第48卷第6期
2005年11月

数 学 学 报
ACTA MATHEMATICA SINICA

Vol.48, No.6
Nov., 2005

文章编号: 0583-1431(2005)06-1233-18 **文献标识码:** A

核为块空间函数的多重 Marcinkiewicz 积分

伍火熊

厦门大学数学科学学院 厦门 361005
E-mail: huoxwu@xmu.edu.cn

摘 要 本文研究乘积空间上一类沿多项式曲线的 Marcinkiewicz 积分算子, 在核为某些块空间函数条件下建立了这些算子的 L^p 有界性, $1<p<\infty$. 同时说明了这些条件在 $p=2$ 的情形是最佳的.

关键词 多重 Marcinkiewicz 积分; 块空间; Fourier 变换估计
MR(2000) 主题分类 42B20, 42B25, 42B99
中图分类 O177.6

On Multiple Marcinkiewicz Integrals Related to Block Spaces

Huo Xiong WU

School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, P. R. China
E-mail: huoxwu@xmu.edu.cn

Abstract This paper is devoted to the study of multiple Marcinkiewicz integrals along polynomial curves with kernels belonging to certain block spaces. It is showed that the multiple Marcinkiewicz integral operator is bounded on L^p for some $1<p<\infty$, and the condition on integral kernel is the best possible for $p=2$.

Keywords Multiple Marcinkiewicz integral; Block spaces; Fourier transform estimate
MR(2000) Subject Classification 42B20, 42B25, 42B99
Chinese Library Classification O177.6

1 引言及定理

设 $\mathbb{R}^N$ ($N=m$ 或 n), $N\geq 2$, 是 N- 维 Euclid 空间, S^{N-1} 表示 $\mathbb{R}^N$ 上的单位球面, 在其上赋以 Lebesgue 测度 $d\sigma=d\sigma(\cdot)$. 对非零点 $x\in\mathbb{R}^m$ 和 $y\in\mathbb{R}^n$, 定义 $x'=x/|x|$ 和 $y'=y/|y|$. 对于 $m\geq 2$, $n\geq 2$, 假定 $\Omega(x',y')\in L^1(S^{m-1}\times S^{n-1})$ 且满足

$$\int_{S^{m-1}}\Omega(x',y')dx'=\int_{S^{n-1}}\Omega(x',y')dy'=0. \tag{1.1}$$

设 $P_{N_1}(u)=\sum_{l=1}^{N_1}\alpha_l u^l$, $P_{N_2}(v)=\sum_{l'=1}^{N_2}\beta_{l'}v^{l'}$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的两个实值多项式且 $P_{N_1}(0)=P_{N_2}(0)=0$.

收稿日期: 2005-02-18; 接受日期: 2005-09-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (G10571122)

定义乘积空间 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 上沿多项式曲线 (P_{N_1}, P_{N_2}) 的 Marcinkiewicz 积分算子 $\mathscr{M}_P$ 如下:

$$\mathscr{M}_P(f)(x,y) = \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \left|F_{s,t}^P(x,y)\right|^2 \frac{dsdt}{s^3t^3} dsdt\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中

$$F_{s,t}^P(x,y) = \iint_{|\xi|<s,\,|\eta|<t} \frac{\Omega(\xi',\eta')}{|\xi|^{m-1}|\eta|^{n-1}} f(x - P_{N_1}(|\xi|)\xi', y - P_{N_2}(|\eta|)\eta') d\xi d\eta,$$

对于 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$.

当 $P_{N_1}(u) = u$ 和 $P_{N_2}(v) = v$ 时, 我们记 $\mathscr{M}_P$ 为 $\mathscr{M}_I$. 显然, 算子 $\mathscr{M}_I$ 是 Stein [1] 引入的高维 Marcinkiewicz 积分算子的一个自然推广. 众所周知, Marcinkiewicz 积分算子是一类重要的 Littlewood-Paley-Stein 型函数, 在调和分析中起着重要作用. 近些年来, 关于 Marcinkiewicz 积分算子 $\mathscr{M}_I$ 的研究已引起广泛关注. 下面是一些已知的结果:

定理 A 假如 Ω 满足条件 (1.1) 且下列条件之一成立, 则 $\mathscr{M}_I$ 在 $L^p(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ 上有界.

