中国科学 A 辑: 数学, 2007, 37(8): 910–914
http://www.scichina.com

《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

球覆盖性质不是同胚不变的

程立新* 程庆进 刘小燕

(厦门大学数学科学学院, 厦门 361005)

摘要 Banach 空间 X 中的一个开球族 ß 是 X 的球覆盖, 如果 ß 中的任一元素不包含原点, 且 ß 中元素之并覆盖了 X 的单位球面 S_X. Banach 空间 X 称为具有球覆盖性质, 如果 X 有一个由可数多个球组成的球覆盖. 通过在 l^∞ 上构造等价范数证明了 Banach 空间 X 的球覆盖性质既不是线性同胚不变的, 也不是在商映射下不变的, 同时, 它也不具有子空间的可继承性.

关键词 球覆盖 同胚不变性 Gateaux 可微性空间 Banach 空间

MSC(2000) 主题分类 46B20, 46G05

1 引言

众所周知, 整个 Banach 空间几何学, 可以说就是一部单位球和单位球面的几何学. 各种几何概念, 如空间的凸性、光滑性、自反性 (包括超自反性) 以及 Radon-Nikodym 性质等都可以通过单位球来定义, 即使是其它学科分支, 直接用 "球" 研究其他方面的内容, 也都成为相应分支的重要组成部分. 如属于 Banach 空间几何范畴的 Mazur 交性质 (见文献 [1–13]), 最优化理论的装球问题 (packing problem)(见文献 [14–21]), 非线性泛函分析的拓扑度理论 (见文献 [22–34]) 等.

文献 [35] 从不同的视角引入了球覆盖性质的概念: Banach 空间 X 称为具有球覆盖性质, 如果 X 的单位球面 S_X 可被可数多个不含原点的球所覆盖. 显而易见, 对一个可分 Banach 空间 X 来说, 由于其单位球面 S_X 的可分性, 故 X 具有球覆盖性质. 但反之不真! 文献 [35] 给出了: 若 X 为 Gateaux 可微性空间, 则 X 具有球覆盖性质的充分必要条件是 X^* 为 w^*- 可分的. 这说明在 Gateaux 可微性空间中, 球覆盖性质是拓扑不变量. 由凸集分离定理易证具有球覆盖性质的 Banach 空间 X, 其对偶空间 X^* 是 w^*- 可分的. 然而, 对偶空间 X^* 为 w^*-可分的 Banach 空间 X 是否具有球覆盖性质呢? (即文献 [35] 中问题 3) 本文通过在 l^∞ 上构造不同的等价范数, 证明了 Banach 空间 X 的球覆盖性质既不是线性同胚不变的, 也不是在商映射下不变的, 同时, 它也不具有子空间的可继承性.

收稿日期: 2007-02-27; 接受日期: 2007-04-19
国家自然科学基金资助项目 (批准号: 10471114)
*E-mail: lxcheng@xmu.edu.cn, cheng_qingjin@163.com, email_of_lxy@sina.com

2 球覆盖性质不是拓扑不变量

首先, 设 $\lambda \in [0,1]$, 并定义 $p: l^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ 为

$$p(x) = \limsup_n |x(n)|, \quad \forall x = (x(n)) \in l^\infty.$$

此时可令 $\|\cdot\|_\lambda = \lambda\|\cdot\| + (1-\lambda)p$, 其中 $\|\cdot\|$ 表示 l^∞ 中的自然范数.

定理 2.1 $X_\lambda = (l^\infty, \|\cdot\|_\lambda)$ 具有球覆盖性质的充分必要条件是 $\lambda > \frac{1}{2}$.

在证明该定理之前, 我们注意以下事实:

命题 2.2 对于自然数集 $\mathbb{N}$, 存在一个由 $\mathbb{N}$ 的子集构成的不可数集族 $\mathcal{N}$, 满足: $\mathcal{N}$ 中任一元素 N 含有无限多个正整数, 且任两个相异元素之间至多含有有限多个共同元.

