第 13 卷 第 5 期　　　　莆 田 学 院 学 报　　　　Vol.13 No.5
2006 年 10 月　　　　Journal of Putian University　　　　Oct. 2006
文章编号：1672-4143(2006)05-0016-04　　　　中图分类号：O211.6　　　　文献标识码：A

ARCH 型有限阶双线性模型的平稳性

刘继春， 林顺发

（厦门大学 数学科学学院，福建 厦门 361005）

关键词：ARCH 过程；双线性模型；严平稳性；遍历性

摘 要：给出了一个 ARCH 型有限阶双线性模型，讨论了这一模型的严平稳性及遍历性。进一步，做为这一新结论的应用，推导了经典的 ARCH(p)模型存在平稳遍历解的充分必要条件。

Stationarity for a Finite-order ARCH-type Bilinear Model

LIU Ji-chun，LIN Shun-fa

(School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Key words：ARCH process；bilinear model；strict stationarity；ergodicity

Abstract：In this paper, a finite-order ARCH-type bilinear model is presented. The strict stationarity and ergodicity of this model are discussed. Moreover, as an application of the results above, the sufficient and necessary condition for the strict stationarity of the classical ARCH(p) model is deduced.

0 引言

Giraitis 和 Surgailis 提出了一个新的 ARCH 型双线性模型[1]，它满足无穷阶双线性方程

$$X_t=\zeta_t\left(a_0+\sum_{j=1}^{\infty}a_jX_{t-j}\right)+b_0+\sum_{j=1}^{\infty}b_jX_{t-j} \qquad (1)$$

其中$\{\zeta_t, t\in Z\}$是具有 0 均值和方差 1 的 i.i.d.随机变量序列。若设

$$U_t=a_0+\sum_{j=1}^{\infty}a_jX_{t-j},\ V_t=b_0+\sum_{j=1}^{\infty}b_jX_{t-j} \qquad (2)$$

则 V_t 和 U_t^2 分别是 X_t 的条件均值和条件方差，即：

$$V_t=E\{X_t|X_s, s<t\},\ U_t^2=Var\{X_t|X_s, s<t\} \qquad (3)$$

明显地，式(1)包括了经典的 AR(∞)过程($a_j\equiv 0$)及线性 ARCH 模型($b_j\equiv 0$)。[2-3] 另外，式(1)也包括了经典的 ARCH(p)过程和 GARCH(p, q)过程[1]。[1]研究了双线性 ARCH 模型(1)的协方差结构，也分析了该模型的长记忆性质。在[1]中，一个基本的假设是 X_t 的方差是有限的。然而，我们熟知，大量的经济和金融时间序列不是二阶矩平稳的，但他们确实是严平稳列。因此，给出双线性 ARCH 模型(1)的一般的平稳性(有限或无限方差)条件是非常重要的。在本文中，我们将研究双线性 ARCH 模型(1)的有限阶(BLARCH(p, q))情况，即：

$$X_t=\zeta_t\left(a_0+\sum_{j=1}^{p}a_jX_{t-j}\right)+b_0+\sum_{j=1}^{q}b_jX_{t-j} \qquad (4)$$

其中$\{\zeta_t, t\in Z\}$是具有 0 均值的 i.i.d.随机变量序列。在本文中，我们将去掉 ζ_t 方差存在的条件，讨论 BLARCH(p, q)模型(4)存在严平稳及遍历解的条件。进一步，做为这一新结论的应用，我们也推导了经典的 ARCH(p)模型存在平稳遍历解的充分必要条件。

收稿日期：2006-05-24

作者简介：刘继春(1965-)，男，吉林省吉林市人，副教授，博士。

1　严平稳性及遍历性

首先，我们重述 Top-Lyapunov 指数的概念。设 $A=(A_{ij})$ 是一 $r\times r$ 的实矩阵，$\|A\|=\max_i\sum_j|A_{ij}|$ 表示 A 的模。进一步，设 $\{A_t, t\in Z\}$ 是一严平稳、遍历的随机矩阵序列，则 $\{A_t, t\in Z\}$ 的 Top-Lyapunov 指数

$$\gamma=\inf\left\{E\left[\frac{1}{n+1}\log\|A_0A_{-1}\cdots A_{-n}\|\right], n\in N\right\}\qquad(5)$$

其中 $E[\log^+\|A_0\|]<+\infty$。我们知道[4]

$$\gamma=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|A_0A_{-1}\cdots A_{-n}\|,\quad a.s.\qquad(6)$$

