第 45 卷 第 3 期 厦门大学学报(自然科学版) Vol.45 No.3
2006 年 5 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) May 2006

带有事件风险的永久美式期权的定价

陈永娟, 刘继春*, 林顺发
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 主要研究带有事件风险的永久美式期权的定价及其最优停时问题. 当事件发生时, 期权就停止, 期权的卖方就要付给期权执有者一定的打折后的支付. 因此, 事件风险的存在会影响期权执有者的执行策略. 本文在一个合适的等价鞅测度下, 给出了带有事件风险的永久美式期权的定价及其最优停时. 进一步地推导了带有事件风险的永久美式期权的上界和下界.

关键词: 永久美式期权; 最优停时; 事件风险; Game 期权
中图分类号: O 211.9; F 840.62 **文献标识码:** A **文章编号:** 0438-0479(2006)03-0323-05

众所周知, 在金融市场中, 我们经常会碰到违约, 破产等事件风险, 这些是人为不可控的, 我们假设市场是不可套利的. 很自然地, 事件风险的存在会影响期权执有者的策略, 以无股息股票的美式看涨期权为例, 在无事件风险的情况下, 我们知道过早执行不是最优的, 因此, 美式看涨期权和欧式看涨期权的值是重合的. 如果存在事件风险情况就会有很大的变化, 如果期权的卖方违约就会使期权无效, 这样期权执有者就会受到损失, 这种情况下较早地执行就会使期权执有者避免由对方的违约而产生的损失. 事件风险在现实市场中是客观存在的, 因此, 研究这种市场环境下的期权的定价是比较接近现实的, 是很有实际意义的.

在过去几年中, 这方面有相当丰富的研究成果: 关于带有事件风险的欧式期权的定价及其最优停时问题, 文献[1~4]给出了令人满意的结论; 在到期日有限时, 文献[5]研究了带有事件风险的美式期权的定价及其最优停时问题. 在本文中, 我们所关心的问题是到期日是无穷的情况, 即: 带有事件风险的永久美式期权的定价及其最优停时问题.

1 模型的建立

我们考虑一个标准的 B-S 模型:

市场帐户 B 满足:

$$dB_t = rB_t dt, \qquad t \in [0, \infty),$$

这里 $r > 0$ 表示利率, $B_0 = 1$.

股票价格过程 S 满足:

$$dS_t = S_t\mu dt + S_t\sigma dW_t, \qquad t \in [0, \infty),$$

这里 $S_0 \in R^+$, $\sigma \in R^+$, $\mu \in R$. 为了记号方便, 本文用 $\overline{R}^+$ 表示 $[0, \infty)$.

设 $(\Omega, F, \mathscr{F}, P)$ 是一个带流的完备的概率空间, 其中 $\mathscr{F}_t = \sigma(S_u, 0 \leqslant u \leqslant t)$, $F = \{\mathscr{F}_t\}_{t\in\overline{R}^+}$ 是满足通常条件的 σ- 代数流, P 是现实的概率测度. 上述模型中 $W = \{W_t, t \in R^+\}$ 是 F- 布朗运动. 我们假设 τ 是事件风险发生的时刻, 并且记 $N_t = I_{(\tau\leqslant t)}$, 以及 $\mathscr{H}_t = \sigma(N_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$. 因此, $H = \{\mathscr{H}_t\}_{t\in\overline{R}^+}$ 是满足通常条件且使得 τ 是 $\mathscr{H}$ 停时的最小的 σ 代数流. 令 $\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_t \vee \mathscr{H}_t$, $G = \{\mathscr{G}_t\}_{t\in\overline{R}^+}$, 则 N_t 是 G- 下鞅. 进一步, 由文献[1]的 Doob-Meyer 分解定理, 存在惟一的可料增过程 $A_t (A_0 = 0)$, 使得 $M_t = N_t - A_t$ 是 G- 鞅. 在本文中, 我们假设 A_t 是绝对连续的, 从而存在一个可料过程 λ 使得 $A_t = \int_0^{t\wedge\tau} \lambda ds$, 这里称 λ 为 τ 的 G- 强度. 在金融市场中, 通常把 λ 当作利率的变化率. 进一步, 如文献[2], 作如下假设:

假设(H_1) 任意 F- 平方可积鞅是 G- 平方可积鞅.