(i)[2] $\Omega \in L^q(S^{m-1} \times S^{n-1})$, 其中 $q > 1$, $1 < p < \infty$.

(ii)[3, 4] $\Omega \in L(\log^+ L)^2(S^{m-1} \times S^{n-1})$, $1 < p < \infty$.

(iii)[5, 6] $\Omega \in L\log^+ L(S^{m-1} \times S^{n-1})$, $p = 2$.

(vi)[7, 8] $\Omega \in B_q^{0,1}(S^{m-1} \times S^{n-1})$ 其中 $q > 1$, $1 < p < \infty$.

(v)[9] $\alpha > \frac{1}{2}$, $1 + 1/(2\alpha) < p < 1 + 2\alpha$, 且 Ω 满足

$$\iint_{S^{m-1}\times S^{n-1}} |\Omega(x', y')| \left(\log\frac{1}{|\xi'\cdot x'|}\log\frac{1}{|\eta'\cdot y'|}\right)^\alpha dx'dy' \in L^\infty(S^{m-1} \times S^{n-1}).$$

这里 $B_q^{0,\nu}(S^{m-1} \times S^{n-1})$ 表示 $S^{m-1} \times S^{n-1}$ 上一类特殊的块空间, 它们首先由江寅生和陆善镇 [10] 在研究 Calderón-Zygmund 奇异积分算子的 $L^p(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ 有界性时引入 (其定义见 2 节). 借鉴文 [?] 的思想, 本文作者在文 [?] 中指出: 对于 $q > 1$ 和 $\nu_1 > \nu_2 > -1$,

$$\bigcup_{r>1} L^r(S^{m-1} \times S^{n-1}) \subset B_q^{0,\nu_1}(S^{m-1} \times S^{n-1}) \subset B_q^{0,\nu_2}(S^{m-1} \times S^{n-1}), \tag{1.2}$$

且它们是真包含关系. 而对于任意 $\nu > -1$ 和 $\varepsilon \geq 1$, $B_q^{0,\nu}$ 不被 $L(\log^+ L)^{\nu+\varepsilon}$ 所包含.

另一方面, 对于单参数情形, Al-Qassem 和 Al-Salman [13] 最近建立了下列结果.

定理 B[?] 假设 Ω 在 S^{N-1} 具有零平均值且对于 $q > 1$, Ω 属于 $B_q^{0,-\frac{1}{2}}(S^{N-1})$, 则如下定义的 Marcinkiewicz 积分算子 μ_Ω,

$$\mu_\Omega(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_s(x)|^2 \frac{ds}{s^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

是 (p,p) 型算子, $1 < p < \infty$, 其中 $F_s(x) = \int_{|\xi|<s} \frac{\Omega(\xi')}{|\xi|^{N-1}} f(x-\xi)d\xi$, 且对于任意 $-1 < \nu < -\frac{1}{2}$, 存在 $\Omega \in B_q^{0,\nu}(S^{N-1})$, 使得 μ_Ω 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 上不是有界的.

比较上述结果, 一个自然的问题是: 在 $\Omega \in B_q^{0,\nu}(S^{m-1} \times S^{n-1})$ $(q > 1, \nu > -1)$ 意义下, 确保 $\mathscr{M}_I$ 为 $L^p(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$ 有界的最佳可能条件是什么?

本文将通过研究更一般的 Marcinkiewicz 积分算子 $\mathscr{M}_P$ 的 L^p 有界性, 对上述问题作出一个肯定的回答. 我们指出: 对于 $\mathscr{M}_I$, 其奇性是沿对角线 $\{x = \xi\}$ 和 $\{y = \eta\}$ 的; 然而许多分析问题激发人们去考虑奇性沿更一般集合的奇异积分算子, 诸如多复变函数的研究和大量的次椭圆微分方程的研究. 读者参看 Stein 的综述报告 [?, ?] 可了解更多的背景. 这里主要关注奇性沿多项

式曲线 $\{x = P_{N_1}(|\xi|)\xi'\}$ 和 $\{y = P_{N_2}(|\eta|)\eta'\}$ 的 Marcinkiewicz 积分算子, 与之相应的 Calderón-Zygmund 奇异积分算子的研究可参见文 [?, ?] 及其参考文献. 对于算子 $\mathscr{M}_P$ 的研究, 我们已有如下一些已知结果:

定理 C 如果 Ω 满足 (1.1) 式且下列条件之一成立, 那么 $\mathscr{M}_P$ 是 $L^p(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ 有界的, $1 < p < \infty$.