这表明 γ 的值与模的选取无关。注意到，若 A_t 是一常数矩阵 A 时，γ 是 A 的谱半径的对数。

设

$$Y_t=(X_t, X_{t-1},\cdots,X_{t-r+1})^{\tau}$$
$$B_t=(a_0\zeta_t+b_0, 0,\cdots,0)^{\tau}\qquad(7)$$

和

$$A_t=\begin{bmatrix} a_1\zeta_t+b_1 & \cdots & a_{r-1}\zeta_t+b_{r-1} & a_r\zeta_t+b_r \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}\qquad(8)$$

其中 τ 表示矩阵的转置，$r=\max(p,q)$，以及对 $i>p$，$a_i=0$ 和对 $j>q$，$b_j=0$。进而，BLARCH(p,q) 模型 (4) 能被表示成向量形式

$$Y_t=A_tY_{t-1}+B_t\qquad(9)$$

定理 1　假设 $\{A_t, t\in Z\}$ 的 Top-Lyapunov 指数 $\gamma<0$，则 BLARCH(p, q) 模型 (4) 有唯一严平稳遍历解。进而，这个平稳解能够被表示为

$$X_t=a_0\zeta_t+b_0+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{r}\cdots\sum_{k_m=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{m}(a_{k_j}\zeta_{t-j+1}+b_{k_j})\right)(a_0\zeta_{t-\sum_{i=1}^{m}k_i}+b_0)\qquad(10)$$

证　设 $\{A_t, t\in Z\}$ 的 Top-Lyapunov 指数 $\gamma<0$。因 $\{\zeta_t, t\in Z\}$ 是具有 0 均值的 i.i.d. 随机变量序列，则由 $E|a_0\zeta_t+b_0|<\infty$，可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log^+\|B_{t-n}\|=0,\quad a.s.$$

所以，利用 (6)，我们有

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left\|\left(\prod_{j=0}^{n-1}A_{t-j}\right)B_{t-n}\right\|\le$$
$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left\|\left(\prod_{j=0}^{n-1}A_{t-j}\right)\right\|\|B_{t-n}\|\le$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left\|\left(\prod_{j=0}^{n-1}A_{t-j}\right)\right\|+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log^+\|B_{t-n}\|=$$
$$\gamma,\quad a.s.$$

再根据 $\gamma<0$，我们知，存在 $c_0\in(0,|\gamma|)$ 和对充分大的 n，

$$\left\|\left(\prod_{j=0}^{n-1}A_{t-j}\right)B_{t-n}\right\|\le\exp\{-c_0n\},\quad a.s.\qquad(11)$$

因此，级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{j=0}^{n-1}A_{t-j}\right)B_{t-n}$$

概率 1 收敛。令

$$Y_t=B_t+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\prod_{j=0}^{n-1}A_{t-j}\right)B_{t-n}\qquad(12)$$

容易验证，由 (12) 定义的 Y_t 是随机差分方程 (9) 的解。注意到 $X_t=e_1^{\tau}Y_t$，其中 $e_1=(1,0,\cdots,0)$。可知 BLARCH(p, q) 模型 (4) 存在严平稳遍历解。通过直接的计算，易得 (10)。

下面我们证明唯一性。设 Y_t^* 是 (9) 的另一平稳解。递推 (9)，可得

$$Y_0^*=B_0+\sum_{n=1}^{m}\left(\prod_{j=0}^{n-1}A_{-j}\right)B_{-n}+\left(\prod_{j=0}^{m}A_{-j}\right)Y_{-m-1}^*$$

注意到 $Y_{-m-1}-Y_{-m-1}^*$ 的分布与 m 无关，(6) 和 $\gamma<0$ 推得

$$\left\|Y_0-Y_0^*\right\|=\left\|\left(\prod_{j=0}^{m}A_{-j}\right)(Y_{-m-1}-Y_{-m-1}^*)\right\|\le$$
$$\left\|\left(\prod_{j=0}^{m}A_{-j}\right)\right\|\left\|Y_{-m-1}-Y_{-m-1}^*\right\|\to_{a.s.}0$$

当 $m\to+\infty$，其中 $\to_{a.s.}$ 表示概率 1 收敛。再根据 Y_t 和 Y_t^* 平稳性，我们知 $Y_t=Y_t^*$，a.s. 这就证明了唯一性。

推论 1　若 $\sum_{j=1}^{r}E|a_j\zeta_t+b_j|<1$，则 BLARCH(p, q) 模型 (4) 有唯一严平稳遍历解。

证　设

$$C_t=\begin{bmatrix} |a_1\zeta_t+b_1| & \cdots & |a_{r-1}\zeta_t+b_{r-1}| & |a_r\zeta_t+b_r| \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}\qquad(13)$$