由文献[2], 在假设(H_1)下, 对任意的 $t \in \overline{R}^+$, 有 $P(\tau \leqslant t \mid \mathscr{F}_\infty) = P(\tau \leqslant t \mid \mathscr{F}_t)$; $P(\tau \geqslant t \mid \mathscr{F}_\infty) = P(\tau \geqslant t \mid \mathscr{F}_t) = \exp(-\int_0^t \lambda ds)$. 记

$$Z^\lambda_{s,t} = \frac{P(\tau \geqslant t \mid \mathscr{F}_\infty)}{P(\tau \geqslant s \mid \mathscr{F}_\infty)} = \exp(-\int_s^t \lambda_u du).$$

用 $\mathscr{Q}$ 表示与 P 等价的等价鞅测度全体. 对任意的 $Q \in \mathscr{Q}$, Q^F 表示 Q 在 F 上的限制. 由文献[1]的 Girsanov- 型变换, 对任意的 $Q \in \mathscr{Q}$, 存在 Q 对 P 的密度过程 $L^{\phi,\varphi}$ 使得

收稿日期: 2005-11-30
作者简介: 陈永娟(1980-), 女, 硕士研究生. 现工作单位: 莆田学院.
* 通讯作者: Liujichun65@126.com

$$dL^{\phi,\varphi} = L^{\phi,\varphi}(\phi dW_t + (\varphi - 1)dM_t) \tag{1}$$

这里 $t \in \overline{R}^+$ 和 $L_0^{\phi,\varphi} = 1$, ϕ和 φ是可料过程, φ是严格正的, 且

$$\int_0^\infty \phi_t^2 dt < \infty, \quad \int_0^\infty \varphi_t \lambda dt < \infty, \quad a.s. \tag{2}$$

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \phi_s ds \text{ 和 } \tilde{M}_t = N_t - \int_0^{t\wedge\tau} \varphi_s \lambda_s ds \tag{3}$$

是 Q- 鞅, 而且$\tilde{W}$ 是 Q- 标准布朗运动, $\tilde{\lambda} = \lambda\varphi$是$N$ 的 Q- 强度.

现在, 考虑带有事件风险的永久美式期权. 设 X_σ 表示期权在随机时刻 σ 执行的收益, X 是非负的关于 F- 适应的, 且轨道连续的过程. Y_τ 表示事件风险在随机时刻 τ 发生的修正收益, Y 是非负的关于 F- 适应的, 且轨道连续的过程. 需要做如下的假设:

假设(H_2) $E_{Q^F}(\sup_{t\in\overline{R}^+} X_t) < \infty$;

$E_{Q^F}(\sup_{t\in\overline{R}^+} Y_t^2) < \infty$.

记 $\mathcal{G}_\infty \equiv \sigma\{(\bigcup_{t\in R^+} \mathcal{F}_t) \cup \sigma(\tau)\}$; 用 $\mathcal{M}$表示在$[t, \infty]$上取值, 且关于 F 是停时的随机变量全体; $R(\sigma, \tau)$ 表示在随机时刻 $\sigma\wedge\tau$的收益过程, 即

$$R(\sigma, \tau) = I_{(\sigma\leqslant\tau)} X_\sigma + I_{(\tau<\sigma)} Y_\tau \tag{4}$$

2 主要定理及证明

由前面的定义知G与F 的区别是F 中加入了一个不可预测停时τ构成G. 我们希望在一定的条件下能将关于 G 的计算转换成关于 F 的计算. 下面的两个引理告诉我们, 在 $\tau > t$ 或 $\sigma\wedge\tau > t$ 时能将关于G 的条件期望的计算转换成关于 F 的条件期望的计算.

引理1 设X 是一个$\mathcal{G}_\infty$- 可测, 可积的随机变量, 则对任意的 $t \in \overline{R}^+$, 有

$$E(X \mid \mathcal{G}_t) I_{\tau>t} = \frac{E(XI_{\tau>t} \mid \mathcal{F}_t)}{E(I_{\tau>t} \mid \mathcal{F}_t)} I_{\tau>t}.$$

证明 因为$\mathcal{G}_\infty = \mathcal{F}_\infty \vee \sigma(\tau)$, 由单调类定理可知 $\mathcal{G}_t \subset \{A \in \mathcal{G}_\infty \mid \exists A_t \in \mathcal{F}_t, A \cap \{\tau > t\} = A_t \cap \{\tau > t\}\}$.

显然, $\dfrac{E(XI_{\tau>t} \mid \mathcal{F}_t)}{E(I_{\tau>t} \mid \mathcal{F}_t)} I_{\tau>t}$ 关于 $\mathcal{G}_t$可测, 则对任意的 $A \in \mathcal{G}_t$,

$$\int_A XI_{\tau>t} dP = E(XI_{A_t\cap(\tau>t)}).$$

另一方面, 有

$$\int_A \frac{E(XI_{\tau>t} \mid \mathcal{F}_t)}{E(I_{\tau>t} \mid \mathcal{F}_t)} I_{\tau>t} dP =$$

$$\int_{A\cap(\tau>t)} E(XI_{\tau>t} \mid \mathcal{F}_t) dP =$$

$$\int E(XI_{\tau>t} \mid \mathcal{F}_t) I_{A_t\cap(\tau>t)} dP = E(XI_{A_t\cap(\tau>t)}),$$

所以, $E(X \mid \mathcal{G}_t) I_{\tau>t} = \dfrac{E(XI_{\tau>t} \mid \mathcal{F}_t)}{E(I_{\tau>t} \mid \mathcal{F}_t)} I_{\tau>t}$. 证毕.

