2011 年 3 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Mar. 2011

# 关于可压缩 MHD 方程组的若干研究进展

张 剑 文
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 主要介绍近年来关于可压缩磁流体力学(MHD) 方程组的若干研究进展, 主要包括: 一维可压缩 MHD 方程组古典解的存在唯一性和剪切粘性极限, 三维可压缩 MHD 方程组的整体解存在性和不可压极限, 以及三维可压缩 MHD 方程组整体强解的爆破准则.

关键词: 可压缩 MHD; 存在性; 不可压极限; 爆破准则
中图分类号: O 175.29 文献标志码: A 文章编号: 0438-0479(2011) 02-0175-12

## 1 预备知识

磁流体力学偏微分方程组(简称 MHD 方程组) 描述了导电流体在电磁场中运动状态, 在天体物理、地球物理、空气动力学或宇宙等离子物理学等领域中具有重要物理应用背景. 由三大守恒定律并考虑电磁效应, 类似于流体力学数学模型(Navier-Stokes 方程组) 的推导, MHD 方程组具有如下形式:

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0, \\ (\rho \boldsymbol{u})_t + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \nabla P = (\nabla \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H} + \operatorname{div} \Psi, \\ \boldsymbol{H}_t - \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) = -\nabla \times (\nu \nabla \times \boldsymbol{H}), \ \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \\ \mathcal{E}_t + \operatorname{div}(\boldsymbol{u}(\mathcal{E}' + P)) = \operatorname{div}((\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H}) + \nu \boldsymbol{H} \times (\nabla \times \boldsymbol{H}) + \boldsymbol{u}\Psi + \kappa \nabla \theta), \end{cases} \tag{1}$$

其中$(x, t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}_+$. 这里, $\rho$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $P$, $e$, $\theta$ 和 $\boldsymbol{H} = (H_1, H_2, H_3)$ 分别表示流体的密度、速度、压力、内能、绝对温度和磁场; $q = -\kappa \nabla \theta$ 是热通量, $\kappa > 0$ 是热传导系数; $\nu > 0$ 是电阻系数或磁扩散系数; $\Psi$ 为应力张量中的粘性部分, 即

$$\Psi = \mu(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}) + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, \mathbb{I}, \tag{2}$$

其中 $\mu$ 和 $\lambda$ 是流体粘性系数, 一般满足以下物理条件:

$$\mu > 0, \ 2\mu + 3\lambda \geqslant 0.$$

总能量 $\mathcal{E}$ 由三部分组成: 内能、动能与磁场能, $\mathcal{E}$ 与 $\mathcal{E}'$ 具有如下形式:

$$\mathcal{E} = \rho\left(e + \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2\right) + \frac{1}{2}|\boldsymbol{H}|^2, \quad \mathcal{E}' = \rho\left(e + \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2\right), \tag{3}$$

其中$\frac{1}{2}|\boldsymbol{H}|^2$ 是磁场能量, $\mathcal{E}'$ 是内能与动能的和.

方程组(1) 中的第 1、2、4 个方程分别表示质量守恒、动量守恒和能量守恒; 第 3 个方程是磁场方程, 可由电磁场中的马克韦尔方程及欧姆定律推导得到. 但是由于未知量的个数多于方程的个数, 方程组(1), (2), (3) 不封闭. 因此, 为了封闭方程组, 我们需要利用状态方程(由热力学理论得出, 4 个变量 $\rho$, $\theta$, $e$, $P$ 中, 一旦 2 个变量被确定, 余下 2 个变量也将被确定, 即余下 2 个变量是已确定的 2 个变量的函数):

$$e = e(\rho, \theta), \ P = P(\rho, \theta). \tag{4}$$

显然, 此时式(1) ~ (4) 是一完备的方程组, 有 8 个方程, 8 个未知量, 分别为密度 $\rho$, 速度 $\boldsymbol{u}$, 温度 $\theta$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$. 一般地, 方程组(1) ~ (4) 称为(完全) 非等熵可压缩 MHD 方程组, 描述非等熵(热传导) 流体在磁场中的运动状态.

最常见的理想多方气体(例如: 空气、二氧化碳等) 的状态方程为

$$e = c_V \theta, \ P = R\rho\theta = A e^{s/c_V} \rho^{\gamma}, \tag{5}$$

其中 $c_V$, $R$, $A > 0$ 为正常数, $\gamma > 1$ 是绝热指数, $s$ 表示熵. 注意到式(1) 中的第 4 个方程可改写成

$$(\rho s)_t + \operatorname{div}(\rho s \boldsymbol{u}) - \operatorname{div}\left(\frac{\kappa \nabla \theta}{\theta}\right) =$$

收稿日期: 2010-12-07
基金项目: 国家自然科学基金项目(10801111, 10971171); 福建省自然科学基金项目(2010J05011); 中央高校基本科研业务费专项资金(2010121006)
E-mail: jwzhang@xmu.edu.cn

$$\frac{\psi:\nabla u+\nu|\nabla\times H|^2}{\theta}+\frac{\kappa|\nabla\theta|^2}{\theta^2}\geqslant 0.$$

这表明熵的增加是由于粘性、磁扩散和热传导引起的耗散效应所导致的. 因此如果忽略上式中的耗散和热传导效应, 则

$$(\rho s)_t+\mathrm{div}(\rho s u)=0.$$

再由质量守恒方程, 即式(1)中第 1 个方程, 可得

$$s_t+u\cdot\nabla s=0.$$

因此, 沿着流线, 我们有(假设解足够光滑): 如果 $s|_{t=0}=$ 常数, 则 $s(x,t)=$ 常数.

这种情形称为"等熵"流. 由式(5)可知, 此时压力 $P$ 为

$P=a\rho^\gamma$, $a>0$: 常数, $\gamma>1$ 绝热指数(特别地, $\gamma=1$: 等温).

于是, 此时式(1)中的前三个方程形成一个关于 $(\rho,u,H)$ 的完备方程组, 即

$$\begin{cases}\rho_t+\mathrm{div}(\rho u)=0,\\ (\rho u)_t+\mathrm{div}(\rho u\otimes u)+\nabla P(\rho)=(\nabla\times H)\times H+\mu\Delta u+(\mu+\lambda)\nabla\mathrm{div}u,\\ H_t-\nabla\times(u\times H)=-\nabla\times(\nu\nabla\times H),\\ \mathrm{div}H=0,\end{cases}\tag{6}$$

其中

$$P(\rho)=a\rho^\gamma,\ \gamma\geqslant 1,\ a>0.\tag{7}$$

方程组(6)~(7)称为可压缩等熵 MHD 方程组. 特别地, 当 $\rho=$ 常数时, 式(6)和(7)即为经典的不可压缩 MHD 方程组.

由于高维问题复杂的数学结构, 许多人研究以下一维可压缩 MHD 方程组:

$$\begin{cases}\rho_t+(\rho u)_x=0,\\ (\rho u)_t+(\rho u^2+P+\frac{1}{2}|b|^2)_x=(\lambda u_x)_x,\\ (\rho w)_t+(\rho uw-b)_x=(\mu w_x)_x,\\ b_t+(ub-w)_x=(\nu b_x)_x,\\ \varepsilon_t+(u(\varepsilon+P+\frac{1}{2}|b|^2)-w\cdot b)_x=(\lambda u u_x+\mu w\cdot w_x+\nu b\cdot b_x+\kappa\theta_x)_x,\end{cases}\tag{8}$$

其中, $\rho$ 是密度, $u$ 是纵向速度, $w=(w_1,w_2)$ 是横向速度, $b=(b_1,b_2)$ 是横向磁场, $P$ 是压力, $e$ 是内能, $\theta$ 是绝对温度; $\lambda,\mu$ 是粘性系数, $\nu$ 是磁扩散系数, $\kappa$ 是热传导系数; $\varepsilon$ 是总能量, 具有如下形式:

$$\varepsilon=\rho\left(e+\frac{1}{2}(u^2+|w|^2)\right)+\frac{1}{2}|b|^2,\tag{9}$$

状态方程为

$$P=P(\rho,\theta),\ e=e(\rho,\theta).\tag{10}$$

注意, 不失一般性, 我们在方程组(8)中已假设纵向磁场恒为 1(由于 $\mathrm{div}H=0$). 特别地, 当 $w=0$, 而 $b\in\mathbf{R}^1$ 为数量函数时, 式(8)~(10)即为最简单的一维可压缩 MHD 方程组.

由于其重要的物理应用背景, MHD 方程组引起了广大物理学家、应用数学家以及流体力学计算专家的研究兴趣, 取得了丰富的研究成果, 特别是对于不可压缩 MHD 方程组有大量的数值模拟和数学理论研究结果. 近几年, 随着科学技术和理论分析工具的进一步发展, 可压缩 MHD 方程组受到越来越多的关注. 但是, 与不可压缩方程组比较而言, 可压缩 MHD 方程组在其物理机制和数学结构上更加复杂, 无论是在技巧方法还是分析工具等方面都与不可压情形有很大的不同. 本文将对近年来, 特别是 2000 年以来, 关于可压缩 MHD 方程组的研究成果作一个简单的概述, 主要分为如下 3 个部分: 一维可压缩 MHD 方程组的研究进展; 高维等熵与非等熵可压缩 MHD 方程组的研究进展; 关于三维等熵 MHD 方程组整体强解的爆破准则.

## 2 一维 MHD 方程组

关于一维 MHD 方程组(8)~(10)初(边)值问题整体光滑解的存在唯一性是由 Kawashima 与 Okada 在 1982 年得到的. 他们在文献[1]中证明了一维最简单的 MHD 方程组, 即式(8)中 $b\in\mathbf{R}^1$ 且 $w=0$, 初边值问题小初值整体光滑解的存在唯一性; 而 Liu 等研究了小初值问题整体解的长时间性质[2]. 但是由于磁场的影响及其与流场的相互作用, 关于可压缩磁流体力学方程组整体强解(古典解、光滑解)的存在性一直到 2002 后才得到证明.