$\rho(C)$表示 $C=E(C_t)$的谱半径。容易验证 $\rho(C)<1$。则，根据 Perron-Frobenius 定理，存在常数 $c_1>0$ 使得

$$\sum_{i,j}(C^{n+1})_{ij}\le c_1(\rho(C))^{n+1} \tag{14}$$

由(5)，对所有 $n\in N$，我们有，

$$\gamma\le E\left[\frac{1}{n+1}\log\|A_0A_{-1}\cdots A_{-n}\|\right]\le$$

$$\frac{1}{n+1}\log E\|A_0A_{-1}\cdots A_{-n}\| \tag{15}$$

进一步，对所有的 $n\in N$，由(14)和$\{C_t,t\in Z\}$独立性，可得

$$E\|A_0A_{-1}\cdots A_{-n}\|\le$$

$$\sum_{i,j}\left(E\prod_{k=0}^{n}C_{-k}\right)_{ij}=\sum_{i,j}(C^{n+1})_{ij}\le c_1(\rho(C))^{n+1}$$

进而，对所有的 $n\in N$，

$$\gamma\le\frac{1}{n+1}\log c+\log\rho(C) \tag{16}$$

在(16)中，令 $n\to+\infty$，有

$$\gamma\le\log\rho(C)$$

即，$\gamma<0$。因此，由定理 1，我们知道，BLARCH(p,q)模型(4)有唯一严平稳遍历解。利用(10)，由 $\sum_{j=1}^{r}E|a_j\zeta_t+b_j|<1$，易得 $E|X_t|<+\infty$。

推论 2 若 $\sum_{j=1}^{r}|a_j|\delta+|b_j|<1$，则 BLARCH(p,q)模型(4)有唯一严平稳遍历解，其中 $\delta=E|\zeta_t|$。

证 注意到，由 $\sum_{j=1}^{r}|a_j|\delta+|b_j|<1$，可以得到 $\sum_{j=1}^{r}E|a_j\zeta_t+b_j|<1$。再根据推论 1，结论是显然的。

下面我们考虑定理 1 的相反方向，我们有下面的结论。

定理 2 假设 $a_0\zeta_t+b_0>0$ 和 $a_j\zeta_t+b_j\ge0$，$j=1,\cdots,r$，a.s. 若 BLARCH(p,q)模型(4)存在非负严平稳解，则$\{A_t,t\in Z\}$的 Top-Lyapunov 指数 $\gamma<0$。

证 设$\{Y_t,t\in Z\}$是(9)的非负严平稳解，对任意的 $m>0$，我们有

$$Y_0=B_0+\sum_{n=1}^{m}\left(\prod_{j=0}^{n-1}A_{-j}\right)B_{-n}+\left(\prod_{j=0}^{m}A_{-j}\right)Y_{-m-1}$$

进一步，注意到 Y_n、A_n 和 B_n 中的项都是非负的，所以，对任意的 $m>0$，

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\prod_{j=0}^{n-1}A_{-j}\right)B_{-n}\le Y_0$$

这表明级数 $\sum_{n=1}^{m}\left(\prod_{j=0}^{n-1}A_{-j}\right)B_{-n}$ 概率 1 收敛。因此，可得

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{j=0}^{n}A_{-j}\right)B_{-n-1}=0,\quad a.s. \tag{17}$$

设 $e_i=(\underbrace{0,\cdots,0}_{i-1},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{r-i})^{\tau}$，$i=1,\cdots,r$。现在，我们将证明，对 $1\le i\le r$，

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{j=0}^{n}A_{-j}\right)e_i=0,\quad a.s. \tag{18}$$

根据(17)，以及 $a_0\zeta_{-n-1}+b_0$ 的分布独立于 n，

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{j=0}^{n}A_{-j}\right)e_1=$$

$$\lim_{n\to+\infty}(a_0\zeta_{-n-1}+b_0)^{-1}\left(\prod_{j=0}^{n}A_{-j}\right)B_{-n-1}=0,\quad a.s.$$

再由 $A_{-n}e_r=(a_r\zeta_{-n}+b_r)e_1$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{j=0}^{n}A_{-j}\right)e_r=$$

$$\lim_{n\to+\infty}(a_r\zeta_{-n}+b_r)\left(\prod_{j=0}^{n-1}A_{-j}\right)e_1=0,\quad a.s.$$

若对某个 $1<i\le r$，(18)成立，则利用

$$A_{-n}e_{i-1}=(a_{i-1}\zeta_{-n}+b_{i-1})e_1+e_i$$

我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{j=0}^{n}A_{-j}\right)e_{i-1}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{j=0}^{n-1}A_{-j}\right)((a_{i-1}\zeta_{-n}+b_{i-1})e_1+e_i)=0,\quad a.s.$$