引理 2 X_σ, Y_τ 如第一节约定, $R(\sigma, \tau)$ 的定义见式(4), 假设带有事件风险的永久美式期权是通过 X, Y 所定义的, 对给定的一个等价鞅测度Q, 在 $\sigma\wedge\tau > t$ 上, 有

$$E_{Q^F}\left\{e^{-r(\sigma\wedge\tau)} R(\sigma, \tau) \mid \mathcal{G}_t\right\} I_{(\sigma\wedge\tau)>t} = E_{Q^F}\left\{\int_t^\sigma \frac{Y_u}{B_u}\lambda_u Z_{t,u}^\lambda du + \frac{X_\sigma}{B_\sigma} Z_{t,\sigma}^\lambda \mid \mathcal{F}_t\right\} I_{(\sigma\wedge\tau)>t} \tag{5}$$

证明 根据$R(\sigma, \tau)$ 定义, 知

$$E_{Q^F}\left\{e^{-r(\sigma\wedge\tau)} R(\sigma, \tau) \mid \mathcal{G}_t\right\} I_{(\sigma\wedge\tau)>t} =$$
$$E_{Q^F}\left\{e^{-r\sigma} X_\sigma I_{\sigma\leqslant\tau} + e^{-r\tau} Y_\tau I_{\tau<\sigma} \mid \mathcal{G}_t\right\} I_{(\sigma\wedge\tau)>t} =$$
$$E_{Q^F}\left\{e^{-r\sigma} X_\sigma I_{\sigma\leqslant\tau} \mid \mathcal{G}_t\right\} I_{(\sigma\wedge\tau)>t} +$$
$$E_{Q^F}\left\{e^{-r\tau} Y_\tau I_{\tau<\sigma} \mid \mathcal{G}_t\right\} I_{(\sigma\wedge\tau)>t}.$$

进一步, 由引理 1 及 $Z_{t,\sigma}^\lambda$ 的定义, 有

$$E_{Q^F}\left\{e^{-r\sigma} X_\sigma I_{\sigma\leqslant\tau} \mid \mathcal{G}_t\right\} I_{(\sigma\wedge\tau)>t} =$$
$$\frac{E_{Q^F}\left\{e^{-r\sigma} X_\sigma I_{t<\sigma\leqslant\tau} \mid \mathcal{F}_t\right\}}{E_{Q^F}\left\{I_{\tau>t} \mid \mathcal{F}_t\right\}} I_{\tau>t} =$$
$$E_{Q^F}\left\{E_{Q^F}\left[\frac{e^{-r\sigma} X_\sigma I_{t<\sigma\leqslant\tau}}{E_{Q^F}(I_{t<\tau} \mid \mathcal{F}_t)}\right] \middle| \mathcal{F}_\infty \middle| \mathcal{F}_t\right\} I_{\tau>t} =$$
$$E_{Q^F}\left\{e^{-r\sigma} X_\sigma I_{\sigma>t} \frac{E_{Q^F}\{I_{\tau\geqslant\sigma} \mid \mathcal{F}_\infty\}}{E_{Q^F}\{I_{\tau\geqslant t} \mid \mathcal{F}_\infty\}} \middle| \mathcal{F}_t\right\} I_{\tau>t} =$$
$$E_{Q^F}\left\{e^{-r\sigma} X_\sigma Z_{t,\sigma}^\lambda \mid \mathcal{F}_t\right\} I_{(\sigma\wedge\tau)>t}.$$

再由文献[3] 命题 3.4, 有

$$E_{Q^F}\left\{e^{-r\tau} Y_\tau I_{\tau<\sigma} \mid \mathcal{G}_t\right\} I_{(\sigma\wedge\tau)>t} =$$
$$E_{Q^F}\left\{\int_t^\sigma e^{-ru} Y_u \exp\left\{-\int_t^u \lambda ds\right\} \lambda_u du \middle| \mathcal{F}_t\right\} I_{(\sigma\wedge\tau)>t} =$$
$$E_{Q^F}\left\{\int_t^\sigma e^{-ru} Y_u Z_{t,u}^\lambda \lambda_u du \middle| \mathcal{F}_t\right\} I_{(\sigma\wedge\tau)>t}.$$

所以式(5) 成立. 证毕.

为了下面定理证明的需要, 我们重新描述一下在文献[9] 已经得到的结论.

