第 21 卷第 4 期　　大 学 数 学　　Vol. 21, №4
2005 年 8 月　　COLLEGE MATHEMATICS　　Aug. 2005

Cantor 三分集构造方法探微

伍火熊
(厦门大学 数学科学学院, 厦门 361005)

[摘　要] 以 Cantor 三分集的构造为基础, 揭示了该构造方法的本质特征, 给出了它的一般化叙述和若干应用.

[关键词] Cantor 三分集; 完备集; 稀疏集; 构造法
[中图分类号] O174.2　　[文献标识码] C　　[文章编号] 1672-1454(2005)04-0088-04

Cantor 三分集是德国数学家 Cantor 在研究三角级数问题时构造出来的一个特殊点集. 它具有若干重要特征, 常常是数学工作者构造反例的重要基础. 它的巧妙构思也为我们解决某些数学问题提供了方法与思路. 本文旨在阐述其构造思想的本质特征, 将其构造思想一般化, 以便初学者更好地把握这一构造方法并运用它来解题.

1　Cantor 三分集的构造

设$[0,1]\subset \mathbf{R}^1$. 将$[0,1]$三等分, 并移去中央三分开区间 $I_{1,1}=(1/3,2/3)$, 记其留存部分为 F_1, 即 $F_1=[0,1/3]\cup[2/3,1]$. 再将 F_1 中的区间$[0,1/3]$和$[2/3,1]$各三等分, 并移去中央三分开区间 $I_{2,1}=(1/9,2/9)$及 $I_{2,2}=(7/9,8/9)$. 再记 F_1 中的留存部分为 F_2, 即

$$F_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right].$$

一般地, 第 n 次移去中央三分区间

$$I_{n,1}=\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right),\quad I_{n,2}=\left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right),\quad \cdots,\quad I_{n,2^{n-1}}=\left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right).$$

设所得剩余部分为 F_n, 再将 F_n 中每个(互不相交)区间三等分, 并移去中央三分区间, 记其留存部分为 F_{n+1}, 如此等等. 从而得到集列$\{F_n\}$, 其中

$$F_n=F_{n,1}\cup F_{n,2}\cup\cdots\cup F_{n,2^n},\quad n=1,2,\cdots,$$

作点集 $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$, 称 C 为 Cantor 三分集.

众所周知, 由此构造的 Cantor 三分集是测度为零的疏朗完全集, 且具有连续点集的势. 其中疏朗性和完全性并存是其最本质的奇特性质. 正是这些奇特性质和它的巧妙构思为构造一些重要反例提供了启示.

2　Cantor 三分集构造法的本质特征和拓展

从 Cantor 三分集构造, 我们可以看出其构作主要具有如下特点:

[收稿日期] 2004-08-31
[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(G10271016)

(i) 将每一留存区间三等分, 然后移去中央开区间;

(ii) 第 1 次移去 1 个长度为 1/3 的中央开区间, 留存下两个等长的不交闭区间; 第 n 次移去 2^{n-1} 个长度为 $1/3^n$ (即 $1/3\cdot 1/3^{n-1}$) 的中央开区间, 留存下 2^n 个等长的互不相交闭区间;

(iii) 上述过程无限进行.

分析上述特点, 我们不难发现: 在无限构作过程中, 移去中央开区间导致了 C 的疏朗性, 留存闭区间保证了 C 的完全性, 而移去的中央开区间的总长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}=1,$$

导致 C 的测度为 0.

由此, 我们把上述构造方法做如下一些拓展, 能得到一些有趣的结果.

(i) 对区间 $[0,1]$, 类似于 Cantor 三分集构造过程, 将每一个留存闭区间分成中心对称的三部分 (不必是三等分), 移去中央开区间. 第一步, 移去长度为 $\alpha/3$ $(0<\alpha\leqslant 1)$ 的中央开区间; 第二步, 在留存的两个闭区间的每一个中, 移去长度为 $\alpha/3^2$ 的中央开区间; …; 第 n 步移去的是 2^{n-1} 个长度为 $\alpha/3^n$ 中间开区间, 留存 2^n 个等长的不交闭区间; …. 如此继续下去, 可得一列移去的开区间, 记其并集为 G(开集), 则 G_α 的总长度为 α. 而 $C_\alpha=[0,1]\setminus G$ 是一个测度为 $1-\alpha$ 的疏朗完全集. 当 $\alpha=1$ 时, 即为 Cantor 三分集.

更一般地, 对区间 $[a,b]$ 类似于上述构作, 第 n 次移去的是 2^{n-1} 个长度为 $\alpha/3^n$ $(0<\alpha\leqslant b-a)$ 中间开区间, 留存 2^n 个等长的不交闭区间. 由此, 我们可以得到一个测度为 $b-a-\alpha$ 的疏朗完全集.

