Cantor 三分集构造方法探微①

伍火熊
(厦门大学 数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘　要: 通过分析 Cantor 三分集的构造过程, 剖析了其构造思想的本质特征在于对所给闭区间进行奇数次对称划分, 去掉中央开区间后对留存的每个闭子区间作同样处理的无限构作过程。由此给出了它的一般化叙述及具体构作方法, 为初学者领会其构造思想并运用它来解题提供有益启示。

关键词: Cantor 三分集; 完备集; 疏朗集; 构造法
中图分类号 O174.2　　文献标识码: A　　文章编号: 1671- 0231(2005) 01- 0012- 02

Cantor 三分集是德国著名数学家在研究三角级数问题时构造出来的一个特殊点集。它具有若干重要特征, 常常是数学工作者构造反例的重要基础。它的巧妙构思也为我们解决某些数学问题提供了方法和思路。同时作为 R^n 中的一类重要点集, 其构造和性质一直是大学"实变函数论"课程的基础内容之一, 它的奇特性质给学习者留下了深刻的印象。但初学者往往局限于对其独特性质的记忆, 而对其构造方法的思想领会不透, 不善解题。作者旨在阐述其构造思想的本质特征, 将其构造思想一般化, 以便初学者更好地把握好这一构造方法并运用它来解题。

1　Cantor 三分集的构造

Cantor 三分集的构作过程: 设 $[0, 1] \subset R^1$, 将 $[0, 1]$ 三等分, 并移去中央三分开区间 $I_{1,1} = (1/3, 2/3)$, 记其留存部分为 F_1, 即 $F_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$。再将 $F1$ 中的区间 $[0, 1/3]$ 和 $[2/3, 1]$ 各三等分, 并移去中央三分区间 $I_{2,1} = (1/9, 2/9)$ 及 $I_{2,2} = (7/9, 8/9)$。再记 F_1 中的留存部分为 F_2 ……。

此过程无限进行下去。一般地, 第 n 次移去 2^{n-1} 个长度为 $1/3^n$ 的中央三分区间, 设所得剩余部分为 F_n, 再将 F_n 中的 2^n 个互不相交的闭子区间分别三等分, 并移去中央三分开区间, 记其留存部分为 F_{n+1}。如此等等。从而得到集合列 $\{F_n\}$。作点集

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

则称 C 为 Cantor 三分集, 简称为 Cantor 集[1-3]。

由此构造的 Cantor 三分集是测度为零的疏朗完全集, 且具有连续基数。其中疏朗性与完全性并存是其最本质的奇特性质。正是这些奇特性质和它的巧妙构思方法为构造一些重要反例提供了启示, 例如非 Borel 集的 Lebesgue 可测集合的构造[3]。

2　Cantor 三分集构造法的本质特征和拓展

从 Cantor 三分集构造中, 我们可以看出其构作主要具有如下特点:

(1) 将每一留存区间三等分, 然后移去中央开区间;

(2) 第一次移去 1 个长度为 1/3 的中央开区间, 留存下两个等长的互不相交的闭区间; 第 n 次移去 2^{n-1} 个长度为 $1/3^n$ (即 $1/3 \cdot 1/3^{n-1}$) 的中央开区间, 留存下 2^n 个互不相交的长度均为 $1/3^n$ 的闭子区间;

---

① 收稿日期: 2004- 11- 22
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(G10271016)
作者简介: 伍火熊(1964-), 男, 湖南永兴人, 副教授, 研究方向: 调和分析与函数逼近论。

(3) 上述过程无限进行。

分析上述特点, 我们不难发现: 在无限构作过程中, 移去中央开区间导致了 C 的疏朗性, 留存闭子区间保证了 C 的完全性, 进而保证了 C 具有连续基数[1], 而移去中央开区间的总长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}=1$$

导致了 C 的测度为 0。

由此, 我们可以把上述构造方法做如下一些拓展, 能得到一些更具一般意义的结果。

(1) 对闭区间[0, 1], 类似于 Cantor 三分集构造过程, 将每一留存闭子区间分成中心对称的三部分(不必是三等分), 移去中央开区间。

第一步, 移去长度为 $\alpha/3(0<\alpha\leqslant 1)$ 的中央开区间, 留存两个等长的不交闭子区间;

第二步, 将留存的两个闭子区间各自移去长度为 $\alpha/32$ 的中央开区间, 留存 4 个等长的不交闭子区间;

…… …… …… …… …… ……;

第 n 步, 将留存的 2^{n-1} 个闭子区间各自移去长度为 $\alpha/3^n$ 的中央开区间, 留存 2^n 个等长的不交闭子区间;

…… …… …… …… …… ……。

如此继续下去, 可得到一列移去的开区间, 记其并集为 G_a(开集), 则 G_a 的测度为 α。置 $C_a=[0,1]\setminus G_a$。则不难验证 C_a 是一个测度为 $1-\alpha$ 的疏朗完全集。当 $\alpha=1$ 时, C_a 即为 Cantor 三分集。

更一般地, 对闭区间$[a, b]$类似于上述构作, 第 n 次移去 2^{n-1} 个长度为 $\alpha/3^n(0<\alpha\leqslant b-a)$ 的中央开区间, 留存 2^n 个等长的不交闭子区间, 由此, 我们可得到一个测度为 $b-a-\alpha$ 的疏朗完全集。

(2) 对于 R^n 中的方体$[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times\cdots\times[a_n, b_n]$, 将每一$[a_i, b_i]$进行类似于(1) 中的构作, 得到长度为 $b_i-a_i-\alpha_i(0<\alpha_i\leqslant b_i-a_i)$ 的疏朗完全集 $C_{a_i}(i=1, 2, \cdots, n)$。则 $C_{a_1}\times C_{a_2}\times\cdots\times C_{a_n}$ 为 R^n 中的疏朗完全集, 其测度为

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i-\alpha_i)。$$

(3) 在 Cantor 三分集的构造中, 为得到其独特性质, 每次进行三分不是本质的。作为理论探讨, 我们也可如下来构造: 对于任意给定的正奇数 $2k+1$,

第一步, 将[0, 1] 区间 $2k+1$ 等分, 并移去中间的第 2、4、…、$2k$ 个长度均为 $1/(2k+1)$ 的开区间, 记其留存部分为 F_1;

第二步, 将 F_1 中的 $k+1$ 个互不相交的闭区间各 $2k+1$ 等分, 并移去每一等分闭子区间中的第 2、4、…、$2k$ 个长度均为 $1/(2k+1)^2$ 的开区间, 记其留存部分为 F_2; … …;

一般地, 第 n 次移去 $k(k+1)^{n-1}$ 个长度均为 $1/(2k+1)^n$ 的中间开区间, 记所得剩余部分为 F_n, 再将 F_n 中每个互不相交的闭子区间 $2k+1$ 等分, 并移去中间的第 2、4、…、$2k$ 个开区间, 记留存部分为 F_{n+1}, 如此等等。从而得到闭集合列$\{F_n\}$。令

$$C_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n。$$

则容易验证 C_k 具有与 Cantor 三分集 C 完全相同的奇特性质。

注记: 从理论上讲, (3) 中的构作过程也可如(1) 和(2) 中一样, 不必等分; 也可在更一般的区间或方体上进行。但在实际构造中, 还是以(1) 和(2) 中的三分处理最为简便。

参考文献:

[1] 那汤松. 实变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1958.

[2] 江泽坚, 吴智泉. 实变函数论[M]. 北京: 人民教育出版社, 1959.

[3] 周民强. 实变函数论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.