引理 3 令 $Q \in \mathcal{Q}$是一个等价鞅测度, 则 Q 由 $dQ = L_\infty^{\phi,\varphi} dP$ 确定, 这里 $L^{\phi,\varphi}$ 如式(1) 定义, 且有

$$\phi_t = -\frac{\mu - r}{\sigma}, t \in R^+.$$

式(3) 中的测度变换是由 ϕ, φ确定, 它们与风险的市场价格有密切关系, 引理 3 告诉我们股票风险的市场价格为$-\dfrac{\mu - r}{\sigma}$, 因为股票是可交易的, 且没有加入事件风险的市场是完备的, 所以股票风险的市场价格是惟一的。对事件风险而言, 市场是不完备的, 事件风险不能由任何可交易资产所反映, 因此事件风险的市场价格 $\lambda\varphi$ 是不惟一的. Q 是 $\mathcal{Q}$中的一个等价鞅测度, 市场模型$(\Omega, F, \mathcal{F}, P)$ 是完备的, 因此等价鞅测度集 $\mathcal{Q}^F$ 只有一个元素, 即 $\mathcal{Q}^F = \{Q^F\}$, 也就是说$\mathcal{Q}$的所有元素在 F 上的限制是重合的, 且 Q^F 是惟一的.

下面应用上面的引理给出带有事件风险的永久美式期权的定价公式. 我们采用跟带有事件风险的欧式期权和美式期权定价类似的方法, 引入一个辅助过程. 带有事件风险的永久美式期权的最优停时问题的解就是这个辅助过程的 snell- 包络(也就是控制这个辅助过程的最小的上鞅) 在某个临界点的值.

定理 1　设 $Q \in \mathcal{Q}$, 并记 $\frac{V_t}{B_t} = \operatorname{ess}\sup_{\sigma\in\mathcal{M}_t} E_{Q^F}\left\{\int_t^\sigma \frac{Y_u}{B_u}\lambda_u Z^\lambda_{0,u}\,du + \frac{X_\sigma}{B_\sigma}Z^\lambda_{t,\sigma}\middle|\mathcal{F}_t\right\}$, 其中 λ 是 τ 的 Q- 强度. 则带有事件风险的永久美式期权的价值为 V_0, 且 V 是在 $\sigma\wedge\tau > t$ 上的右连左极过程. 若对任意的 $t\in\overline{R}^+$, 令

$$I_t = \int_0^t \frac{Y_u}{B_u}\lambda_u Z^\lambda_{0,u}\,du + \frac{X_t}{B_t}Z^\lambda_{0,t},$$

则 I_t 的 snell- 包络存在, 记其包络为 J_t. 进一步, 有

$$V_t = \frac{B_t}{Z^\lambda_{0,t}}\left(J_t - \int_0^t \frac{Y_s}{B_s}\lambda_s Z^\lambda_{0,s}\,ds\right),\ 对任意的\ t\in\overline{R}^+.$$

对任意的 $t\in\overline{R}^+$, 再令

$\sigma_t^* = \inf\{u \geqslant t: I_u \geqslant J_u\}\in\mathcal{M}_t$,

则在 $\sigma\wedge\tau > t$ 上,

$$E_Q\left\{\frac{B_t}{B_{\sigma\wedge\tau}}R(\sigma,\tau)\middle|\mathcal{G}_t\right\} \leqslant E_Q\left\{\frac{B_t}{B_{\sigma_t^*\wedge\tau}}R(\sigma_t^*,\tau)\middle|\mathcal{G}_t\right\} = V_t,$$

对任意的 $\sigma\in\mathcal{M}_t$.

证明　显然 $I_t \geqslant 0$. 记 $X_t^* = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s$, $Y_t^* = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} Y_s$.

首先注意到 $\int_0^\infty \lambda_u Z^\lambda_{0,u}\,du + Z^\lambda_{0,\infty} = 1$, 且 $Z^\lambda_{0,t}$ 是关于 Q 的条件生存函数, 从而有 $0\leqslant Z^\lambda_{0,t}\leqslant 1$. 由假设$(H_2)$, 有

$$\begin{aligned}
&E_{Q^F}\left\{\sup_{t\in\overline{R}^+} I_t\right\} = \\
&E_{Q^F}\left\{\sup_{t\in\overline{R}^+}\left[\int_0^t \frac{Y_u}{B_u}\lambda_u Z^\lambda_{0,u}\,du + \frac{X_t}{B_t}Z^\lambda_{0,t}\right]\right\} \leqslant \\
&E_{Q^F}\left\{\sup_{t\in\overline{R}^+}\left[\int_0^\infty Y_u^*\lambda_u Z^\lambda_{0,u}\,du + X_\infty^* Z^\lambda_{0,t}\right]\right\} \leqslant \\
&E_{Q^F}\left\{Y_\infty^*\int_0^\infty \lambda_u Z^\lambda_{0,u}\,du + X_\infty^*\right\} = \\
&E_{Q^F}\left\{Y_\infty^*(1 - Z^\lambda_{0,\infty}) + X_\infty^*\right\} \leqslant \\
&E_{Q^F}\left\{Y_\infty^* + X_\infty^*\right\} < \infty.
\end{aligned}$$