证明 令 $\pi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$(有理数集) 为一双射. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, 存在 Cauchy 序列 $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, $\alpha_k \neq \alpha$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, 使得 $\alpha_k \to \alpha$. 易知 $\{\{\pi^{-1}(\alpha_k)\}_{k=1}^\infty : \alpha \in \mathbb{R}\}$ 即为我们所求的 $\mathcal{N}$.

为证明定理 2.1, 还需要以下引理:

引理 2.3 设 $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ 为一集合序列, 其中 $F_n \subset \mathbb{N}, F_n^\# = \infty$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, 则存在 $\{G_n\}_{n=1}^\infty$, 使得 $G_n^\# = \infty$, $G_n \subset F_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ 且当 $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ 时, $(G_n \cap G_m)^\# < \infty$.

证明 由 $F_1^\# = \infty, F_1 \subset \mathbb{N}$, 对 F_1 利用命题 2.2 知, 存在 $\mathcal{F}_1 = \{F_\iota^1\}_{\iota\in I}$, 其中 $I^\# = \aleph$, 使得 $F_\iota^1 \subset F_1, (F_\iota^1)^\# = \infty$ $(\forall \iota \in I)$ 且当 $\xi, \eta \in \mathbb{N}$, $\xi \neq \eta$ 时, $(F_\xi^1 \cap F_\eta^1)^\# < \infty$.

$\forall j \geqslant 1$, 定义 F_{j+1}^1 如下:

$$F_{j+1}^1 = \begin{cases} F_{j+1}, & \text{当 } \forall A \in \mathcal{F}_1, (A \cap F_{j+1})^\# < \infty, \\ A \cap F_{j+1}, & \text{当 } \exists A \in \mathcal{F}_1, (A \cap F_{j+1})^\# = \infty. \end{cases}$$

因 $\mathcal{F}_1$ 不可数, 故存在 $F_1^1 \in \mathcal{F}_1$, 使得 $\forall j \geqslant 1$, 有 $(F_1^1 \cap F_{j+1}^1)^\# < \infty$.

设对 $n \geqslant 1$, 定义 $F_j^n (j \geqslant n)$ 满足

(i) $F_j^n \subset F_j^{n-1} \subset \cdots \subset F_j^0 \equiv F_j$;

(ii) $(F_j^n)^\# = \infty$ 且 $(F_n^n \cap F_{j+1}^n)^\# < \infty$.

由 $(F_{n+1}^n)^\# = \infty$, $F_{n+1}^n \subset F_{n+1}$, 对 F_{n+1}^n 利用命题 2.2, 可找到一序列 $\{F_j^{n+1}\}_{j=n+1}^\infty$, 使得, $\forall j \geqslant n+1$, 有

(iii) $F_j^{n+1} \subset F_j^n \subset \cdots \subset F_j^0 \equiv F_j$.

(iv) $(F_j^{n+1})^\# = \infty$ 且 $(F_{n+1}^{n+1} \cap F_{j+1}^{n+1})^\# < \infty$.

因此, 我们得到一序列 $\{F_n^n\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$F_n^n \subset F_n, \quad (F_n^n)^\# = \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

且

$$(F_n^n \cap F_m^m)^\# < \infty, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m \neq n.$$

故令 $G_n = F_n^n$ 即可完成证明.

接下来我们来证明定理 2.1.

定理 2.1 的证明 充分性. 若 $1 \geqslant \lambda > \frac{1}{2}$, 此时, 令 $x_n^\pm = \pm 2e_n$ (e_n 表示标准单位向量), $1 < r < 2\lambda$. 我们断言 $\{B(x_n^\pm, r)\}_{n=1}^\infty$ 即为 X_λ 的一个球覆盖.

注意到 $\|x_n^\pm\|_\lambda = 2\|e_n\|_\lambda = 2\lambda > r$, 即 $\forall n, B(x_n^\pm, r)$ 不包含原点. $\forall u \in l^\infty$, $\|u\|_\lambda = 1$, 有 $\|u\| \geqslant 1, p(u) \leqslant 1$ 且 $\|u\| = 1 \Longleftrightarrow p(u) = 1$.