在 2002 年, Chen 等在文献[3]中考虑一维 MHD 方程组式(8)~(10)的自由边界问题(Euler 坐标):

$$\begin{cases}(\rho,u,w,b,\theta)|_{t=0}=(\rho_0,u_0,w_0,b_0,\theta_0)(x),\ x\in\Omega_0\triangleq(0,1),\\ (w,b,\theta_x)|_{\partial\Omega_t}=0,\ u|_{x=0}=0,\\ (P-\lambda u_x)|_{x=x(t)}=1,\end{cases}\tag{11}$$

其中 $x=x(t)$ 是自由边界, 满足 $x'(t)=u(x(t),t)$ 且 $x(0)=1$.

引进 Lagrangian 坐标

$$y=y(x,t)=\int_0^x\rho(\xi,t)\mathrm{d}\xi,\quad t=t,\tag{12}$$

则可将自由边界问题转化为以下的固定边界问题:

$$\begin{cases} v_t = u_y, \\ u_t + \left(P + \frac{1}{2}|b|^2\right)_y = \left(\frac{\lambda u_y}{v}\right)_y, \\ w_t - b_y = \left(\frac{\mu w_y}{v}\right)_y, \\ (vb)_t - w_y = \left(\frac{\upsilon b_y}{v}\right)_y, \\ E_t + \left(u\left(P + \frac{1}{2}|b|^2\right) - w\cdot b\right)_y = \\ \quad \left(\frac{\lambda u u_y}{v} + \frac{\mu w w_y}{v} + \frac{\upsilon b b_y}{v} + \frac{\kappa\theta_y}{v}\right)_y, \end{cases} \tag{13}$$

及初边值条件:

$$\begin{cases} (v, u, w, b, \theta)|_{t=0} = (v_0, u_0, w_0, b_0, \theta_0) \\ \quad (y), y \in \Omega \triangleq (0, 1), \\ (w, b, \theta_y) = 0, u|_{y=0} = 0, \\ \quad (P - \lambda v^{-1} u_y)|_{y=1} = 0, t > 0, \end{cases} \tag{14}$$

其中, $v = \rho^{-1}$, $P = P(v, \theta)$, $e = e(v, \theta)$, 而

$$E = e + \frac{1}{2}(u^2 + |w|^2 + v|b|^2).$$

压力 $P$ 与内能 $e$ 满足如下的热力学第二定律:

$$e_v(v, \theta) + P(v, \theta) = \theta P_\theta(v, \theta). \tag{15}$$

在这里需要指出的是, 对于远离真空且适当光滑的解, Euler 坐标意义下的自由边界问题(8), (11) 与 Lagrangian 坐标意义下的固定边界问题(12), (13) 是等价的.

假设 $p$, $e$ 连续可微, $\kappa$ 二阶连续可微, 当 $v > 0$ 及 $\theta \geqslant 0$ 时, $\lambda$, $\mu$, $\upsilon$ 仅依赖于 $v$, 且当 $v > 0$ 时具有一阶的连续导数, 并且存在正常数 $\lambda_i$, $\mu_i$, $\upsilon_i$ $(i = 1, 2)$, 使得 $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$, $\mu_1 \leqslant \mu \leqslant \mu_2$ 和 $\upsilon_1 \leqslant \upsilon \leqslant \upsilon_2$. 另外, 假设对于 $r \in [0, 1]$ 及 $q \geqslant 2 + 2r$, 以下 3 个增长性条件成立:

(A1) 存在正常数 $e_0$, 使得对任意的 $v > 0$ 和 $\theta \geqslant 0$, 有

$$P_v(v, \theta) \leqslant 0, \; e(v, \theta) \geqslant e_0(1 + \theta^{1+r});$$

(A2) 对任意给定的正常数 $v_1 > 0$, 存在着仅依赖 $v_1$ 的正常数 $\kappa_0 = \kappa_0(v_1)$, $p_0 = p_0(v_1)$ 及 $e_1 = e_1(v_1)$ 使得对任意的 $v \geqslant v_1$ 和 $\theta \geqslant 0$, 有

$$0 \leqslant P(v, \theta) \leqslant p_0 \frac{1 + \theta^{1+r}}{v}, \; \kappa(v, \theta) \geqslant \kappa_0(1 + \theta^q),$$

$$e_\theta(v, \theta) \geqslant e_1(1 + \theta^r);$$

(A3) 对任意给定的正常数 $v_2 > v_1 > 0$, 存在着正常数 $p_i = p_i(v_1, v_2)$ $(i = 1, 2, 3)$, $e_j = e_j(v_1, v_2)$ $(j = 2, 3)$, 及 $\kappa_1 = \kappa_1(v_1, v_2)$, 使得对任意的 $v \in [v_1, v_2]$ 及 $\theta \geqslant 0$, 有

$$|P_\theta(v, \theta)| \leqslant p_1 \frac{1 + \theta^{r}}{v},$$

$$-p_3 \frac{1 + \theta^{1+r}}{v^2} \leqslant P_v(v, \theta) \leqslant -p_2 \frac{1 + \theta^{1+r}}{v^2},$$

$$|e_v(v, \theta)| \leqslant e_2(1 + \theta^{1+r}),$$

$$e_\theta(v, \theta) \leqslant e_3(1 + \theta^r),$$

$$|\kappa(v, \theta)| + |\kappa_v(v, \theta)| + |\kappa_{vv}(v, \theta)| \leqslant \kappa_1(1 + \theta^q).$$

在以上的假设条件下, Chen 等在文献[3] 证明了初边值问题(13), (14) 整体解的存在唯一性, 由此得到自由边界问题(8) ~ (11) 整体解的存在唯一性. 文献[3] 中的主要结果为以下的存在性定理:

**定理 1**　假设 $P(v, \theta)$, $e(v, \theta)$ 及 $\kappa(v, \theta)$ 满足以上的假设条件. 另外, 假设存在正常数 $C_0$ 和 $M_0$, 使得

$$C_0^{-1} \leqslant v_0(y) \leqslant C_0, M_0^{-1} \leqslant \theta_0 \leqslant M_0, \quad y \in \Omega \triangleq (0, 1),$$

$$\|(u_0, w_0, b_0)\|_{L^4} + \|\theta_0\|_{L^2} \leqslant C_0,$$

$$\|(v_0, u_0, w_0, b_0, \theta_0)\|_{H^1} \leqslant M_0,$$

且 $v_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$. 则初边值问题(13), (14) 存在唯一的整体解, 使得对任意的 $T > 0$ 有

$$v \in L^\infty(0, T; H^1 \cap W^{1,\infty}(\Omega)),$$

$$(u, w, b, \theta) \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)),$$

并且对任意的 $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$,

$$C^{-1} \leqslant v(y, t) \leqslant C, M^{-1} \leqslant \theta(y, t) \leqslant M,$$

$$|(u, w, b)(y, t)| \leqslant M,$$

$$\|(u, w, b)\|_{L^2(0,T;L^4 \cap H^1)} + \|\theta\|_{L^2(0,T;L^2 \cap H^1)} \leqslant C,$$

$$\|(v, u, w, b, \theta)(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^t \|(v_{yt}, u_{yy}, w_{yy}, b_{yy}, \theta_{yy})(s)\|_{L^2}^2 \mathrm{d}s \leqslant M. \tag{16}$$

这里 $C$ 仅依赖于 $C_0$ 和 $T$, $M = M(C_0, M_0, T) > 0$. 特别地, 如果 $v_0 \in C^{1+\alpha}(\Omega)$ 且 $(u_0, w_0, b_0, \theta_0) \in C^{2+\alpha}(\Omega)$, 其中 $\alpha \in (0, 1)$, 则初边值问题(13), (14) 存在唯一的古典解 $v \in C^{1+\alpha, 1+\alpha/2}(\Omega \times [0, T])$, $(u, w, b, \theta) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\Omega \times [0, T])$, 并满足式(16) 中的估计.

在文献[4] 中, Wang 研究了固定有界域中的一维 MHD 方程组(8) 的如下初边值问题:

$$\begin{cases} (\rho, u, w, b, \theta)|_{t=0} = (\rho_0, u_0, w_0, b_0, \theta_0)(x), \\ \quad x \in \Omega \triangleq (0, 1), \\ (u, w, b, \theta_x)|_{x=0} = (u, w, b, \theta_x)|_{x=1} = 0. \end{cases} \tag{17}$$

在同样的假设条件和初边值条件下, 作者利用与文献[3] 类似的方法, 在文献[4] 中证明了初边值问题(8), (17) 整体解的存在唯一性结果.

定理 1 中假设条件(A1) ~ (A3) 中 $r \in [0, 1]$ 及 $q \geqslant 2 + 2r$ 在解的整体先验估计证明中起到关键的作用, 特别是对 $\theta$ 的上界估计. 但是对状态方程增长指标

的限制, 初边值问题(8)~(11)没有考虑到(热)辐射效应对流体运动状态的影响. 一般来说, 辐射对流体运动的影响随着温度的升高将会越明显. 当温度不高的时候, 辐射主要表现为能量的运输, 但是当温度很高时, 辐射压力及辐射能量会明显地影响流体的运动状态, 甚至将会主导流场中的各个物理量. 我们在文献[5]中考虑了在天体物理中有重要背景的热辐射磁流体力学方程组, 证明了一维初边值问题整体古典解的存在唯一性.

在辐射动力学中, 压力 $P=P(\rho,\theta)$ 及内能 $e=e(\rho,\theta)$ 满足如下的状态方程:

$$P(\rho,\theta)=P_F(\rho,\theta)+P_R(\theta),$$
$$e(\rho,\theta)=e_F(\rho,\theta)+e_R(\rho,\theta),\tag{18}$$

其中 $P_R(\theta)$ 与 $e_R(\rho,\theta)$ 分别表示辐射压力及辐射能量. 根据 Stefan-Boltzmann 原理, 有

$$P_R(\theta)=\frac{a}{3}\theta^4,\ e_R(\rho,\theta)=\frac{a}{\rho}\theta^4,\tag{19}$$

其中 $a>0$ 为 Stefan-Boltzmann 正常数. 根据 Fourier 原理, 此时热通量 $q$ 为:

$$q=q_F+q_R=-(\kappa_F+\kappa_R\theta^3)\theta_x\triangleq-\kappa\theta_x,\tag{20}$$

其中 $q_R=-\kappa_R\theta^3\theta_x$ 表示辐射热通量, $\kappa_R>0$ 为一正常数. 根据 Boyle 原理, 理想气体的压力 $P_F$ 和内能 $e_F$ 具有如下的形式:

$$P_F=R\rho\theta,\ e_F=c_V\theta,\tag{21}$$

其中 $R,c_V>0$ 为正的物理常数.