因为 I 是连续的 F- 适应的过程, 且 $E_{Q^F}\sup_{t\in\overline{R}^+} I_t < \infty$, 由文献[4], I_t 的 Snell- 包络存在, 记为 J_t. 由文献[5], 知 $J_t = \operatorname{ess}\sup_{N\in\mathcal{M}_t} E_{Q^F}\{I_N|\mathcal{F}_t\}$, 且 $J_R = \operatorname{ess}\sup_{N\in\mathcal{M}_R} E_{Q^F}\{I_N|\mathcal{F}_R\}$. 由 V_t 的定义, 可知

$$V_t = \frac{B_t}{Z^K_{0,t}}\left(J_t - \int_0^t \frac{Y_t}{B_s}K_s Z^K_{0,s}\,ds\right).$$

在 $R\ C\ S > t$ 上, 定义

$U_t^R = B_t E_{Q^F}\left\{e^{-r(R C S)}R(R,S) \mid \mathcal{G}_t\right\}$.

由引理 2 可知, 在 $R\ C\ S > t$ 上,

$$\frac{U_t^R}{B_t} = \frac{1}{Z^K_{0,t}}\left(E_{Q^F}(I_R|\mathcal{F}_t) - \int_0^t \frac{Y_s}{B_s}K_s Z^K_{0,s}\,ds\right) [$$

$$\frac{1}{Z^K_{0,t}}\left(J_t - \int_0^t \frac{Y_s}{B_s}K_s Z^K_{0,s}\,ds\right).$$

由文献[4], $J_t = E_{Q^F}(I_{R_t} \mid \mathcal{F}_t)$, 则在 $R\ C\ S > t$ 上, 有 $V_t = U_t^{R_t} \setminus U_t^R$, 即

$$E_{Q^F}\left(\frac{B_t}{B_{RCS}}R(R,S)\middle|\mathcal{G}_t\right) [$$

$$E_{Q^F}\left(\frac{B_t}{B_{R_t C S}}R(R^*,S)\middle|\mathcal{G}_t\right) = V_t,$$

对任意的 $R\ I\ \mathcal{M}_t$. 证毕.

在下面的定理中给出带有事件风险的永久美式期权值的上界及下界, 直观看来是比较明显的, 但证明起来需要注意一些问题. 为了达到上界我们要找到对期权持有者而言最好的等价鞅测度, 因此上界是使得收益过程为 $X\ D\ Y$ 的带有事件风险的永久美式期权的惟一价格. 下界是对于期权持有者而言最糟糕的情况的价格, 因此, 要构造一个对期权持有者而言最有挑战性的等价鞅测度. 我们找到的下界恰好是收益过程为 X, 取消折扣过程为 $X\ D\ Y$ 的 Game 期权的下界. (注: Game 期权的执有者和卖方可以在任何时候终止合约, 执有者可以在任何时候以某一确定的价格购买(或出售) 标的资产, 若期权卖方终止合约, 他(她) 必须付给期权执有者相应的取消折扣费.)

定理 2　假设带有事件风险的永久美式期权是通过 X, Y 所定义的, 对任意的 $Q\ I\ \mathcal{Q}$, $V8$ 表示带有事件风险的永久美式期权的值, 则它满足下列无套利的界:

$$\overline{V}_0\ [\ V8\ [\ V_0^*,$$

其中

$$\overline{V}_0 = \sup_{R\in\mathcal{M}_0} E_{Q^F}\{\exp(-rR)(X\ D\ Y)_R\},$$

$$V_0^* = \inf_{N\in\mathcal{M}_0}\sup_{R\in\mathcal{M}_0} E_{Q^F}\{\exp(-r(R\ C\ N))\,R(R,N)\} =$$

$$\sup_{R\in\mathcal{M}_0}\inf_{N\in\mathcal{M}_0} E_{Q^F}\{\exp(-r(R\ C\ N))\,R(R,N)\}$$

和

$$R(R,S) = I_{R\leqslant S}X_R + I_{S<R}(X\ D\ Y)_S$$

证明　第一部分: 令 $Y = X\ D\ Y$. 由 X, Y 的假设 Y 是 F- 适应的, 非负的, 轨道连续的过程, 且 $E_{Q^F}(\sup_{t\ I\ \overline{R}^+} Y_t) <]$. 由文献[6] 的引理 2.6, 有

$$J_t = \operatorname{ess}\sup_{R\in\mathcal{M}_t(F)} E_{Q^F}\left\{\frac{Y_R}{B_R}\middle|\mathcal{F}_t\right\} =$$

$$\operatorname{ess}\sup_{R\in\mathcal{M}_t(G)} E_Q\left\{\frac{Y_R}{B_R}\middle|\mathcal{G}_t\right\} \setminus E_Q\left\{\frac{Y_R}{B_R}\middle|\mathcal{G}_t\right\}.$$

因为 R 是取值于 $\overline{R}^+$ 的 F- 停时, S 是 G- 停时, 且 F

G, 所以 $R C S$ 是 G- 停时. $R(R, S) = I_{R[S}X_R + I_{S<R}Y_S$, $Y_{RCS} = (X\ D\ Y)_{RCS} \setminus R(R, S)$. 所以,

$$E_Q\{e^{-r(RCS)}R(R, S)\} [\ E_Q\{e^{-r(RCS)}Y_{RCS}\} [\ J_0\ s\ V_0^*.$$

这样, 就得到一个 V_0^8 的一个上界 V_0^*.