由 $\|u\|$ 的定义知, 对 $\frac{r-1}{\lambda}>0$, 存在 $j\in\mathbb{N}$, 使得 $|u(j)|>\|u\|-\frac{r-1}{\lambda}$. 不失一般性, 假设 $u(j)>0$.

因此

$$\begin{aligned}\|x_j^+-u\|_\lambda&=\lambda\|x_j^+-u\|+(1-\lambda)p(x_j^+-u)\\&=\lambda\|x_j^+-u\|+(1-\lambda)p(u)\\&=\lambda\max\left\{2-u(j),\sup_{i\neq j}|u(i)|\right\}+(1-\lambda)p(u).\end{aligned}$$

如果 $2-u(j)\leqslant\sup_{i\neq j}|u(i)|$ $(\leqslant\|u\|)$, 则

$$\|x_j^+-u\|_\lambda\leqslant\lambda\|u\|+(1-\lambda)p(u)=\|u\|_\lambda=1<r.$$

如果 $2-u(j)>\sup_{i\neq j}|u(i)|$, 则

$$\begin{aligned}\|x_j^+-u\|_\lambda&=\lambda(2-u(j))+(1-\lambda)p(u)<\ \lambda\left(2-\|u\|+\frac{r-1}{\lambda}\right)+(1-\lambda)p(u)\\&\leqslant\lambda\left(1+\frac{r-1}{\lambda}\right)+(1-\lambda)=r,\end{aligned}$$

因此 $u\in B(x_j^+,r)$.

必要性. 当 $0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$ 时, 设 X_λ 具有球覆盖性质, 即存在 $x_n\in l^\infty,\|x_n\|_\lambda\geqslant r_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$, 使得

$$S_{X_\lambda}\subset\bigcup_{n=1}^\infty B(x_n,r_n).$$

现划分 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 为以下两部分:

$$S_1=\{x_n:p(x_n)>0\}\equiv\{z_n\}\quad 和\quad S_2=\{x_n:p(x_n)=0\},$$

则 $\forall z_n$, 存在递增的正整数序列 $\{n_k\}$, 使得

$$z_n(n_k)\neq0,\quad\forall\, k\in\mathbb{N},\quad\lim_{k\to\infty}|z_n(n_k)|=p(z_n).$$

利用引理 2.3, 当 $m,n\in\mathbb{N}$, $m\neq n$ 时, $(\{m_k\}_{k=1}^\infty\cap\{n_k\}_{k=1}^\infty)^\#<\infty$.

令 $A=\bigcup_{n=1}^\infty\{n_k\}_{k=1}^\infty$. 规定 $\{0_k\}_{k=1}^\infty=\emptyset$. 定义 $u\in\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ 如下:

$$u(i)=\begin{cases}1, & 若\ i\in\mathbb{N}\backslash A,\\ -\mathrm{sgn}z_n(i), & 若\ i\in\{n_k\}_{k=1}^\infty\backslash\bigcup\limits_{j=0}^{n-1}\{j_k\}_{k=1}^\infty.\end{cases}$$

易知, $\|u\|_\lambda=1$, 且 $\forall n\in\mathbb{N}$, 至多存在有限多个正整数 $i\in\{n_k\}$, 使得 $\mathrm{sgn}z_n(i)=u(i)$.

