_2x}}{x}\mathrm{d}x\right],$$

故 Lévy 密度

$$l_X(x) = \begin{cases} k\dfrac{e^{-\alpha_1x}}{x} & x > 0 \\ -k\dfrac{e^{\alpha_2x}}{x} & x < 0 \end{cases}$$

同时

$$
\begin{aligned}
\psi_X(u) &= kt\left[\int_0^{\infty}\left(e^{iux}-1\right)\frac{e^{-\alpha_1 x}}{x}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{0}\left(e^{iux}-1\right)\frac{e^{\alpha_2 x}}{x}\mathrm{d}x\right]\\
&= kt\left[iu\int_0^{\infty}xI_{\{|x|<1\}}\frac{e^{-\alpha_1}}{x}-iu\int_{-\infty}^{0}xI_{\{|x|<1\}}\frac{e^{\alpha_2}}{x}\right.\\
&\quad\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iux}-1-iuxI_{\{|x|<1\}}\right)l_X(x)\,\mathrm{d}x\right]\\
&= kt\left[iu\left(\frac{1-e^{\alpha_1}}{\alpha_1}-\frac{1-e^{-\alpha_2}}{\alpha_2}\right)+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iux}-1-iuxI_{\{|x|<1\}}\right)l_X(x)\,\mathrm{d}x\right]
\end{aligned}
$$

参 考 文 献

[1] Ané T, Geman H. Order flow, transaction clock and normality of asset returns. Journal of Finance, 2000, LV(5)(Octomber), 2259-2284.

[2] Gmean H, Madan D, Yor M. Time change for Levy processes. Mathematical Finance, 2001, 6: 79-96.

[3] Geman H. Pure jump Levy processes for asset price modelling. Journal of Banking & Finance, 2002, 26: 1297-1316.

[4] Madan D, Carr P, Chang E. The variance gamma process and option pricing. European Finance Review, 1998, 2: 79-105.

[5] Nicolto E, Venardos E. Option pricing in stochastic models of the Ornstein-Uhlenbeck type. Mathematical Finance, 2003, 13: 445-467.

[6] Jacod J, Shiryaev AN. Limit Theorems For Stochastic processes. Berlin Heidelbeg: Springer-Verlag, 1987.

[7] Bingham N H, Kiesel R. Risk-Neutral Valuation. Berlin Heidelbeg: Springer-Verlag, 1998.

[8] Car P, Geman H, Madan D. et al. The fine structure of asset returns: an empirical investigation. Journal of Business, 2002, 75(2): 305-332.

[9] Schweizer M. On the minimal martingale measure and the Föllmer-Schweizer decomposition. Stochastic Analysis and Application, 1995, 13(5): 573-599.

[10] Fujiwara T, Miyahara Y. The minimal entropy martingale measures for geometric Levy processes. Finance and Stochastics, 2003, 7: 509-531.

[11] Davis M. Option pricing in the incomplete markets. In: Dempster, M Pliska, S(eds.) Mathematics of derivative securities. Cambridge: Cambridge University Press, 1997, 216-226.

Variance Gamma Process and Option Pricing

Du Lijin[1] *Liu Jichun*[2]

(1. Department of Economy, Shandong Finance Institute, Jinan 250014;

2. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005)

Abstract In this paper, we research EMMS under one representive Gometric Lévy process named variance Gamma process and discuss its analytic property. Furthermore we consider the vanilla option pricing based this process.

Keywords Variance Gamma pricing; Pure jump; Option pricing