显然, 由式(18)~(21)可以看出此时压力 $P$ 与内能 $e$ 不满足定理 1 中的假设条件(A1)~(A3). 事实上, 由于辐射非线性项的影响, 在整体先验估计中关于温度的上界估计将会变得更加复杂. 通过精细的先验估计, 我们在文献[5]利用 Euler 坐标证明了一维辐射 MHD 方程组整体古典解的存在唯一性. 文献[5]的主要结果可归纳为以下定理:

**定理 2** 假设 $P(v,\theta)$ 和 $e(v,\theta)$ 由式(18), (19), (21)给出, 且热传导系数 $\kappa=\kappa(\rho,\theta)$ 连续可微, 满足如下增长性条件:

$$\kappa_1(1+\theta)^q\leqslant\kappa(\rho,\theta),$$
$$\kappa_\rho(\rho,\theta)\leqslant\kappa_2(1+\theta)^q,\ q>5/2,\tag{22}$$

其中 $\kappa_1,\kappa_2>0$ 为正常数. 假设初边值满足相容性条件, 且存在一个正常数 $C_0>0$, 使得

$$C_0^{-1}\leqslant\rho_0(x),\theta_0(x)\leqslant C_0,\ x\in\Omega\triangleq(0,1),$$
$$(\rho_0,u_0,w_0,b_0,\theta_0)\in C^{1+\alpha}(\Omega)\times(C^{2+\alpha}(\Omega))^6.$$

则对任意的 $T>0$, 初边值问题(8), (17)存在唯一的整体古典解, 满足

$$\rho(x,t),\theta(x,t)>0,\ (x,t)\in Q_T\triangleq\Omega\times(0,T),$$
$$(\rho,\rho_x,\rho_t)\in C^{\alpha,\alpha/2}(Q_T),$$
$$(u,w,b,\theta)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T).$$

粘性极限问题一直是流体力学数学理论研究的一个难点和重点. 在文献[6]中, Fan-Jiang-Nakamura 研究了一维 MHD 方程组(8)的剪切粘性消失(即, $\mu\to0$)时的极限过程, 证明了如下定理:

**定理 3** 假设 $P(v,\theta)$ 和 $e(v,\theta)$ 满足理想气体状态方程, 即

$$P(\rho,\theta)=R\rho\theta,\ e(\rho,\theta)=c_V\theta,$$

其中 $R,c_V>0$ 为正常数; 假设热传导系数满足如下条件:

$$C^{-1}(1+\theta^q)\leqslant\kappa(\rho,\theta)=\kappa(\theta)\leqslant C(1+\theta^q),\ q\geqslant1,$$

或者

$$\kappa(\rho,\theta)=\kappa(\rho)\geqslant C/\rho,$$

其中 $C>0$ 为正常数; 还假设初边值 $(\rho_0,u_0,w_0,b_0,\theta_0)$ 满足以下条件:

$$\rho_0,\rho_0^{-1}\in L^\infty(\Omega),(u_0,w_0,b_0)\in L^2(\Omega),$$
$$\theta_0\in L^1(\Omega),\ \inf_\Omega\theta_0>0,\ \Omega\triangleq(0,1).$$

则对任意的 $T>0$, 初边值问题(8), (17)存在一整体弱解 $(\rho,u,w,b,\theta)$, 使得当 $\mu\to0$ 时,

$\rho\to\rho$, 在 $L^p(Q_T)$ 中强收敛, 在 $L^\infty(Q_T)$ 中弱星收敛;

$(u,b)\to(u,b)$, 在 $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ 中强收敛;

$w\to w$, 在 $L^2(Q_T)$ 中强收敛, $\overline{\mu w_x^2}=0$;

$\theta\to\theta$, 在 $L^r(Q_T)$ 中强收敛, $r\in[1,3)$;

$\theta_x\to\theta_x$, 在 $L^p(Q_T)$ 中弱收敛, $p<3/2$.

其中 $Q_T\triangleq\Omega\times(0,T)$, 而 $\bar{f}$ 表示 $\mu\to0$ 时 $f$ 的弱极限. 另外, 极限函数 $(\rho,u,w,b,\theta)$ 在弱解的意义下满足式(8)中 $\mu=0$ 时的极限方程组.

研究粘性极限的主要困难在于缺少好的一致(关于 $\mu$)估计, 这给证明 $\rho$ 的强收敛以及强非线性项的收敛性带来了很大的困难. 因此为了证明定理 3, Fan-Jiang-Nakamura 利用高维 Navier-Stokes 方程组整体弱解存在性的研究技巧证明了 $\rho\to\rho$ 在 $L^1(Q_T)$ 中的强收敛, 并利用 Lions-Aubin 及 Simon 紧性原理处理非线性项的收敛性.

## 3 高维 MHD 方程组

高维 MHD 的研究更加复杂, 其数学上困难主要表现在如下 3 个方面: (i) 双曲-抛物(奇异性 ↔ 正则性)的强耦合; (ii) 退化性($\rho=0$ 真空, $\rho=\infty$ 质量集中); (iii) 强非线性. 因此对高维 MHD 方程组的研究一直到近几年才有些进展, 但是很多具有重要物理意

义的数学基本问题迄今仍是公开的.

在文献[7]中,我们研究了三维等熵 MHD 方程组(6)的小扰动初值问题整体光滑解的存在性及其关于时间 $t$ 的衰减估计. 假设 $\rho_\infty > 0$ 为某一固定的正常数, 函数 $P(\rho)$ 充分光滑且 $P'(\rho) > 0$. 另外, 假设方程组(6)具有如下初值:

$$(\rho, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{H})(x, 0) = (\rho_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{H}_0)(x) \to (\rho_\infty, 0, 0). \tag{23}$$

我们在文献[7]中证明了如下结果:

**定理 4**　假设 $(\rho_0 - \rho_\infty, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{H}_0) \in H^3(\mathbf{R}^3)$, 则存在一个正常数 $\varepsilon > 0$, 使得当

$$\|(\rho_0 - \rho_\infty, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{H}_0)\|_{H^3} \leqslant \varepsilon$$

初值问题(6), (23) 存在唯一的整体解 $(\rho, u, H)$ 满足 $\rho > 0$,

$$\rho - \rho_\infty \in C(0, \infty; H^3(\mathbf{R}^3)) \cap C^1(0, \infty; H^2(\mathbf{R}^3)),$$
$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}) \in C(0, \infty; H^3(\mathbf{R}^3)) \cap C^1(0, \infty; H^1(\mathbf{R}^3)),$$

并且存在一个正常数 $K > 0$, 使得对任意的 $t \geqslant 0$,

$$\|(\rho - \rho_\infty, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{H})(t)\|_{H^3}^2 + \int_0^t (\|\nabla\rho\|_{H^2}^2 + \|\nabla(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{H})\|_{H^3}^2)\mathrm{d}s \leqslant K\|(\rho_0 - \rho_\infty, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{H}_0)\|_{H^3}^2,$$

进一步假设

$$\|(\rho_0 - \rho_\infty, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{H}_0)\|_{L^p} < \infty, 1 \leqslant p < 6/5,$$

则存在正常数 $\varepsilon_0, K_0 > 0$ 使得当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 时,

$$\|\nabla(\rho - \rho_\infty, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{H})(t)\|_{H^2} \leqslant K_0(1 + t)^{-\sigma(p, 2; 1)},$$
$$\|\partial_t(\rho, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{H})(t)\|_{H^1} \leqslant K_0(1 + t)^{-\sigma(p, 2; 1)},$$
$$\|\rho - \rho_\infty, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{H})(t)\|_{L^q} \leqslant K_0(1 + t)^{-\sigma(p, q; 0)}, \quad q \in [2, 6].$$

这里 $\sigma(p, q; k) = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right) + \dfrac{k}{2}$.

线性 Navier-Stokes 方程组及热传导方程解的衰减相比较, 等熵 MHD 初值问题(6)和(23)的解的 $L^q$ 范数 $(2 \leqslant q \leqslant 6)$ 及一阶导数的 $L^2$ 范数的衰减率是最优的. 由于磁场是个未知量, 关于 MHD 初值问题的长时间性质研究与带(已知)外力项的 Navier-Stokes 方程组相比较有本质的区别. 为克服该困难, 我们注意到磁场方程可改写成:

$$\boldsymbol{H}_t - \nu\Delta\boldsymbol{H} = \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H}).$$

因此, 磁场方程可看作是带非齐次项的线性抛物方程(热传导方程). 利用广义的 Young 不等式及标准的热核估计, 可得到磁场先验的衰减估计, 这些估计依赖于 $\nabla\boldsymbol{u}$ 及 $\nabla\boldsymbol{H}$. 由这些估计及线性 Navier-Stokes 方程组的 $L^p$-$L^q$ 估计, 通过精细的能量估计即可证明定理 4.

由于 $\rho_\infty > 0$, 定理 4 的条件 $\|\rho_0 - \rho_\infty\|_{H^3}$ 充分小意味着初始密度 $\rho_0$ 是远离真空的, 即 $\rho_0$ 有正的下界. 当真空出现时(即 $\rho \geqslant 0$), 动量方程出现退化, 这给高维问题的数学研究带来了很大的困难. 在文献[8]中, Hu-Wang 研究了等熵 MHD 方程组(6)的初边值问题:

$$\begin{cases} \rho(x, 0) = \rho_0(x) \in L^\gamma(\Omega), \quad \rho_0 \geqslant 0, \\ (\rho\boldsymbol{u})(x, 0) = m_0(x) \in L^1(\Omega), \\ \quad m_0 = 0 \text{ 当 } \rho_0 = 0, \dfrac{|m_0|^2}{\rho_0} \in L^1, \\ \boldsymbol{H}(x, 0) = \boldsymbol{H}_0(x) \in L^2(\Omega), \mathrm{div}\boldsymbol{H}_0 = 0 \\ \quad \text{在 } \mathscr{D}'(\Omega) \text{ 意义下}, \\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = 0, \boldsymbol{H}|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{24}$$

其中 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的有界域.