(i)[18] $\Omega \in L^q(S^{m-1} \times S^{n-1})$, $q > 1$.

(ii)[19] $\Omega \in L(\log^+ L)^2(S^{m-1} \times S^{n-1})$.

(iii)[16] $\Omega \in B_q^{0,1}(S^{m-1} \times S^{n-1})$, $q > 1$.

本文将建立下列主要定理.

定理 1 设 $q > 1$, Ω 满足 (1.1) 式.

(i) 若 $\Omega \in B_q^{0,0}(S^{m-1} \times S^{n-1})$, 则 $\mathscr{M}_P$ 是 $L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ 有界的, 且其界与 P_{N_1} 和 P_{N_2} 的系数无关.

(ii)若 $\Omega \in B_q^{0,\nu}(S^{m-1} \times S^{n-1})$, $0 < \nu < 1$, 则对于 $2/(1+\nu) < p < 2/(1-\nu)$, $\mathscr{M}_P$ 是 $L^p(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ 的, 且其界与 P_{N_1} 和 P_{N_2} 的系数无关.

(iii)对于每一 $-1 < v < 0$, 存在 $\Omega \in B_q^{0,\nu}(S^{m-1} \times S^{n-1})$, 使 $\mathscr{M}_P$ 在 $L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ 中无界.

若 $P_{N_1}(u) = u$ 且 $P_{N_2}(v) = v$, 则 $\mathscr{M}_P$ 为 $\mathscr{M}_I$. 因此有

定理 2 在定理 1 的条件下, 定理 1 的结论对 Marcinkiewicz 积分算子 $\mathscr{M}_I$ 也成立.

注 1 由于 $\bigcup_{r>1} L^r(S^{m-1} \times S^{n-1}) \subset B_q^{0,1}(S^{m-1} \times S^{n-1}) \subset B_q^{0,\nu}(S^{m-1} \times S^{n-1})$ 是真包含关系, 且对于任意 $0 \le \nu < 1$, $L(\log^+ L)^2(S^{m-1} \times S^{n-1})$ 不包含 $B_q^{0,\nu}(S^{m-1} \times S^{n-1})$. 因此定理 1 本质地改进了定理 C, 也是对定理 A 与 B 的改进和推广.

注 2 从定理 1 (iii) 知: 对于 $q > 1$, 条件 $\Omega \in B_q^{0,0}(S^{m-1} \times S^{n-1})$ 是使 $\mathscr{M}_P$ 为 $L^2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ 有界的最佳可能条件. 一个有意义的问题是对于 $p \ne 2$, 我们的结果能否进一步改进?

本文 2 节给出 $S^{m-1} \times S^{n-1}$ 上块空间的定义. 3 节引如一些记号, 然后建立一些辅助引理. 4 节给出定理 1 的证明. 本文的一些证明思想取自于文献 [?, ?, ?], 但我们的方法和技巧较之更精细、复杂.

为方便起见, 字母 C 总代表与本质变量无关的正常数, 但在不同的位置其值可以不同.

2 块函数空间

本节给出块空间 $B_q^{0,\nu}(S^{m-1} \times S^{n-1})$ 的定义 [10]:

定义 1 对于 $1 < q \le \infty$, 我们称定义在 $S^{m-1} \times S^{n-1}$ 上的 Lebesgue 可测函数 $b(\cdot,\cdot)$ 为 q-块, 如果它满足下列条件:

(i) $\operatorname{supp}(b) \subseteq Q$;

(ii) $\|b\|_{L^q(S^{m-1} \times S^{n-1})} \le |Q|^{1/q-1}$,

其中 Q 是 $S^{m-1} \times S^{n-1}$ 上的区间, 即存在 $x_0' \in S^{m-1}$, $y_0' \in S^{n-1}$ 和 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, 使得

$$Q = \{x' \in S^{m-1} : |x' - x_0'| < \alpha\} \times \{y' \in S^{n-1} : |y' - y_0'| < \beta\},$$

$|Q|$ 表示 Q 的 Lebesgue 测度.