(ii) 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的方体 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$, 将每一 $[a_i,b_i]$ 类似于 (1) 中构作, 得到长度为 $b_i-a_i-\alpha$ $(0<\alpha_i\leqslant b_i-a_i)$ 的疏朗完全集 C_{α_i} $(=1,2,\cdots,n)$. 则 $C_{\alpha_1}\times C_{\alpha_2}\times\cdots\times C_{\alpha_n}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的疏朗完全集, 其测度为 $\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i-\alpha_i)$.

(iii) 在 Cantor 三分集构造中, 为得到其奇特性质, 每次进行三分不是本质的. 作为理论探讨, 我们也可如下来构造: 对于任意给定的正奇数 $2k+1$, 第一步, 将 $[0,1]$ 区间 $2k+1$ 等分, 并移去中间的第 2, 4, …, $2k$ 个开区间

$$I_1^1=\left(\frac{1}{2k+1},\frac{2}{2k+1}\right),\quad I_2^1=\left(\frac{3}{2k+1},\frac{4}{2k+1}\right),\quad\cdots,\quad I_k^1=\left(\frac{2k-1}{2k+1},\frac{2k}{2k+1}\right),$$

记其留存部分为 F_1, 即

$$F_1=\left[0,\frac{1}{2k+1}\right]\cup\left[\frac{2}{2k+1},\frac{3}{2k+1}\right]\cup\cdots\cup\left[\frac{2k}{2k+1},1\right]=F_0^1\cup F_1^1\cup\cdots\cup F_k^1.$$

第二步, 将 F_1 中的 $k+1$ 个闭区间 $\{F_{j_1}^1\}_{j_1=0}^{k}$ 各 $2k+1$ 等分, 并移去每一等分闭区间中的第 2, 4, …, $2k$ 个中间开区间

$$I_{0,1}^2=\left(\frac{1}{(2k+1)^2},\frac{2}{(2k+1)^2}\right),\quad I_{0,2}^2=\left(\frac{3}{(2k+1)^2},\frac{4}{(2k+1)^2}\right),\quad\cdots,\quad I_{0,k}^2=\left(\frac{2k-1}{(2k+1)^2},\frac{2k}{(2k+1)^2}\right);$$

$$I_{1,1}^2=\left(\frac{2(2k+1)+1}{(2k+1)^2},\frac{2(2k+1)+2}{(2k+1)^2}\right),\quad\cdots,\quad I_{1,k}^2=\left(\frac{2(2k+1)+2k-1}{(2k+1)^2},\frac{2(2k+1)+2k}{(2k+1)^2}\right);$$

$$\cdots,\ \cdots,\ \cdots$$

$$I_{k,1}^2=\left(\frac{2k(2k+1)+1}{(2k+1)^2},\frac{2k(2k+1)+2}{(2k+1)^2}\right),\quad\cdots,\quad I_{k,k}^2=\left(\frac{2k(2k+1)+2k-1}{(2k+1)^2},\frac{2k(2k+1)+2k}{(2k+1)^2}\right).$$

再记 F_1 中的留存部分为 F_2, 即

$$F_2=\bigcup_{j_1=0}^{k}\bigcup_{j_2=0}^{k}F_{j_1,j_2}^2,\qquad F_{j_1,j_2}^2=\left[\frac{2j_1(2k+1)+2j_2}{(2k+1)^2},\frac{2j_1(2k+1)+2j_2+1}{(2k+1)^2}\right].$$

一般地, 第 n 次移去 $k(k+1)^{n-1}$ 个长度为 $1/(2k+1)^n$ 的中间开区间,

$$I_{j_1,j_2,\cdots,j_{n-1},i}^n=\left(\frac{2j_1(2k+1)^{n-1}+2j_2(2k+1)^{n-2}+\cdots+2j_{n-1}(2k+1)+2i-1}{(2k+1)^n},\right.$$
$$\left.\frac{2j_1(2k+1)^{n-1}+2j_2(2k+1)^{n-2}+\cdots+2j_{n-1}(2k+1)+2i}{(2k+1)^n}\right),$$

其中 $i=1,\cdots,k$; $j_m=0,1,2,\cdots,k$ $(m=1,2,\cdots,n-1)$. 设所得剩余部分为 F_n, 再将 F_n 中每个(互不相交)闭区间 $2k+1$ 等分, 并移去中间的第 $2,4,\cdots,2k$ 个开区间, 记其留存部分为 F_{n+1}, 如此等等. 从而得到集列 $\{F_n\}$, 其中

$$F_n=\bigcup_{j_1=0}^{k}\bigcup_{j_2=0}^{k}\cdots\bigcup_{j_n=0}^{k}F^n_{j_1,j_2,\cdots,j_n},$$

$$F^n_{j_1,j_2,\cdots,j_{n-1},j_n}=\left[\frac{2j_1(2k+1)^{n-1}+2j_2(2k+1)^{n-2}+\cdots+2j_{n-1}(2k+1)+2j_n}{(2k+1)^n},\right.$$
$$\left.\frac{2j_1(2k+1)^{n-1}+2j_2(2k+1)^{n-2}+\cdots+2j_{n-1}(2k+1)+2j_n+1}{(2k+1)^n}\right].$$

作点集 $C_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$, 则 C_k 具有 Cantor 三分集 C 完全相同的奇特性质.