注意, 这里仅假设 $\rho_0 \geqslant 0$, 因此初始密度可能存在真空. 其实对于高维问题, 即使初始密度有一致正的下界, 目前也无法从数学上排除真空的出现. 初边值问题(6), (24) 具有有限能量的整体弱解的定义如下:

**定义 1**　(具有有限能量的整体弱解的定义) 称 $(\rho, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{H})$ 是初边值问题(6), (24)的一个有限能量弱解, 如果 $(\rho, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{H})$ 满足以下条件:

(i) $\rho \geqslant 0$, $\rho(x, 0) = \rho_0$ 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 意义下, 且
$\rho \in C([0, T]; L^1(\Omega)) \cap L^\infty([0, T]; L^\gamma(\Omega))$,
$\rho u \in C([0, T]; L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}_{\mathrm{weak}}(\Omega))$;

(ii) 速度场 $\boldsymbol{u}$ 与磁场 $\boldsymbol{H}$ 满足
$\boldsymbol{u} \in L^2([0, T]; H_0^1(\Omega))$, $\boldsymbol{H} \in L^2([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2_{\mathrm{weak}}(\Omega))$,
$\rho\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}$, $\nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{H})$, $(\nabla \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H}$ 在 $\Omega \times (0, T)$ 中可积,
$\rho\boldsymbol{u}(x, 0) = m_0$, $\boldsymbol{H}(x, 0) = \boldsymbol{H}_0$,
$\mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0$ 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 意义下;

(iii) 零延拓 $(\rho, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{H})$ 到 $\mathbf{R}^3$ 中, 即 $(\rho, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{H}) = 0$ 当 $x \in \mathbf{R}^3/\Omega$, 则 $(\rho, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{H})$ 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 分布意义下满足方程组(6);

(iv) $(\rho, \boldsymbol{u})$ 在重整化意义满足质量守恒方程, 即 $(\rho, \boldsymbol{u})$ 满足:

$$b(\rho)_t + \mathrm{div}(b(\rho)\boldsymbol{u}) + (b'(\rho)\rho - b(\rho))\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0,$$

其中 $b \in C^1(\mathbf{R}^+)$, 且 $b'(z) = 0$ 当 $z \in \mathbf{R}^+$ 充分大时;

(v) $(\rho, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{H})$ 满足能量不等式, 即

$$E(t) + \int_0^t\int_\Omega (\mu|\nabla\boldsymbol{u}|^2 + (\mu + \lambda)(\mathrm{div}\boldsymbol{u})^2 + \nu|\nabla\boldsymbol{H}|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant E(0),$$

其中

$$E(t)=\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{u}|^2+\frac{a}{\gamma-1}\rho^{\gamma}+\frac{1}{2}|\boldsymbol{H}|^2\right)(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

$$E(0)=\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\frac{|m_0|^2}{\rho_0}+\frac{a}{\gamma-1}\rho_0^{\gamma}+\frac{1}{2}|\boldsymbol{H}_0|^2\right)(x)\,\mathrm{d}x.$$

**定理 5**　假设 $\Omega$ 的边界 $\partial\Omega$ 是 $C^{2+\kappa}(\kappa>0)$, 且绝热指标 $\gamma>\frac{3}{2}$. 则对任意的 $T>0$, 初边值问题(6), (24) 在 $\Omega\times(0,T)$ 中存在一个有限能量整体弱解 $(\rho,\boldsymbol{u},\boldsymbol{H})$. 另外, 存在着一个稳态解 $(\rho_s,0,0)$, 使得当 $t\to\infty$ 时

$$\begin{cases}\rho(x,t)\to\rho_s(x), \text{ 在 } L^{\gamma}(\Omega) \text{ 中强收敛,}\\ (\boldsymbol{u},\boldsymbol{H})(x,t)\to(0,0), \text{ 在 } L^2(\Omega) \text{ 中强收敛.}\end{cases}$$

定理 5 的证明主要是依照 Lions[9] 的框架, 采用 Feireisl[10] 等的简化和改进方法, 整个证明基于弱收敛方法, 证明过程非常复杂, 冗长. 简单地说, 首先, 通过对质量守恒方程添加人为扩散项(即, 对双曲方程进行抛物正则化) 以及对动量方程添加人为压力项, 考虑(6), (24) 的光滑逼近问题, 使得逼近问题的密度具有更高的可积性和适当的光滑性; 然后, 推导(一致) 先验估计, 并利用这些估计研究人为扩散和压力项的极限; 最后, 证明弱极限函数是原来问题(6) 和(24) 的有限能量弱解.

由于流场和温度场的相互作用以及强非线性项的影响, 非等熵(热传导) MHD 方程组(1) 的数学问题更加复杂. 在文献[11] 中, Hu-Wang 考虑了方程组(1) 在有界域 $\Omega\in\mathbf{R}^3$ 中的初边值问题:

$$\begin{cases}(\rho,\rho\boldsymbol{u},\boldsymbol{H},\theta)|_{t=0}=(\rho_0,m_0,\boldsymbol{H}_0,\theta_0)(x),\\ \quad x\in\Omega,\\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega}=0, \boldsymbol{H}|_{\partial\Omega}=0, q\triangleq-\kappa\nabla\theta|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}\tag{25}$$

假设粘性系数 $\mu(\theta)$, $\lambda(\theta)$ 和热传导系数 $\kappa(\theta)$ 为仅依赖于温度 $\theta$ 的正函数, 而磁扩散系数 $\nu$ 是一个正常数. 假设压力由如下关系式给出:

$$P=P(\rho,\theta)=p_e(\rho)+\theta p_\theta(\rho),\tag{26}$$

其中 $p_e,p_\theta\in C[0,\infty)\cap C^1(0,\infty)$. 由经典的热力学定律, 内能 $e=e(\rho,\theta)$ 和压力 $P=P(\rho,\theta)$ 满足以下关系式:

$$\frac{\partial e}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho^2}\left(P-\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right),\ \frac{\partial e}{\partial\theta}=\frac{\partial Q}{\partial\theta}=c_V(\theta),\tag{27}$$

其中 $c_V(\theta)>0$ 是比热系数, 与 $Q=Q(\theta)$ 仅依赖于温度 $\theta$. 由式(26), (27) 可知,

$$e(\rho,\theta)=P_e(\rho)+Q(\theta),\tag{28}$$

其中

$$P_e(\rho)=\int_1^{\rho}\frac{p_e(\xi)}{\xi^2}\mathrm{d}\xi,\ Q(\theta)=\int_0^{\theta}c_V(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

如果解充分光滑, 则由方程组(1) 容易得到以下等式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{u}|^2+\frac{1}{2}|\boldsymbol{H}|^2\right)+\mathrm{div}\left(\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}|^2\right)+\nabla P\cdot u=\mathrm{div}\,\psi\boldsymbol{u}+(\nabla\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{u}+\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{H}-\nabla\times(\nu\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{H},\tag{29}$$

$$\partial_t(\rho e)+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u}e)+(\mathrm{div}\boldsymbol{u})P=\nu|\nabla\times\boldsymbol{H}|^2+\psi:\nabla\boldsymbol{u}+\Delta K(\theta),\tag{30}$$

$$\partial_t(\rho P_e(\rho))+\mathrm{div}(\rho P_e(\rho)\boldsymbol{u})+p_e(\rho)\mathrm{div}\boldsymbol{u}=0,\tag{31}$$

$$\partial_t(\rho Q(\theta))+\mathrm{div}(\rho Q(\theta)\boldsymbol{u})-\Delta K(\theta)=\nu|\nabla\times\boldsymbol{H}|^2+\psi:\nabla\boldsymbol{u}-\theta p_\theta(\rho)\mathrm{div}\boldsymbol{u},\tag{32}$$

其中 $K(\theta)=\int_0^{\theta}\kappa(\xi)\mathrm{d}\xi$. 由式(29), (31) 和(32), 令

$$E[\rho,\boldsymbol{u},\theta,\boldsymbol{H}](t)\triangleq\int_{\Omega}\left(\rho\left(P_e(\rho)+Q(\theta)+\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2\right)+\frac{1}{2}|\boldsymbol{H}|^2\right)(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

下面我们引进初边值问题(1), (25) 的变分(弱) 解定义.

**定义 2**　(变分弱解的定义) 称 $(\rho,\boldsymbol{u},\theta,\boldsymbol{H})$ 是初边值问题(1), (25) 的一个整体变分弱解, 如果对任意的 $T>0$, 有

(i) $\rho\geqslant0$, $\boldsymbol{u}\in L^2([0,T];W_0^{1,2}(\Omega))$, $\boldsymbol{H}\in L^2([0,T];W_0^{1,2}(\Omega))\cap C([0,T];L^2_{\mathrm{weak}}(\Omega))$, 并且在分布意义下满足式(1) 中的质量守恒、动量守恒及磁场方程, 且对满足 $\varphi(x,0)=\varphi(x,T)=0$ 的任意 $\varphi\in C^{\infty}(\Omega\times[0,T])$, 有

$$\int_0^T\int_{\Omega}(\rho\varphi_t+\rho\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=0;$$

(ii) $\theta\geqslant0$, 且对任意的 $\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega\times(0,T))$, $\varphi\geqslant0$ 满足

$$\int_0^T\int_{\Omega}(\rho Q(\theta)\varphi_t+\rho Q(\theta)\boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi+K(\theta)\Delta\varphi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T\int_{\Omega}(\theta p_\theta(\rho)\mathrm{div}\boldsymbol{u})-\nu|\nabla\times\boldsymbol{H}|^2-\psi:\nabla\boldsymbol{u})\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t;$$

(iii) $(\rho,\boldsymbol{u}),\theta,\boldsymbol{H})$ 满足能量不等式, 即

$$E[\rho,\boldsymbol{u}),\theta,\boldsymbol{H}](t)\leqslant E[\rho,\boldsymbol{u},\theta,\boldsymbol{H}](0)\triangleq\int_{\Omega}\left(\rho_0P_e(\rho_0)+\rho_0Q(\theta_0)+\frac{1}{2}\frac{|m_0|^2}{\rho_0}+\frac{1}{2}|\boldsymbol{H}_0|^2\right)\mathrm{d}x;$$

(iv) $(\rho,\rho\boldsymbol{u},\boldsymbol{H})$ 在分布意义下满足初值条件, 即

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to0^+}\int_{\Omega}(\rho,\rho\boldsymbol{u},\boldsymbol{H})(x,t)\eta(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\Omega}(\rho_0,m_0,\boldsymbol{H}_0)(x)\eta(x)\,\mathrm{d}x.$$