下证 V_0^* 可以取得到. 构造等价鞅测度 $Q_n\ I\ Q$ 使得 $V_0^{8_n}$ 单调上升于 V_0^*.

$$R^* = \inf\{t \setminus 0: J_0 [\ Y_t/B_t\}.$$

则 R^* 是取值于 $\overline{R}^+$ 的 F- 停时. 我们如下定义 R^*, S^*:

$$R^* = \begin{cases} R^*, & 当\ Y_R = X_R \\ ], & 否则 \end{cases}$$

$$S^* = \begin{cases} R^*, & 当\ Y_R = Y_R \\ ], & 否则 \end{cases}$$

由引理 3, 通过 $U^n = \frac{K^n}{K}$ 确定相应的测度 Q_n, 这里 K^n 是 S 的 Q_n - 强度, 其中 $K^n = 1/n + nI_{(R^* < t, Y_{R^*} = Y_{R^*})}$. 注意到 R^* 和 S^* 是 F- 停时, 且对任意的 $n\ I\ N$, Q_n 与 Q^F 在 F 上重合, (R^*, S) 弱收敛于 (R^*, S^*), 因此, 对任意的 $E > 0$, 有

$$\lim_{n y]} Q_n(|S - S^*| > E) = 0.$$

又由文献[4] 及 X 与 Y 的连续性, 当 $n\ y\ ]$ 时, 有

$$E_{Q_n}\{R(R^*, S)/B_{R C S}\}\ y\ E_{Q^F}\{R(R^*, S^*)/B_{R C S^*}\} = E_{Q^F}\{Y_R/B_R\} = V_0^*.$$

且对任意的 $n\ I\ N$, $E_{Q_n}\{R(R^*, S)/B_{R C S}\} [\ V_0^{8_n} [\ V_0^*$. 所以, $V_0^{8_n}$ 单调上升收敛于 V_0^*.

第二部分　对任意的 $R\ I\ \mathscr{M}$, $t\ I\ \overline{R}^+$, 令

$$U_t^R = e^{-r(RCt)}R(R, t) = e^{-r(RCt)}\left\{I_{R[t}X_R + I_{t<R}Y_t\right\}.$$

$U^R = \left\{U_t^R\right\}_{t I \overline{R}^+}$ 是 F- 适应的右连左极过程. 记

$$J_t^R = \text{ess inf}_{N I \mathscr{M}} E_{Q^F}\{U_N^R | \mathscr{F}_t\}.$$

由假设(H1), $J^R = \left\{J_t^R\right\}_{t I \overline{R}^+}$ 是 G- 下鞅, 且有 $J_t^R = J_{tCR}^R [\ U_{tCR}^R = e^{-r(RCt)}R(R, t)$. 因此 $J_S^R [\ e^{-r(RCS)}R(R, S)$ 及

$$\inf_{N I \mathscr{M}} E_{Q^F}\{U_N^R\} = J_0^R [\ E_Q\{J_S^R\} [\ E_Q\{e^{-r(RCS)}R(R, S)\}.$$

从而有

$$\sup_{R I \mathscr{M}} \inf_{N I \mathscr{M}} E_{Q^F}\{U_N^R\} [\ \sup_{R I \mathscr{M}} E_Q\{e^{-r(RCS)}R(R, S)\} \tag{6}$$

这样, 就可以得到 V^8 的一个下界. 令 $v = \inf\{t \setminus 0: X_t \setminus Y_t\}$, 并且要求 $Ev^2 <]$, $\mathscr{M}$ 表示取值于 0 到 v 的 F- 停时. 由式(6), 有

$$\sup_{R I \mathscr{M}} \inf_{N I \mathscr{M}} E_{Q^F}\{U_N^R\} [\ \sup_{R I \mathscr{M}} E_Q\{e^{-r(RCS)}R(R, S)\}.$$

由 U_t^R 及 V^8 的定义可知,

$$\sup_{R I \mathscr{M}} \inf_{N I \mathscr{M}} E_{Q^F}\{e^{-r(RCN)}R(R, N)\} [\ V^8 \tag{7}$$