因此，通过后移递推，对 $1\le i\le r$，(18)成立。进而，

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{j=0}^{n}A_{-j}=0,\quad a.s.$$

也就是，

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\prod_{j=0}^{n}A_{-j}\right\|=0,\quad a.s. \tag{19}$$

再根据[5]中的引理 2.1，(19)推得$\{A_t,t\in Z\}$的 Top-Lyapunov 指数 $\gamma<0$。这就完成了定理的证明。

2 ARCH(p)模型的平稳性

具有自回归条件异方差(ARCH)的时间序列

模型,首先是由[6]提出,它假定预测误差 ε_t 为实值时间序列，记 ψ_t 为截止到时刻 t 的所有信息的信息集，且

$$\varepsilon_t=z_t h_t^{1/2},\ z_t\sim \text{i.i.d.},\ E(z_t)=0,\ Var(z_t)=1 \quad (20)$$

$$h_t=\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 \quad (21)$$

其中 h_t 是给定信息集合 ψ_{t-1} 时 ε_t 的条件方差，$p>0$，参数 $\alpha_0>0,\alpha_i\geq 0, i=1,2,\cdots,p$。

文献[7]将上述 ARCH 模型推广到更为流行的广义 ARCH(GARCH)模型，即将时刻 t 之前的条件方差作为自变量引人条件方差函数：

$$h_t=\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{q}\beta_j h_{t-j} \quad (22)$$

其中 $\beta_j\geq 0, j=1,\cdots,q$。在金融和经济领域，这类模型有着重要的应用[6-10]。GARCH(p,q)模型(20)和(22)存在平稳解的充分必要条件已经被给出[5]。在这一节中，做为上一节得到结论的一个应用，我们给出 ARCH(p)模型(20)—(21)存在平稳解的充分必要条件，它与[5]给出的结论是一致的。令

$$X_t=\varepsilon_t^2=z_t^2 h_t,\quad \zeta_t=z_t^2-1 \quad (23)$$

则 ARCH(p)模型(20)—(21)可被写成(4)的形式

$$X_t=\zeta_t\left(\alpha_0+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j X_{t-j}\right)+\alpha_0+\sum_{j=1}^{q}\alpha_j X_{t-j} \quad (24)$$

对应(9)，$B_t=(\alpha_0 z_t^2, 0,\cdots,0)$，

$$A_t=\begin{bmatrix}\alpha_1 z_t^2 & \cdots & \alpha_{p-1}z_t^2 & \alpha_p z_t^2\\ 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

根据定理 1—2，显然有

定理 3　ARCH(p)模型(20)—(21)有唯一严平稳遍历解的充分必要条件是$\{A_t, t\in Z\}$的 Top-Lyapunov 指数 $\gamma<0$。进而，这个平稳解能够被表示为

$$\varepsilon_t=z_t\left(\alpha_0+\alpha_0\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{p}\sum_{k_2=1}^{p}\cdots\sum_{k_n=1}^{p}\prod_{j=1}^{n}\alpha_{k_j}\eta^2_{t-\sum_{i=1}^{j}k_i}\right)^{1/2}$$

参考文献：

[1] Giraitis L, Surgailis D. ARCH-type bilinear models with double long memory [J]. Stoch Proc Appl, 2002, 100: 275-300.

[2] Robinson, P M. Testing for strong serial correlation and dynamic conditional heteroskedasticity in multiple regression[J]. J Econometrics, 1991, 47: 67-84.

[3] Giraitis L, Robinson, P M, Surgailis D. A model for long memory conditional heteroskedasticity [J]. Ann Appl Probab, 2000, 10: 1002-1024.

[4] Kingman J F C. Subadditive ergodic theory[J]. Ann Probab, 1973, 1: 883-909.

[5] Bougerol P, Picard N. Stationarity of GARCH processes and of some nonnegative time series [J]. J Econometrics, 1992, 52: 115-127.

[6] Engle R F. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U K inflation [J]. Econometrica, 1982, 50: 987-1007.

[7] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity[J]. J Econometrics, 1986, 31: 307-327.

[8] Bollerslev T, Engle R F, Woodridge J M. A capital asset pricing model with time-varying covariance [J]. J Political Economy, 1988, 96: 116-131.

[9] Weiss A A. ARMA models with ARCH errors [J]. J Time Series Analysis, 1984, 5: 129-143.

[10] Bollerslev T, Chou R Y, Kroner K F. ARCH modeling in finance [J]. J Econometrics, 1992, 52: 5-59.

［责任编辑　林　锋］