采取 Feireisl[12] 的证明框架, 类似于文献[8]的分析方法, Wang 在文献[11]中证明了如下结果:

**定理 6**　假设 $\Omega$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个有界域, 具有 $C^{2+\tau}$, $\tau>0$ 的光滑边界. 假设压力和内能分别由式(26), (28)给出, $p_e, p_\theta \in C^1[0,\infty)$, 且

$$\begin{cases} p_e(0)=0,\ p_\theta(0)=0, \\ p_e'(\rho)\geqslant a_1\rho^{\gamma-1},\ p_\theta'(\rho)\geqslant 0,\ \forall\rho>0, \\ p_e(\rho)\leqslant a_2\rho^{\gamma},\ p_\theta(\rho)\leqslant a_3(1+\rho^{\frac{\gamma}{3}}), \\ \quad\forall\rho\geqslant 0, \end{cases} \tag{33}$$

其中 $\gamma>\dfrac{3}{2}$, $a_1, a_2, a_3>0$ 为正常数. 另外假设 $\nu>0$, $\kappa(\theta)$, $\mu(\theta)$, $\lambda(\theta)$, $c_V(\theta)\in C^1([0,\infty))$, 且存在正常数 $\underline{\kappa}$, $\bar{\kappa}$, $\underline{\mu}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\lambda}$, $\underline{c_V}$, $\overline{c_V}>0$, 使得

$$\underline{\kappa}(1+\theta^{\alpha})\leqslant\kappa(\theta)\leqslant\bar{\kappa}(1+\theta^{\alpha}),\ \alpha>2,$$
$$0<\underline{\mu}\leqslant\mu(\theta)\leqslant\bar{\mu},\quad 0\leqslant\lambda(\theta)\leqslant\bar{\lambda},$$
$$0<\underline{c_V}\leqslant c_V(\theta)\leqslant\overline{c_V}.$$

最后, 假设初值$(\rho_0, \boldsymbol{u}_0, \theta_0, \boldsymbol{H}_0)$满足如下条件:

$$\begin{cases} \rho_0\in L^{\gamma}(\Omega),\ \rho_0(x)\geqslant 0,\ x\in\Omega, \\ \theta_0\in L^{\infty}(\Omega),\ \theta_0(x)\geqslant\underline{\theta}>0,\ x\in\Omega, \\ \dfrac{|m_0|^2}{\rho_0}\in L^1(\Omega), \\ \boldsymbol{H}_0\in L^2(\Omega),\ \mathrm{div}\boldsymbol{H}_0=0,\ \text{在 } \mathscr{D}'(\Omega) \text{ 意义下}. \end{cases}$$

则初边值问题(1), (25)在 $\Omega\times(0,T)$ 中存在着一个整体变分(弱)解$(\rho, \boldsymbol{u}, \theta, \boldsymbol{H})$, 使得对任意的 $T>0$, 有

$$\begin{cases} \rho\in L^{\infty}([0,T];L^{\gamma}(\Omega))\cap C([0,T];L^1(\Omega)), \\ \boldsymbol{u}\in L^2([0,T];W_0^{1,2}(\Omega)),\ \rho\boldsymbol{u}\in C([0,T]; \\ \quad L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}_{\mathrm{weak}}(\Omega)), \\ \theta\in L^{\alpha+1}(\Omega\times(0,T)),\ \rho Q(\theta)\in L^{\infty}([0,T]; \\ \quad L^1(\Omega)), \\ \theta p_\theta\in L^2(\Omega\times(0,T)), \\ \quad\rho Q(\theta)\boldsymbol{u}\in L^1(\Omega\times(0,T)), \\ \ln(1+\theta)\in L^2([0,T];W^{1,2}(\Omega)), \\ \quad\theta^{\frac{\alpha}{2}}\in L^2([0,T];W^{1,2}(\Omega)), \\ \boldsymbol{H}\in L^2([0,T];W_0^{1,2}(\Omega))\cap \\ \quad C([0,T];L^2_{\mathrm{weak}}(\Omega)). \end{cases}$$

值得注意的是, 状态方程(26), (27)以及条件(33)排除了最常见的理想气体(如, 空气、二氧化碳等)情况, 即

$$P(\rho,\theta)=R\rho\theta,\ e(\rho,\theta)=c_V\theta, \tag{34}$$

其中 $R$, $c_V>0$ 为正的常数.

我们在文献[13]中考虑在等离子物理学中具有重要应用背景的螺旋箍缩问题. 假设一带有轴向电流的柱状流体在方位磁场中运动, 则此时磁场力将迫使柱状流体向径向运动. 这种径向压迫在物理上称为螺旋箍缩, 与等离子体约束装置(如热核反应装置)有密切的联系, 是由 Bennett 在 1934 年首次提出的.

为了推导螺旋箍缩的数学模型, 引进如下柱坐标:

$$x_1=r\cos\theta,\ x_2=r\sin\theta,\ x_3=z,$$
$$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\ \theta=\arctan\frac{x_2}{x_1}.$$

则

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)=u_r\boldsymbol{j}_r+u_\theta\boldsymbol{j}_\theta+u_z\boldsymbol{j}_z, \\ \boldsymbol{H}=(H_1,H_2,H_3)=H_r\boldsymbol{j}_r+H_\theta\boldsymbol{j}_\theta+H_z\boldsymbol{j}_z, \end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{j}_r=(\cos\theta,\sin\theta,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{j}_\theta=(-\sin\theta,\cos\theta,0)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{j}_z=(0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

在螺旋箍缩中, 磁力线在径向方向剪切(即 $H_r=0$), 而轴向磁场 $H_z$ 和方位磁场 $H_\theta$ 只依赖于半径 $r$. 因此,

$$H_\theta=H_\theta(r,t),\ H_z=H_z(r,t),$$
$$\boldsymbol{H}=(-H_\theta\sin\theta, H_\theta\cos\theta, H_z)^{\mathrm{T}}.$$

特别地, 如果 $H_z=0$, 即 $\boldsymbol{H}=(-H_\theta\sin\theta, H_\theta\cos\theta, 0)$, 则称之为 $Z$-箍缩(或称为 Bennett 箍缩); 而如果 $H_\theta=0$, 即 $\boldsymbol{H}=(0,0,H_z)$, 则称之为 $\theta$-箍缩. 因此, $Z$-箍缩与 $\theta$-箍缩是螺旋箍缩的特殊情形.

在螺旋箍缩磁场中考虑一无漩柱状流体, 则 $u_\theta=u_z=0$, 且

$$\rho=\rho(r,t),\ \theta=\theta(r,t),\ u_r=u_r(r,t),$$
$$\boldsymbol{u}=(u_r\cos\theta, u_r\sin\theta, 0).$$

因此, 此时 MHD 方程组(1), (34)可转化为如下关于$(\rho, u_r, H_\theta, H_z, \theta)$的方程组(为了方便起见, 记 $x\triangleq r$, $u\triangleq u_r$; $H_1\triangleq H_\theta$, $H_2\triangleq H_z$):

$$\begin{cases} \rho_t+(\rho u)_x+\dfrac{\rho u}{x}=0, \\ \rho(u_t+uu_x)+P_x+\left(\dfrac{H_1^2+H_2^2}{2}\right)_x+ \\ \quad\dfrac{H_1^2}{x}=(2\mu+\lambda)\left(u_x+\dfrac{u}{x}\right)_x, \\ \partial_t H_1+(uH_1)_x=\nu\left(H_{1x}+\dfrac{H_1}{x}\right)_x, \\ \partial_t H_2+(uH_2)_x+\dfrac{uH_2}{x}=\nu\left(H_{2xx}+\dfrac{H_{2x}}{x}\right), \\ c_V\rho(\theta_t+u\theta_x)+P\left(u_x+\dfrac{u}{x}\right)= \\ \quad\left((\kappa\theta_x)_x+\dfrac{\kappa\theta_x}{x}\right)+\mathscr{Q}, \end{cases} \tag{35}$$

其中

$$\mathscr{Q}=\lambda\left(u_x+\frac{u}{x}\right)^2+2\mu\left(u_x^2+\left(\frac{u}{x}\right)^2\right)+\nu\left(H_{1x}+\frac{H_1}{x}\right)^2+\nu H_{2x}^2.$$

我们在有界域 $\Omega\triangleq(0,1)$ 中考虑方程组(36)的初

边值问题:

$$\begin{cases}(\rho,\ u,\ H_1, H_2, \theta)\mid_{t=0} = \\ \quad(\rho_0, u_0, H_{10}, H_{20}, \theta_0)(x), x\in\Omega, \\ (u, H_1, H_2, \theta_x)\mid_{x=1} = 0, t\geqslant 0.\end{cases} \tag{36}$$

对初边值问题(35),(36)进行研究的本质数学困难有如下几个方面:(i) 双曲-抛物的耦合;(ii) 磁场与流场的相互作用;(iii) 强非线性项的影响;(iv) 方程组在 $x=0$ 处具有奇性. 特别地,原点处的奇性体现出研究 MHD 方程组高维问题的本质困难. 我们在文献[13]中证明了如下结果:

**定理 7** 假设存在正常数 $C_0>0$,使得

$$\begin{cases}C_0^{-1}\leqslant\rho_0, \theta_0\leqslant C_0, \rho_{0x}\in L^2(\Omega),\ \Omega\triangleq(0,1), \\ \int_0^1 x\rho_0\mathrm{d}x + \int_0^1 x\rho_0(u_0^2+\theta_0)\mathrm{d}x + \\ \quad\int_0^1 x(H_{10}^2+H_{20}^2)\mathrm{d}x\leqslant C_0, \\ \int_0^1 x\rho_0[G(\rho_0^{-1})+G(\theta_0)]\mathrm{d}x\leqslant C_0, \\ \quad G(s):=s-\ln s-1,\end{cases}$$

并且存在正常数 $\kappa_1,\kappa_2>0$,使得对任意的 $q\geqslant 2$,

$$\kappa_1(1+\theta)^q\leqslant\kappa(\rho,\theta),$$

$$|\kappa_\rho(\rho,\theta)|\leqslant\kappa_2(1+\theta)^q, q\geqslant 2. \tag{37}$$