当 $t\ [\ v$ 时, $X_t\ [\ Y_t = (X\ D\ Y)_t$, 此时,

$$R(R, N) = R(R, N) = I_{R[N}X_R + I_{N<R}(X\ D\ Y)_N$$

所以式(7) 可以写为: $\sup_{R I \mathscr{M}} \inf_{N I \mathscr{M}} E_{Q^F}\{e^{-r(RCN)}R(R, N)\} [\ V^8$. 对任意的 $t\ I\ \overline{R}^+$, 令

$$V_t^- = \text{ess sup}_{R I \mathscr{M}_t} \text{ess inf}_{N I \mathscr{M}_t} E_{Q^F}\left\{e^{-r(RCN)}R(R, N) | F_t\right\}.$$

由文献[7], 可知 V_0^- 是执行值为 X, 取消折扣值为 $X\ D\ Y$ 的 Game 期权的值, 同时对于这样的 Game 期权, 最优执行时间 R^* 为:

$$R^* = \inf\{t > 0: X_t/B_t \setminus V_t^-\}.$$

最优取消时间 N^* 为:

$$N^* = \inf\{t > 0: (X\ D\ Y)_t/B_t [\ V_t^-\}.$$

当 $t\ [\ (R^*\ C\ N^*)$ 时, $X_t/B_t [\ V_t^- [\ (X\ D\ Y)_t/B_t$. 又因为 $X_v \setminus Y_v$, 所以, $v\ [\ (R^*\ C\ N^*)$ 时, $X_v/B_v = V_v^- = (X\ D\ Y)_v/B_v$. 因此当 $v\ [\ (R^*\ C\ N^*)$, 就可以马上执行或取消. 所以, 我们可以认为 R^*, $N^*\ [\ v$, 也就是说, R^*, $N^*\ I\ \mathscr{M}$, 从而有

$$V_0^- = \text{ess sup}_{R I \mathscr{M}} \text{ess inf}_{N I \mathscr{M}} E_{Q^F}\left\{e^{-r(RCN)}R(R, N)\right\} = \inf_{N I \mathscr{M}} E_{Q^F}\left\{e^{-r(R^* C N)}R(R^*, N)\right\} [\ \sup_{R I \mathscr{M}} \inf_{N I \mathscr{M}} E_{Q^F}\{e^{-r(RCN)}R(R, N)\} [\ V^8.$$

下证存在 $(Q_n)_{n I N}\ I\ \mathscr{Q}$, 使得 $V^{8_n}\ y\ V_0^-$. R^*, N^* 与上面的定义一样. 由引理 3, 通过 $U^n = \frac{K^n}{K}$ 来定义相应的等价鞅测度 Q_n, K^n 是 S 的 Q_n- 强度, 且对任意的 $t\ I\ \overline{R}^+$,

$$K_t^n = 1/nI_{t[N^*} + nI_{t>N^*}.$$

注意到

$$Z_{0,t}^K = \exp\left\{-\int_0^t K_s^n ds\right\} = \exp\left\{-\left\{\int_0^t 1/nI_{s[N^*} ds + nI_{s>N^*} ds\right\}\right\} = \exp\left\{-\left\{\int_0^{N} 1/n ds + \int_{N^*}^t n ds\right\}\right\} = \exp\left\{-\left\{1/nN^* + n|t - N^*|^+\right\}\right\} [\ \exp\left\{-\left\{n|t - N^*|^+\right\}\right\},$$

其中 $|t - N^*|^+ = \begin{cases} 0, & 当\ t\ [\ N^*, \\ t - N^*, & 当\ t > N^*. \end{cases}$

进而, 由 V^{8_n} 的定义及引理 2, 对任意的 $n\ I\ N$, 有

$$V^{8_n} = \sup_{R I \mathscr{M}} E_{Q_n}\left\{e^{-r(RCS)}R(R, S)\right\} = \sup_{R I \mathscr{M}} E_{Q^F}\left\{\int_0^R \frac{Y_t}{B_t}K_t^n Z_{0,t}^K dt + \frac{X_R}{B_R}Z_{0,R}^K\right\} [\ \sup_{R I \mathscr{M}} E_{Q^F}\left\{\int_{RCN^*}^R \frac{Y_t}{B_t} n e^{-n|t-N^*|^+} dt + \frac{X_R}{B_R}e^{-n|t-N^*|^+}\right\} +$$

$$E_{Q^F}\left\{\int_0^{\sigma^*} Y_t 1/n \mathrm{d}t\right\},$$

另外

$$E_{Q^F}\left\{\int_0^{\sigma^*} Y_t 1/n \mathrm{d}t\right\} \leq 1/n E_{Q^F}\{Y_\infty^* v\} \leq$$

$$1/n(E_{Q^F} Y_\infty^{*2})^{\frac{1}{2}}(E_{Q^F} v^2)^{\frac{1}{2}} = O(1/n).$$

令

$$Z_n(\tau) = \int_0^{\tau \wedge \sigma} \frac{Y_t}{B_t} n e^{-n|t-\sigma^*|^+} \mathrm{d}t + \frac{X_\tau}{B_\tau} e^{-n|t-\sigma^*|^+}.$$