定义 2 设 $q > 1$, $\nu > -1$. 块空间 $B_q^{0,\nu}(S^{m-1} \times S^{n-1})$ 定义为

$$B_q^{0,\nu}(S^{m-1} \times S^{n-1}) = \Big\{\Omega \in L^1(S^{m-1} \times S^{n-1}) : \Omega(\xi', \eta') = \sum_{\mu} C_\mu b_\mu(\xi', \eta'), M_q^{0,\nu}(\{C_\mu\}) < \infty\Big\},$$

其中每一 b_μ 是以 Q_μ 为支集的 q- 块, 且

$$M_q^{0,\nu}(\{C_\mu\}) = \sum_\mu |C_\mu| \left\{1 + \left(\log^+ \frac{1}{|Q_\mu|}\right)^{\nu+1}\right\}.$$

对于 $\Omega \in B_q^{0,\nu}(S^{m-1} \times S^{n-1})$, 其范数定义为

$$M_q^{0,\nu}(\Omega) = \inf\{M_q^{0,\nu}(\{C_\mu\})\}.$$

这里下确界是对 Ω 的所有 q- 块分解而取的.

此外, 同定义 $B_q^{0,\nu}(S^{m-1} \times S^{n-1})$ 一样来定义块空间 $B_q^{0,\nu}([a, b] \times [c, d])$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. 我们指出函数的块分解方法起源于 Taibleson 和 Weiss [21] 对 Fourier 级数收敛性的研究. 随后, 这一方法在调和分析中得到了许多应用 (参见文 [?, ?, ?, ?, ?]). 1993 年 Keitoku 和 Sato [11] 证明: 对于任意固定的 $q > 1$, $\bigcup_{r>1} L^r(S^{N-1}) \subset B_q^{0,\nu_1}(S^{N-1}) \subset B_q^{0,\nu_2}(S^{N-1})$, $\nu_1 > \nu_2 > -1$, 且是真包含关系. 类似地, 我们也有下列真包含关系

$$\bigcup_{r>1} L^r(S^{m-1} \times S^{n-1}) \subset B_q^{0,\nu_1}(S^{m-1} \times S^{n-1}) \subset B_q^{0,\nu_2}(S^{m-1} \times S^{n-1}), \quad -1 < \nu_2 < \nu_1.$$

而对于任意 $\nu > -1$ 和 $\varepsilon \geq 1$, $L(\log^+ L)^{\nu+\varepsilon}(S^{m-1} \times S^{n-1})$ 不能包含 [16]: $B_q^{0,\nu}(S^{m-1} \times S^{n-1})$.

3 一些辅助引理

设 Ω 如定理 1 所述. 由定义 2 知 $\Omega(x', y') = \sum_\mu C_\mu b_\mu(x', y')$, 其中每一 b_μ 是以 Q_μ 为支集的 q- 块, 即

$$\operatorname{supp}(b_\mu) \subseteq Q_\mu, \quad \|b_\mu\|_{L^q(S^{m-1}\times S^{n-1})} \leq |Q_\mu|^{1/q-1}.$$

对每一 b_μ, 定义

$$\begin{aligned}\widetilde{b}_\mu(x', y') = {} & b_\mu(x', y') - \frac{1}{|S^{m-1}|}\int_{S^{m-1}} b_\mu(\xi', y')d\xi' - \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} b_\mu(x', \eta')d\eta' \\ & + \frac{1}{|S^{m-1}|\,|S^{n-1}|}\iint_{S^{m-1}\times S^{n-1}} b_\mu(\xi', \eta')d\xi' d\eta',\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $|S^{m-1}|$ 和 $|S^{n-1}|$ 分别表示 S^{m-1} 与 S^{n-1} 的 Lebesgue 测度. 容易验证

$$\int_{S^{m-1}} \widetilde{b}_\mu(x', y')dx' = \int_{S^{n-1}} \widetilde{b}_\mu(x', y')dy' = 0, \tag{3.2}$$

$$\|\widetilde{b}_\mu\|_{L^q(S^{m-1}\times S^{n-1})} \leq 4|Q_\mu|^{1/q-1}, \quad \|\widetilde{b}_\mu\|_{L^1(S^{m-1}\times S^{n-1})} \leq 4. \tag{3.3}$$

注意到 $\Omega(x', y') = \sum_\mu C_\mu b_\mu(x', y')$, 由 (1.1) 和 (3.2) 式, 我们有

$$\Omega(x', y') = \sum_\mu C_\mu \widetilde{b}_\mu(x', y'). \tag{3.4}$$

下面建立一些与 $\widetilde{b}_\mu$ 有关的 Fourier 变换估计, 它们将在定理的证明中起着重要作用.