则对任意的 $T>0$,螺旋箍缩初边值问题(35),(36)存在一个整体弱解 $(\rho, u, H_1, H_2, \theta)$ 满足以下条件:

(i) 对任意的 $(x,t)\in[0,1]\times[0,T]$,成立 $\rho(x,t), \theta(x,t)\geqslant 0$,且

$$\rho,\rho\theta\in L^\infty(0,T;\mathscr{L}^1), \sqrt{\rho}u,\ H_1, H_2\in$$
$$L^\infty(0,T;\mathscr{L}^2), \frac{\sqrt{\kappa}\theta_x}{\theta}, \frac{u_x}{\sqrt{\theta}}, \frac{H_{1x}}{\sqrt{\theta}}, \frac{H_{2x}}{\sqrt{\theta}}\in$$
$$L^2(0,T;\mathscr{L}^2), \text{其中} \|f\|_{\mathscr{L}}^p = \left(\int_0^1 x|f|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p};$$

(ii) $\mathrm{supp}(\rho)\geqslant\underline{x}(t)$,其中 $\underline{x}(t):[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是下半连续的,并且流体区域 $\mathscr{F}\triangleq\{(x,t):\underline{x}(t)<x\leqslant 1, t\geqslant 0\}\cap\{t>0\}\cap\{x<1\}$ 是开集;

(iii) $(\rho,\theta)\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathscr{F})$,在 $\mathscr{F}\cap\{t>0\}$ 中 $(\rho, u, H_1, H_2, \theta)$ 是局部 Hölder 连续的,且在分布意义 $\mathscr{D}'(\mathscr{F}\cap\{t>0\}\cap\{x<1\})$ 下满足方程组(35);

(iv) 在整个区域 $(0,1)\times(0,T)$ 中,$(\rho, u, H_1, H_2, \theta)$ 在分布意义下满足质量守恒、动量守恒方程和磁场方程;

(v) 设 $\phi\in C^2([0,1]\times[t_1,t_2])$,$\mathrm{supp}\phi(\cdot,t)\subset\{x: x\geqslant\underline{x}(t)+\eta\}$,其中 $\eta>0$,则

$$\int_0^1 c_V x\rho\theta\phi\mathrm{d}x\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 x\rho\theta\Big[c_V(\phi_t+u\phi_x) - R\left(u_x+\frac{u}{x}\right)\phi\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 x\mathcal{Q}\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 x\kappa(\rho,\theta)\theta_x\phi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t;$$

(vi) 总能量

$$\varepsilon(t)\triangleq\int_0^1 x\left(c_V\rho\theta+\frac{\rho u^2}{2}+\frac{B_1^2+B_2^2}{2}\right)(x,t)\mathrm{d}x,$$

满足如下关系式:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) - \lim_{R\to 0}\lim_{j\to\infty}\int_{\varepsilon_j}^R x\left(c_V\rho^j\theta^j+\frac{\rho^j(u^j)^2}{2}\right)(x,t)\mathrm{d}x,$$

其中 $(\rho^j, u^j, B_1^j, B_2^j, \theta^j)$ 是环域 $\Omega_j:=\{x: \varepsilon_j<x<1\}$ 上的光滑逼近解,$\varepsilon_j\to 0$,当 $j\to\infty$.

由于方程组(35)在原点处具有奇性,为了证明定理 7,我们首先对初值进行磨光,在环域 $\Omega_j:=\{x:\varepsilon_j<x<1\}$ 中考虑初边值问题(35),(36)的逼近问题,得到光滑逼近解的存在性;其次,为了得到原问题整体解的存在性,必须对 $\varepsilon_j\to 0$ 取极限,因此需要关于 $\varepsilon_j$ 的一致估计. 为此,在标准的能量估计基础上,通过 Lagrangian 坐标,利用增长性条件(37),我们在离开 Lagrangian 坐标原点时得到了密度和温度的逐点估计,且这些逐点估计与 $\varepsilon>0$ 无关. 利用以上的能量估计和逐点估计,可以证明流体区域中的高阶导数估计,且通过增长性条件(37)可以得到逼近解在整个区域 $\Omega\times(0,T)$ 中的一些一致估计;最后,通过所得到的一致估计,类似文献[14]的分析方法,利用 Lions-Aubin 弱收敛原理、Lebesgue 定理以及控制收敛原理对逼近解取极限($\varepsilon_j\to 0$),从而得到整体弱解的存在性并且弱解满足条件(i)~(vi).

在这里需要注意的是,定理 5~7 只给出了大初值 MHD 方程组初边值问题的整体弱解存在性,没有解的唯一性. 实际上,关于可压或不可压 Navier-Stokes 或 MHD 方程组弱解的唯一性一直以来都是公开的,极具挑战性的数学难题.

从物理角度来说,当密度几乎处处是常数,速度与磁场很小时,在一个大的时间尺度中可压缩磁流体的渐进行为就像不可压流体. 因此研究可压缩流体的不可压极限(或称为零马赫数极限、奇异极限)能够更好地理解可压与不可压流动之间的关系. 为此,令

$$\begin{cases}\rho(x,t) = \rho^\varepsilon(x,\varepsilon t), u(x,t) = \varepsilon u^\varepsilon(x,\varepsilon t), \\ \boldsymbol{H}(x,t) = \varepsilon\boldsymbol{H}^\varepsilon(x,\varepsilon t), \\ \mu=\varepsilon\mu^\varepsilon,\ \lambda=\varepsilon\lambda^\varepsilon,\ \upsilon=\varepsilon\upsilon^\varepsilon,\end{cases} \tag{38}$$

其中 $\varepsilon\in(0,1)$ 表示马赫数,$\mu^\varepsilon>0$, $2\mu^\varepsilon+3\lambda^\varepsilon>0$, $\upsilon^\varepsilon>0$. 注意到 $\mathrm{div}\boldsymbol{H}=0$,

$$(\nabla\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}\cdot\nabla\boldsymbol{H} - \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{H}|^2,$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\operatorname{div}\boldsymbol{u}.$$

因此, 由式(38)以及方程组(6)可得:

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon_t + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon\boldsymbol{u}^\varepsilon) = 0, \\ (\rho^\varepsilon\boldsymbol{u}^\varepsilon)_t + \operatorname{div}(\rho^\varepsilon\boldsymbol{u}^\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}^\varepsilon) + \dfrac{a\nabla(\rho^\varepsilon)^\gamma}{\varepsilon^2} = \\ \quad \boldsymbol{H}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{H}^\varepsilon - \dfrac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{H}^\varepsilon|^2 + \mu^\varepsilon\Delta\boldsymbol{u}^\varepsilon + \\ \quad (\mu^\varepsilon+\lambda^\varepsilon)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}^\varepsilon, \\ \boldsymbol{H}^\varepsilon_t + \boldsymbol{u}^\varepsilon\cdot\nabla\boldsymbol{H}^\varepsilon + \boldsymbol{H}^\varepsilon\operatorname{div}\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{H}^\varepsilon\cdot \\ \quad \nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon = \nu^\varepsilon\Delta\boldsymbol{H}^\varepsilon,\ \operatorname{div}\boldsymbol{H}^\varepsilon = 0, \end{cases} \tag{39}$$

其中, 我们假设压力具有如下形式 $P(\rho)= a\rho^\gamma$. 不失一般性, 可以取 $a=\frac{1}{\gamma}$.

不可压 MHD 方程组具有如下形式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \mu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla P - \boldsymbol{H}\cdot\nabla\boldsymbol{H} + \\ \quad \dfrac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{H}|^2 = 0, \\ \boldsymbol{H}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \nu\Delta\boldsymbol{H} = 0, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, \end{cases} \tag{40}$$

在文献[15-16]中, Hu-Wang 和 Jiang-Ju-Li 利用群方法、Strichartz 估计及弱收敛分析研究了可压 MHD 方程组的不可压极限, 证明了当 $\varepsilon\to 0$ 时, 可压 MHD 方程组(39)的解趋向于不可压 MHD 方程组(40)的解. 另外, 如果还有 $\mu^\varepsilon, \nu^\varepsilon\to 0$ 或 $\mu^\varepsilon\to 0$, $\nu^\varepsilon\to\nu$, Jiang-Ju-Li 在文献[16]中还证明了可压 MHD 方程组(39)的解趋向于如下理想不可压 MHD 方程组(41)或部分粘性不可压 MHD 方程组(42)的解并给出收敛速度:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla P - \boldsymbol{H}\cdot\nabla\boldsymbol{H} + \\ \quad \dfrac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{H}|^2 = 0, \\ \boldsymbol{H}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = 0, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, \end{cases} \tag{41}$$

以及

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \nabla P - \boldsymbol{H}\cdot\nabla\boldsymbol{H} + \\ \quad \dfrac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{H}|^2 = 0, \\ \boldsymbol{H}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \nu\Delta\boldsymbol{H} = 0, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0. \end{cases} \tag{42}$$

限于篇幅, 下面我们只简单地介绍文献[15]中关于周期域中不可压极限的结果, 关于全空间及有界域有类似的定理.