则 $V_8^{n} \leq \sup_{\tau \in \mathcal{M}_0} E_{Q^F}\{Z_n(\tau)\} + O(1/n)$. 经过适当的变换有

$$Z_n(\tau) = 1_{\tau \leq \sigma} \frac{X_\tau}{B_\tau} + 1_{\sigma < \tau} \frac{Y_\tau}{B_\tau} e^{-n|t-\sigma^*|^+} +$$

$$1_{\sigma < \tau} \int_0^{\tau-\sigma^*} \frac{Y_{\sigma+t}}{B_{\sigma+t}} n e^{-nt} \mathrm{d}t.$$

因为密度为 ne^{-nt} 的测度收敛于在 0 点的 Dirac 测度, 所以

$$\lim_{n \to \infty} E_Q\left\{1_{\sigma < \tau} \int_0^{\tau-\sigma^*} \frac{Y_{\sigma+t}}{B_{\sigma+t}} n e^{-nt} \mathrm{d}t\right\} =$$

$$E_{Q^F}\left\{1_{\sigma < \tau} \frac{Y_\sigma}{B_\sigma}\right\} \tag{8}$$

因为 $n \to \infty$ 时 $e^{-n} \to 0$, 所以

$$\lim_{n \to \infty} E_{Q^F}\left\{1_{\sigma < \tau} \frac{Y_\tau}{B_\tau} e^{-n|t-\sigma^*|^+}\right\} = 0 \tag{9}$$

由式(8) 和(9), 并注意到 $\sigma^* \leq v$, 有

$$\lim_{n \to \infty} E_{Q^F}\{Z_n(\tau)\} = E_{Q^F}\left\{1_{\tau \leq \sigma} \frac{X_\tau}{B_\tau} + 1_{\sigma < \tau} \frac{Y_\sigma}{B_\sigma}\right\} =$$

$$E_{Q^F}\{e^{-r(\tau \wedge \sigma^*)} R(\tau, \sigma^*)\} =$$

$$E_{Q^F}\{e^{-r(\tau \wedge \sigma^*)} R(\tau, \sigma^*)\}.$$

所以 $\lim_{n \to \infty} V_8^{n} \leq \sup_{\tau \in \mathcal{M}_0} E_{Q^F}\{e^{-r(\tau \wedge \sigma^*)} R(\tau, \sigma^*)\} = \overline{V_0}$.

又因为 $\overline{V_0} \leq V_8$, 所以 $\lim_{n \to \infty} V_8^{n} = \overline{V_0}$. 证毕.

注: 本文的定理 2 的证明要求 $E_{Q^F}(\sup_{t \in R^+}) Y_t^2 < \infty$, 此条件比带有事件风险的美式期权的相应定理的条件 $(E_{Q^F}(\sup_{t \in [0,T]} Y_t) < \infty)$ 稍强.

参考文献:

[1] Jacod J, Shiryaev A N. Limit Theorems for Stochastic Processes[M]. Berlin Heidelberg, New York: Springer, 1987.

[2] Kusuoka I, Maruyama T. Advances in Mathematical Economics[C]. Berlin Heidelberg New York: Springer, 1999: 69-82.

[3] Elliott R J, Jeanblanc M, Yor M. On models of default risk [J]. Math. Finance, 2000, 10(2): 179-195.

[4] Karatzas I, Shreve S E. Methods of Mathematical Finance [M]. Berlin Heidelberg, New York: Springer, 1998.

[5] Shiryaev A N, Kabanov Y M, Kramkov D O, et al. Toward the theory of pricing of option of both European and American types . continuous time[J]. Theory. Probab. Appl., 1994, 39(1): 61-102.

[6] Mulinacci S, Pratelli M. Functional convergence of snell envelopes: applications to American options approximations[J]. Finance and Stochastics, 1998, 2(3): 311-327.

[7] Kifer Y. Game options[J]. Finance and Stochastics, 2000, 4(4): 443-463.

[8] Szimayer A. Valuation of American options in the presence of event risk[J]. Finance and Stochastics, 2005, 9 (1): 89-107.

[9] Blanchet-Scalliet C, Jeanblanc M. Hazard rate for credit risk and hedging defaultable contingent claims[J]. Finance and Stochastics, 2004, 8(1): 145-159.

The Valuation of Permanent American Options in the Presence of Event Risk

CHEN Yong-juan, LIU Ji-chun*, LIN Shun-fa

(Shool of Mathematical Science, Xiamen Univ., Xiamen 361005, China)

Abstract: In this paper, the valuation of permanent American options in the presence of non-hedgeable event risk is considered. When the event occurs, the permanent American option is terminated and a rebate is paid instead of the promised pay-off profile. Consequently, the presence of event risk influences the exercise straegy of the option holder. Then, for a given equivalent martingale measure, the optimal stopping problem of the permanent American option is solved. As a main result, no-arbitrage bounds for permanent American option values in presence of envet risk are derived.

Key words: permanent American options; optimal stopping time; event risk; Game options