因此

$$\begin{aligned}&p(x)=\limsup_n|x(n)|,\\&p(z_n)+1=p(z_n)+p(u)\geqslant p(z_n-u)\geqslant\limsup_k|z_n(n_k)-u(n_k)|\\&\qquad\qquad=\limsup_k(|z_n(n_k)|+1)=\ p(z_n)+1.\end{aligned}$$

即 $p(z_n-u)=p(z_n)+1,\forall n\in\mathbb{N}$. 注意到 $\forall x\in S_2$, 有 $p(x)=0$, 因此 $p(x_n-u)=p(x_n)+1,\forall n\in\mathbb{N}$, 所以

$$\|x_n-u\|_\lambda=\lambda\|x_n-u\|+(1-\lambda)p(x_n-u)$$

$$\begin{aligned}&= \lambda\|x_n - u\| + (1-\lambda)(p(x_n)+1)\\ &\geqslant \lambda(\|x_n\| - 1) + (1-\lambda)(p(x_n)+1)\\ &= \|x_n\|_\lambda + 1 - 2\lambda > \|x_n\|_\lambda \geqslant r_n.\end{aligned}$$

这表明, $u \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n)$. 矛盾!

该定理表明球覆盖性质不是同胚不变的. 同时, 它对文献 [35] 中的问题 3 给出了否定的回答.

推论 2.4　若 Banach 空间 X 具有球覆盖性质, 则其对偶空间 X^* 是 w^*- 可分的, 但反之不真.

推论 2.5　球覆盖性质不能遗传到商空间上.

证明　令 $X = l^\infty$, $X_0 = c_0$. 记 $[\cdot]: X \longrightarrow X/X_0$ 为商映射. 商范数 $\|\cdot\|$ 定义为

$$\|[x]\| = p(x), \quad \forall\, [x] \equiv x + X_0 \in X/X_0.$$

由定理 2.1 知, 不存在可数球族 $\{B(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$(其中 $p(x_n) \geqslant r_n > 0$), 使得 $S \equiv \{x \in l^\infty : p(x) = 1\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n)$. 注意到 $c_0 \equiv \{x \in l^\infty : p(x) = 0\}$, 因此, X/X_0 的单位球面 S_{X/X_0} 不能被 X/X_0 中可数多个不含 X/X_0 原点的球所覆盖.

下面的推论表明, 球覆盖性质不能遗传到子空间上:

推论 2.6　l^∞ 中存在不具有球覆盖性质的闭子空间.

证明　如定理 2.1 定义 X_λ, 令 $\lambda = \frac{1}{2}$, 则 $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\|\cdot\| + p)$ 且 $X_{\frac{1}{2}}$ 不具有球覆盖性质. 因 $X_{\frac{1}{2}}^* = (l^\infty)^* = l^1 \oplus c_0^\perp$ 是 w^*- 可分的, 故存在 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset B_{X_{\frac{1}{2}}^*}$, 使得 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $B_{X_{\frac{1}{2}}^*}$ 中 w^*- 稠密.

定义 $T: X_{\frac{1}{2}} \longrightarrow l^\infty$ 为

$$Tx = (\langle x_n^*, x\rangle)_{n=1}^{\infty}, \quad \forall x \in X_{\frac{1}{2}},$$

易知 $T: X_{\frac{1}{2}} \longrightarrow TX_{\frac{1}{2}} \subset l^\infty$ 是一等距同构. 因 $X_{\frac{1}{2}}$ 不具有球覆盖性质, 故 $TX_{\frac{1}{2}}$ 亦不具有球覆盖性质.

参 考 文 献

1 Bandyopadhyay P. The Mazur intersection property in Banach spaces and related topics. Ph D. Thesis, Calcutta: Indian Statistical Institute, 1991

2 Giles J R. The Mazur intersection problem. *J Conv Anal*, **13**: 739–750 (2006)

3 Granero A S, Moreno J P, Phelps R R. Convex sets which are intersection of closed balls. *Adv Math*, **183**: 183–208 (2004)

4 Granero A S, Moreno J P, Phelps R R. Mazur sets in normed spaces. *Discrete Comput Geom*, **31**(3): 411–420 (2004)

5 Mazur S. Über Schwache konvergenz in den Raümen (L_p). *Studia Math*, **4**: 128–133 (1993)

6 Sersouri A. The Mazur property for compact sets. *Pacif J Math*, **133**(1): 185–195 (1988)

7 Sersouri A. Smoothness in spaces of compact operators. *Bull Austral Math Soc*, **38**: 221–225 (1988)

8 Sersouri A. Mazur's intersection property for finite dimensional sets. *Math Ann*, **283**(1): 165–170 (1989)

9 Sevilla M J, Moreno J P. Renorming Banach space with the Mazur intersection properties. *J Funct Anal*, **144**: 486–504 (1997)