**定理 8**　设可压 MHD 方程组(39)具有如下的初值:

$$\rho^\varepsilon|_{t=0} = \rho^\varepsilon_0(x),\ \rho^\varepsilon\boldsymbol{u}^\varepsilon|_{t=0} = m^\varepsilon_0(x) = \rho^\varepsilon_0\boldsymbol{u}^\varepsilon_0(x),$$
$$\boldsymbol{H}^\varepsilon = \boldsymbol{H}^\varepsilon_0(x),\ x\in\mathbf{T}, \tag{43}$$

其中 $\mathbf{T}=[0,2\pi]^N$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中的周期域, $N=2,3$. 假设

$$\rho^\varepsilon_0 \geqslant 0,\ \rho^\varepsilon_0\in L^\gamma(\mathbf{T}),\ m^\varepsilon_0\in L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\mathbf{T}),$$
$$m^\varepsilon_0 = 0 \text{ 当 } \rho^\varepsilon_0 = 0,\ \rho^\varepsilon_0|\boldsymbol{u}^\varepsilon_0|^2\in L^1(\mathbf{T}),$$
$$\sqrt{\rho^\varepsilon_0}\boldsymbol{u}^\varepsilon_0\to\boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{H}^\varepsilon_0\to\boldsymbol{H}_0,\ \text{在 } L^2 \text{ 中弱收敛},$$
$$\overline{\rho^\varepsilon_0} = (2\pi)^{-N}\int_{\mathbf{T}}\rho^\varepsilon_0\,\mathrm{d}x \to 1,\ N = 2,3,$$
$$\frac{1}{2}\int_{\mathbf{T}}(\rho^\varepsilon_0|\boldsymbol{u}^\varepsilon_0|^2 + |\boldsymbol{H}^\varepsilon_0|^2)\,\mathrm{d}x + \frac{a}{\varepsilon^2(\gamma-1)}\int_{\mathbf{T}}((\rho^\varepsilon_0)^\gamma - \gamma\rho^\varepsilon_0(\overline{\rho^\varepsilon_0})^{\gamma-1} + (\gamma-1)(\overline{\rho^\varepsilon_0})^\gamma)\,\mathrm{d}x \leqslant C.$$

另外, 还假设

$$E^\varepsilon(t) + \int_0^t\int_{\mathbf{T}}(\mu^\varepsilon|\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon|^2 + \lambda^\varepsilon(\operatorname{div}\boldsymbol{u}^\varepsilon)^2 + \nu^\varepsilon|\nabla\boldsymbol{H}^\varepsilon|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant E^\varepsilon(0),$$

其中 $E^\varepsilon(t)$ 表示总能量, 即

$$E^\varepsilon(t) = \int_{\mathbf{T}}\left(\frac{1}{2}\rho^\varepsilon|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^2 + \frac{1}{2}|\boldsymbol{H}^\varepsilon|^2 + \frac{a}{\varepsilon^2(\gamma-1)}(\rho^\varepsilon)^\gamma\right)(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

则当 $\gamma>\frac{N}{2}$, $N=2,3$ 时, 可压缩 MHD 方程组(39), (43)存在弱解 $\{(\rho^\varepsilon,\boldsymbol{u}^\varepsilon,\boldsymbol{H}^\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$, 并且存在一个子列(仍记为 $\varepsilon$), 使得当 $\varepsilon\to 0$ 时,

$$\rho^\varepsilon\to 1,\ \text{在 } C([0,T];L^\gamma(\mathbf{T})) \text{ 中强收敛},$$
$$P\boldsymbol{u}^\varepsilon\to\boldsymbol{u},\ \text{在 } L^2([0,T];L^p(\mathbf{T})) \text{ 中强收敛},\quad 1\leqslant p<\frac{N}{N-2},$$
$$Q\boldsymbol{u}^\varepsilon\to 0,\ \text{在 } L^2([0,T];H^1(\mathbf{T})) \text{ 中弱收敛},$$
$$\boldsymbol{H}^\varepsilon\to\boldsymbol{H},\ \text{在 } L^2([0,T];L^2(\mathbf{T})) \text{ 中强收敛且在 } L^2([0,T];H^1(\mathbf{T})) \text{ 中弱收敛}.$$

这里 $P\boldsymbol{u}$, $Q\boldsymbol{u}$ 分别表示 $\boldsymbol{u}$ 中散度与旋度为零的部分, 即

$$\boldsymbol{u} = P\boldsymbol{u} + Q\boldsymbol{u},\ \operatorname{div}(P\boldsymbol{u}) = 0,\ \nabla\times(Q\boldsymbol{u}) = 0.$$

为了方便起见, 当 $N=2$ 时我们用 $\frac{2N}{N-2}$ 表示 $\infty$, 即 $\frac{2N}{N-2}\triangleq\infty$ 当 $N=2$ 时.

## 4　爆破准则

在本节中, 我们简单介绍三维等熵 MHD 方程组含真空大初值整体强解的爆破准则. 我们首先引进如下 Sobolev 空间中的记号:

$$\begin{cases} D^{k,r}(\Omega) = \{u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega): \|\nabla^k u\|_{L^r(\Omega)} < \infty\}, \\ \quad \|u\|_{D^{k,r}(\Omega)} = \|\nabla^k u\|_{L^r(\Omega)}, \\ W^{k,r}(\Omega) = L^r(\Omega)\cap D^{k,r}(\Omega),\ H^k(\Omega) = \\ \quad W^{k,2}(\Omega),\ D^k(\Omega) = D^{k,2}(\Omega), \\ D^1_0(\Omega) = \{u\in L^6(\Omega): \|\nabla u\|_{L^2} < \infty, \\ \quad \text{且 } u = 0 \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\}, \end{cases}$$

其中 $\Omega\subset\subset\mathbf{R}^3$ 或 $\Omega=\mathbf{R}^3$. 特别地, 当 $\Omega=\mathbf{R}^3$ 时, $D_0^1(\mathbf{R}^3)=\{u\in L^6(\Omega):\|\nabla u\|_{L^2}<\infty\}$; 当 $\Omega\subset\subset\mathbf{R}^3$ 时, $D_0^1(\Omega)=H_0^1(\Omega)$, $D^{k,2}(\Omega)=H^k(\Omega)$.

在文献[18-19]中, 我们分别讨论了三维可压缩等熵 MHD 方程组(6) 初值问题及以下零磁扩散可压缩等熵 MHD 方程组初边值问题整体强解的爆破准则.

$$\begin{cases}\rho_t+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u})=0,\\ (\rho\boldsymbol{u})_t+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})+\nabla P(\rho)=\\ \quad(\nabla\times\boldsymbol{H})\times\boldsymbol{H}+\mu\Delta\boldsymbol{u}+(\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{H}_t-\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{H})=0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0,\end{cases}\tag{44}$$

其中 $P(\rho)=a\rho^\gamma$, $\gamma>1$, $a>0$.

三维可压缩等熵 MHD 方程组(6) 的初值问题的强解定义如下:

**定义 3** 称$(\rho,\boldsymbol{u},\boldsymbol{H})$是等熵 MHD 方程组(6) 在 $\mathbf{R}^3\times(0,T)$ 中的一个强解, 如果

$$\begin{cases}0\leqslant\rho\in C([0,T];L^1\cap H^1\cap W^{1,q_0}),\\ \quad\rho_t\in C([0,T];L^2\cap L^{q_0}),\\ \boldsymbol{u}\in C([0,T];D^1\cap D^2)\cap L^2(0,T;D^{2,q_0}),\\ \quad\sqrt{\rho}\boldsymbol{u}_t\in L^\infty(0,T;L^2),\\ (\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{H}_t)\in L^2(0,T;D^1),\boldsymbol{H}\in C([0,T];\boldsymbol{H}^2),\\ \quad\boldsymbol{H}_t\in L^\infty(0,T;L^2),\end{cases}$$

其中 $q_0\in(3,6]$, 且$(\rho,\boldsymbol{u},\boldsymbol{H})$在 $\mathbf{R}^3\times(0,\mathrm{T})$ 中几乎处处满足 MHD 方程组.

三维零磁扩散可压缩等熵 MHD 方程组(44) 的初边值问题的强解定义如下:

**定义 4** 称$(\rho,\boldsymbol{u},\boldsymbol{H})$是等熵 MHD 方程组(43) 在 $\Omega\times(0,T)$ 中的一个强解, 如果

$$\begin{cases}(\rho,\boldsymbol{H})\in C([0,T];W^{1,q_0}(\Omega)),\\ \quad(\rho_t,\boldsymbol{H}_t)\in C([0,T];L^{q_0}(\Omega)),\\ \boldsymbol{u}\in C([0,T];D_0^1\cap D^2(\Omega))\cap\\ \quad L^2(0,T;D^{2,q_0}(\Omega)),\\ \boldsymbol{u}_t\in L^2(0,T;D_0^1(\Omega)),\sqrt{\rho}\boldsymbol{u}_t\in\\ \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\rho\geqslant0,\end{cases}$$

其中 $q_0\in(3,6]$, 且$(\rho,\boldsymbol{u},\boldsymbol{H})$在 $\Omega\times(0,T)$ 中几乎处处满足 MHD 方程组.

在文献[19]中, Fan-Yu 证明了如下局部强解的存在唯一性定理.

**定理 9** 假设可压缩等熵 MHD 方程组(6) 具有如下初值

$$\rho|_{t=0}=\rho_0(x),\boldsymbol{u}|_{t=0}=\boldsymbol{u}_0(x),$$
$$\boldsymbol{H}|_{t=0}=\boldsymbol{H}_0,\ x\in\mathbf{R}^3,\tag{45}$$

且对某个 $q\in(3,6]$ 有

$$\rho_0\geqslant0,\rho_0\in L^1\cap H^1\cap W^{1,q},\ \boldsymbol{u}_0\in D^1\cap D^2,$$
$$\boldsymbol{H}_0\in H^2,\operatorname{div}\boldsymbol{H}_0=0,$$

并满足相容性条件:

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u}_0-(\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}_0+\nabla(\rho_0)-$$
$$(\nabla\times\boldsymbol{H}_0)\times\boldsymbol{H}_0=\rho_0^{1/2}g,\ g\in L^2.$$

则存在 $T_1\in(0,\infty)$ 使得初值问题(6), (45) 在 $\mathbf{R}^3\times(0,T_1)$ 中有唯一局部强解$(\rho,\boldsymbol{u},\boldsymbol{H})$.

假设零磁扩散可压缩等熵 MHD 方程组(44) 具有如下的初边值条件:

$$\begin{cases}(\rho,\boldsymbol{u},\boldsymbol{H})|_{t=0}=(\rho_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{H}_0)(x),\ x\in\Omega,\\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega}=0,\ t>0,\end{cases}\tag{46}$$

满足如下的初始条件及相容性条件:

$$\rho_0\geqslant0,(\rho_0,\boldsymbol{H}_0)\in\cap W^{1,q}(\Omega),\operatorname{div}\boldsymbol{H}_0=0,$$
$$\boldsymbol{u}_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),\ q\in(3,6],$$
$$-\mu\Delta\boldsymbol{u}_0-(\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}_0+\nabla P(\rho_0)-$$
$$(\nabla\times\boldsymbol{H}_0)\times\boldsymbol{H}_0=\rho_0^{1/2}g,\ g\in L^2.$$

则存在 $T_1\in(0,\infty)$ 使得初边值问题(44), (46) 在 $\Omega\times(0,T_1)$ 中有唯一局部强解$(\rho,\boldsymbol{u},\boldsymbol{H})$.