注 从理论上讲, (3) 中构作过程也可如(1)和(2)中一样, 不必等分; 也可在更一般的区间或空间方体上进行. 但在实际构造中还是以(1)和(2)中的三分处理最为简便.

3 应用举例

例 1 对任意正数 λ, $0<\lambda<b-a$, 试作 $[a,b]$ 的一个闭子集 E, 使 E 内不含内点, 且 $mE=\lambda$.

解 如上节(1)中所述: 第一步, 在 $[a,b]$ 的中央移去长为 $(b-a-\lambda)/3$ 的开区间

$$I_1=\left(\frac{2a+b}{3},\frac{a+2b}{3}\right);$$

第二步, 在留存的两个闭区间 $[a,(2a+b)/3]$ 和 $[(a+2b)/3,b]$ 中分别移去中央处的长为 $(b-a-\lambda)/3^2$ 的开区间, 它们的并记为 I_2.

……

第 n 步, 在留存的 2^{n-1} 个闭子区间中, 分别移去其中央处长为 $(b-a-\lambda)/3^n$ 的开区间, 记这 2^{n-1} 个互不相交的开区间之并为 I_n.

将上述过程无限进行下去, 得一列开集 $\{I_n\}$. 令 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$, 则 G 为开集, 且

$$mG=\sum_{n=1}^{\infty}mI_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b-a-\lambda}{3}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}=b-a-\lambda$$

不难验证 $E=[a,b]\setminus G$ 是疏朗完全集, 且 $mE=m[a,b]-mG=\lambda$.

例 2 对任意正数 α, $0<\alpha<1$, 在 $[0,1]$ 中作开集 G, 使 $\overline{G}=[0,1]$, 而 $mG=\alpha$.

解 在上题中, 取 $a=0$, $b=1$, $\lambda=1-\alpha$, 则我们已作出 $[0,1]$ 中开集 G, 且 $mG=\alpha$, 而 $E=[0,1]\setminus G$ 为闭集.

此外, 不难验证: 对于任意 $x_0\in E$, 存在 G 中的点列 $\{x_n\}$ 以 x_0 为聚点, 即 $E\subseteq G'$. 从而 $\overline{G}=G\cup G'=[0,1]$.

例 3 在闭区间 $[a,b]$ 上作出可数个两两不相交的完备的无处稠密子集, 使它们的测度之和为 $b-a$.

解 第一步, 在例题 1 的构作中, 取 $\lambda=(b-a)/2$, 则我们得到一个测度为 $(b-a)/2$ 的疏朗完全集 E_1.

第二步, 记 E_1 的余集为 G_1, 则 G_1 为开集, 且 $mG_1=(b-a)/2$. 设 G_1 的构成区间为 (a_{1i},b_{1i}), 则在每一 (a_{1i},b_{1i}) 内作一测度为 $(b_{1i}-a_{1i})/2$ 的疏朗完全集 E_{1i}, 于是

$$m\left(\sum_{i=1}^{\infty}E_{1i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}mE_{1i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_{1i}-a_{1i}}{2}=\frac{1}{2}mG_1=\frac{1}{2^2}(b-a).$$

记 $E_2=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{1i}$, 则 $E_2\subset G_1$. 因此 $E_2\cap E_1=\varnothing$, 且 $E_1\cup E_2$ 为疏朗完全集.

然后, 记 $E_1\cup E_2$ 的余集为 G_2, 并设 G_2 的构成区间为 (a_{2i},b_{2i}), 则 $E_1\cup E_2\cup G_2=[a,b]$, E_1, E_2, G_2

互不相交,从而 $m[a,b]=mE_1+mE_2+mG_2$,即有

$$mG_2=(b-a)-\frac{1}{2}(b-a)-\frac{1}{4}(b-a)=\frac{1}{4}(b-a).$$

同样地,在每个 (a_{2i},b_{2i}) 内作一测度为 $(b_{2i}-a_{2i})/2$ 的疏朗完全集 E_{2i},记 $E_3=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{2i}$,则

$$mE_3=\sum_{i=1}^{\infty}mE_{2i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2}(b_{2i}-a_{2i})=\frac{1}{2}mG_2=\frac{b-a}{2^3}.$$

……

将上述过程无限进行下去,得到一列两两互不相交的疏朗完全集:$E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$,其中

$$mE_n=(b-a)/2^n,\quad n=1,2,\cdots.$$

令 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$,易知 E 满足题给要求.

[参 考 文 献]

[1] 那汤松. 实变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1958.

[2] 江泽坚, 吴智泉. 实变函数论[M]. 北京: 人民教育出版社, 1959.

[3] 周民强. 实变函数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.

[4] 张喜堂. 实变函数论的典型问题与方法[M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 2000.