10 Sevilla M J, Moreno J P. A note on porosity and the Mazur intersection property. *Mathematika*, **47**: 267–272 (2000)

11 Vanderwerff J. Mazur intersection properties for compact and weakly convex sets. *Canad Math Bull*, **41**(2): 225–230 (1998)

12 Whitfield J H M, Zizler V. Uniform Mazur's intersection property of balls. *Canad Math Bull*, **30**: 455–460 (1987)

13 Zizler V. Renorming concerning Mazur's intersection property balls for weakly compact convex sets. *Math Ann*, **276**(1): 61–66 (1986)

14 Cleaver C E. Packing spheres in Orlicz spaces. *Pacific J Math*, **65**(2): 325–335 (1976)

15 Hudzik H, Wu H, Ye Y. Packing constant in Musielak-Orlicz sequence spaces equipped with the Luxemburg norm. *Rev Mat Univ Complutience Mdr*, **7**(1): 13–26 (1994)

16 Jain P K, Malkowsky E. Sequence Spaces and Application. India: Narosa Publishing House, 1999

17 Kottman C A. Packing and reflexivity in Banach spaces. *Trans Amer Math Soc*, **150**(2): 565–576 (1970)

18 Randin R A. On packings of spheres in Hilbert space. *Proc M A Glasgow*, **2**: 139–144 (1955)

19 Rao M M, Ren Z D. Applications of Orlicz Spaces. New York: Marcel Dekker Inc, 2002

20 Yan Y. On the exact value of packing spheres in a class of Orlicz function spaces. *J Conv Anal*, **11**(2): 391–400 (2004)

21 Ye Y. Packing spheres in Orlicz sequence spaces. *Chin Ann Math*, **A4**: 487–494 (1983)

22 Akhmeov R R, Kamenskii M I, Potapov A S, et al. Measures of Noncompactness and Condensing Operator. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, Verlag, 1992

23 Appell J. Recent Trends in Nonlinear Analysis. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 2000

24 Ayerbe Toddano J M, Dominguez Benavides T, Lopez Acedo G. Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, Verlag, 1999

25 Constantin G, Istratescu I. Elements of Probabilistic Analysis with Applications. London: Kluwer Acad Publ Dordrecht Boston, 1989

26 Denkowski Z, Migsrski S, Papageorgiou N S, et al. An introduction to Nonlinear Analysis. New York: Kluwer Acad Publ, 2003

27 Gomiewich L. Topoiogical Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. London: Kluwer Acad Publ Dordrecht Boston, 1999

28 Hale J K. Asymptotics Behavior of Dissipative Systems. Mathematical Surveys and Monographs, Vol 25, Rhode Island: Amer Math Soc Providence, 1988

29 Hale J K, Oliva W M, Magalhäes L T. Dynamics in Infinite Dimensions. New York: Springer-Verlag, 2002

30 Kirk W A, Sims B. Handbook of Metric Fixed Point Theory. London: Kluwer Acad Publ Dordrecht Boston, 2001

31 Kuratowski K. Sur les espaces complete. *Fund Math*, **15**: 301–309 (1930)

32 Petryshyn W V. Generalized Topological Degree and Semilinear Equations. Cambrige: Cambrige University Press, 1995

33 Petryshyn W V, Petryshyn P V. Approximation-Solvability of Nonlinear Functional and Differential Equations. New York, Basel Hong-Kong: Marcel Dekker Inc, 1993

34 Wells J H, Williams L R. Imbedding and Extension Problems in Analysis. New York: Springer-Verlag, 1975

35 Cheng L X. On ball-covering property of Banach spaces. *Israel J Math*, **156**: 111–123 (2006)