在文献[19]局部强解的基础上, 我们分别在文献[17]和文献[18]中证明了如下可压缩 MHD 方程组整体强解的爆破准则(或称为正则性条件).

**定理 10** 设$(\rho_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{H}_0)$满足定理 9 中的条件. 如果 $0<T^*<\infty$是初值问题(6), (45) 强解$(\rho,\boldsymbol{u},\boldsymbol{H})$的最大存在时间, 则

$$\lim_{T\to T^*}\left(\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)}+\|\boldsymbol{u}\|_{L^s(0,T;L_w^r)}\right)=\infty,\tag{47}$$

其中 $r$ 和 $s$ 满足 $\frac{2}{s}+\frac{3}{r}\leqslant1$, $3<r\leqslant\infty$, $L_w^r$ 表示弱 $L^r$ 空间.

另外, 如果 $0<T^*<\infty$是初边值问题(44), (46) 强解$(\rho,\boldsymbol{u},\boldsymbol{H})$的最大存在时间, 则

$$\lim_{T\to T^*}\int_0^T\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^\infty}\mathrm{d}t=\infty.\tag{48}$$

定理 10 意味着如果(47) 或(48) 的左端有限, 即如果

$$\|\rho\|_{L^\infty(0,T;L^\infty)}+\|\boldsymbol{u}\|_{L^s(0,T;L_w^r)}<\infty$$

或

$$\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{L^1(0,T;L^\infty)}<\infty,$$

则对任意的 $T>0$, 可压缩 MHD 方程组的初值问题(6), (45) 或初边值问题(44), (46) 在$[0,T]$中存在着唯一的强解$(\rho,\boldsymbol{u},\boldsymbol{H})$. 与文献[20-21]的证明方法相比较, 为了证明定理 10, 我们不得不考虑磁场效应, 并处理磁场与速度场的强耦合以及磁场压力带来的强非线性项. 为了证明定理 10, 我们采用反证法. 假设式(47) 的左端有界, 然后依次证明(i) $\nabla\boldsymbol{u}$, $\nabla\boldsymbol{H}$ 的 $L^\infty(0,T;L^2)$估计; (ii) 证明$\sqrt{\rho}\boldsymbol{u}_t$, $\boldsymbol{H}_t$ 的 $L^\infty(0,T;L^2)$估计; (iii)

证明 $\nabla\rho$ 的 $L^{\infty}(0,T;L^{q})$ 的估计以及 $\nabla u$ 的 $L^{1}(0,T;L^{\infty})$ 估计. 在(i) 的证明过程中, 由于弱 $L^{r}$ 空间的影响, 我们需要利用 Lorentz 空间中的 Hölder 不等式和插值不等式以及椭圆方程组理论中的 $L^{p}$ 估计来推导磁场 $\boldsymbol{H}$ 的更高可积性并处理对流项. 在(ii) 的证明过程中, 由于磁场与流场的相互作用及真空的影响, 因此 $\boldsymbol{H}_t$ 的 $L^2$ 估计依赖于 $\boldsymbol{u}_t$ 或 $\nabla\boldsymbol{u}_t$ 的 $L^2$ 估计. 为克服该困难, 我们利用流体导数的定义将 $\boldsymbol{u}_t$ 改写成流体导数与对流项的差, 即 $\boldsymbol{u}_t=\dot{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$, 再利用 Sobolev 不等式可得(ii) 中的估计. 为了证明(iii), 类似于文献[21] 的研究技巧, 我们需要利用到一个 Beale-Kato-Majda 形式的不等式并求解一个对数 Gronwall 不等式. 以上估计的证明强烈地依赖于所谓的"有效粘性通量" $G=(2\mu+\lambda)\mathrm{div}\boldsymbol{u}-P-|\boldsymbol{H}|^2/2$. 值得注意的是, 这里引进的有效粘性通量与文献[8] 中略有不同. 但是从物理的角度来看, 由于 $|\boldsymbol{H}|^2/2$ 相当于磁场压力, 因此这里的定义似乎更合理. 对于可压缩 Navier-Stokes 方程组, Huang-Li-Xin 在文献[20] 中证明了如下的结论: 如果 $T^*$ 是等熵 Navier-Stokes 方程组的最大存在时间, 则 $\lim_{T\to T^*}\|\mathscr{D}(\boldsymbol{u})\|_{L^1(0,T;L^\infty)}=\infty$, 其中 $\mathscr{D}(\boldsymbol{u})$ 为 $\nabla\boldsymbol{u}$ 中的对称部分, 即 $\mathscr{D}(\boldsymbol{u})=(\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^t)/2$. 显然, 定理 10 中的式(48) 比文献[20] 的限制更强, 这主要是由于在式(48) 的证明过程中, 我们需要磁场 $\boldsymbol{H}$ 的 $L^\infty$ 估计. 而对于零磁扩散可压 MHD 方程组而言, 磁场方程是个双曲方程, 因而此时磁场没有任何好的耗散机制. 为了克服该困难, 我们注意到此时磁场方程与质量守恒方程有类似的数学结构, 因而利用 Navier-Stokes 方程组中关于密度的估计方法, 我们可以得到 MHD 方程组中磁场的估计. 当然, 由于磁场与流场的相互作用, 关于 MHD 方程组的证明更加复杂.

## 5　结束语

虽然关于可压缩 MHD 方程组的数学理论研究已经取得了很多成果, 但是许多具有重要物理意义的基本数学问题依然是公开的, 例如: 一维常粘性的热传导 MHD 方程组整体古典解的存在性: 剪切粘性的边界层效应与边界层宽度; 磁冻结极限(即 $\nu\to 0$ 的极限过程) 和磁边界层问题; 高维零磁扩散 MHD 方程组整体光滑解的存在性(即使是小扰动初值的的整体光滑解存在性目前也是公开的); 热传导系数不为零时, 非等熵可压缩 MHD 方程组的不可压极限; 磁场对重力不稳定性的影响, 即磁场是抑制还是加强了重力不稳定等等.

## 参考文献:


[1] Kawashima S, Okada M. Smooth global solutions for the one-dimensional equations in magnetohydrodynamics[J]. Proc Japan Acad, Ser A Math Sci, 1982, 58: 384-387.

[2] Liu T P, Zeng Y. Large time behavior of solutions for general quasilinear hyperbolic parabolic system of conservation laws[J]. Mem Amer Math Soc, 1997, 125: 599.

[3] Chen G Q, Wang D. Global solutions of nonlinear magnetohydrodynamics with large data[J]. J Differential Eqns, 2000, 182: 344-376.

[4] Wang D. Large solutions to the initial-boundary value problem for planar magnetohydrodynamics[J]. SIAM J Appl Math, 2003, 63: 1424-1441.

[5] Zhang J W, Xie F. Global solution for a one-dimensional model problem in thermally radiative magnetohydrodynamics[J]. J Differential Eqns, 2008, 245: 1853-1882.

[6] Fan J, Jiang S, Nakamura G. Vanishing shear viscosity limit in the magnetohydrodynamic equations[J]. Commun Math Phys, 2007, 270: 691-708.

[7] Zhang J W, Zhao J N. Some decay estimates of solutions for the 3-D compressible isentropic magnetohydrodynamics[J]. Commun Math Sci, 2010, 8: 835-850.

[8] Hu X P, Wang D. Global existence and large-time behavior of solutions to the three-dimensional equations of compressible magnetohydrodynamic flows[J]. Arch Rational Mech Anal, 2010, 197: 203-238.

[9] Lions P L. Mathematical topics in fluid mechanics, Vol. II, compressible models[M]. Oxford: Clarendon Press, 1998.

[10] Feireisl E, Novotn A, Petzeltov H. On the existence of globally defined weak solutions for the Navier-Stokes equations of isentropic compressible fluids[J]. J Math Fluid Mech, 2001, 3: 358-392.

[11] Hu X P, Wang D. Global solutions to the three-dimensional full compressible magnetohydrodynamic flows[J]. Commun Math Phys, 2008, 283: 255-284.

[12] Feireisl E. Dynamics of viscous compressible fluids[M]// Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications. Oxford: Oxford University Press, 2004.

[13] Zhang J W, Jiang S, Xie F. Global weak solutions to an initial boundary value problem for screw pinches in plasma physics[J]. Math Models Meth Appl Sci, 2009, 19: 833-875.

[14] Hoff D, Jenssen H K. Symmetric nonbarotropic flows with large data and forces[J]. Arch Rational Mech Anal, 2004, 173: 297-343.

[15] Hu X P, Wang D. Low Mach number limit of viscous

compressible magnetohydrodynamic flow[J]. SIAM J Math Anal, 2009, 41: 1272-1294.

[16] Jiang S, Ju Q C, Li F C. Incompressible limit of the compressible magnetohydrodynamic equations with periodic boundary condtions[J]. Commun Math Phys, 2010, 297: 371-400.

[17] Xu X Y, Zhang J X. A blow-up criterion for 3-D compressible magnetohydrodynamic equations with vacuum [J]. Math Models Meth Appl Sci, Submitted for publication, 2010.

[18] Xu X Y, Zhang J W. A blow-up criterion for 3-D non-resistive compressible magnetohydrodynamic equations with initial vacuum[J]. Nonline Anal, RWA, Submitted for publication, 2010.

[19] Fan J, Yu W. Global variational solutions to the compressible magnetohydrodynamic equations[J]. Nonlinear Anal, 2008, 69: 3637-3660.

[20] Huang X D, Li L, Xin Z P. Blowup criterion for the compressible flows with vacuum states[J]. Commun Math Phys, 2010, in press.

[21] Huang X D, Li J, Xin Z P. Serrin type criterion for the three-dimensional viscous compressible flows[J]. SIAM J Math Anal, Submitted for publication, 2010.

# Some Recent Results on Compressible MHD Equations

ZHANG Jian-wen

(School of Mahtematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** In this paper, we recall some recent mathematical results on the compressible magnehydrodynamics (MHD), including the global exisntece and uniqeness of classical solution and the vanishing shear viscosity limit to the 1-D MHD equations, the global existence of solution and the incomressible limit to the 3-D MHD equations, and the blow-up criteria of strong solution for the 3-D MHD equations with vacuum states.

**Key words:** compressible MHD; existence; incompressible limit; blow-up criterion