设 $j, k \in Z$, $s, t \in \mathbb{R}_+$, 记 $B_{j,k}^{s,t} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : 2^j s \leq |x| < 2^{j+1}s,\ 2^k t \leq |y| < 2^{k+1}t\right\}$. 对于多项式$P_{N_1}$和 P_{N_2}, 记 $P_{\lambda_1}(u) = \sum_{l=0}^{\lambda_1} \alpha_l u^l$, $P_{\lambda_2}(v) = \sum_{l'=0}^{\lambda_2} \beta_{l'} v^{l'}$, 其中 $\lambda_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, N_1\}$ 和 $\lambda_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, N_2\}$, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

对于 $\lambda_1 \in \{0,1,2,\ldots,N_1\}$, $\lambda_2 \in \{0,1,2,\ldots,N_2\}$ 和每一b_μ, 定义$\sigma^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}$ 与 $|\sigma^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}|$如下

$$\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)=\frac{1}{2^{j+k}st}\int_{B^{s,t}_{j,k}}\frac{\widetilde{b}_\mu(x',y')}{|x|^{m-1}|y|^{n-1}}e^{-iP_{\lambda_1}(|x|)\xi\cdot x'-iP_{\lambda_2}(|y|)\eta\cdot y'}dxdy, \tag{3.5}$$

$$\left|\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}\right|(\xi,\eta)=\frac{1}{2^{j+k}st}\int_{B^{s,t}_{j,k}}\frac{|\widetilde{b}_\mu(x',y')|}{|x|^{m-1}|y|^{n-1}}e^{-iP_{\lambda_1}(|x|)\xi\cdot x'-iP_{\lambda_2}(|y|)\eta\cdot y'}dxdy. \tag{3.6}$$

从而

$$\sigma^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}*f(x,y)=\frac{1}{2^{j+k}st}\int_{B^{s,t}_{j,k}}\frac{\widetilde{b}_\mu(\xi',\eta')}{|\xi|^{m-1}|\eta|^{n-1}}f(x-P_{\lambda_1}(|\xi|)\xi',y-P_{\lambda_2}(|\eta|)\eta')d\xi d\eta,$$

$$\left|\sigma^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}\right|*f(x,y)=\frac{1}{2^{j+k}st}\int_{B^{s,t}_{j,k}}\frac{|\widetilde{b}_\mu(\xi',\eta')|}{|\xi|^{m-1}|\eta|^{n-1}}f(x-P_{\lambda_1}(|\xi|)\xi',y-P_{\lambda_2}(|\eta|)\eta')d\xi d\eta.$$

由 (3.4) 式, 我们得到

$$F^P_{s,t}(x,y)=\sum_\mu C_\mu\sum_{j=-\infty}^{-1}\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{j+k}st\sigma^{\mu;s,t}_{j,k;N_1,N_2}*f(x,y). \tag{3.7}$$

又由 (3.2) 与 (3.4) 式容易看出, 对于 $\lambda_1 \in \{0,1,2,\ldots,N_1\}$ 与 $\lambda_2 \in \{0,1,2,\ldots,N_2\}$,

$$\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;0,\lambda_2}(\xi,\eta)=\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,0}(\xi,\eta)=0, \tag{3.8}$$

且

$$\left\|\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}\right\|_\infty\le C,\quad \left\|\,\left|\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}\right|\,\right\|_\infty\le C \tag{3.9}$$

关于 $j,k\in Z$ 和 $s,t>0$ 一致成立, 其中 C 与 P_{λ_1} 和 P_{λ_2} 的系数无关.

对于任意正整数λ_1和λ_2, 定义极大算子

$$\sigma^{*,\mu}_{\lambda_1,\lambda_2}(f)(x,y)=\sup_{j,k\in Z,\,s,t\in R_+}\left|\left|\sigma^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}\right|*f(x,y)\right|.$$

由于 $\|\widetilde{b}_\mu\|_{L^1(S^{m-1}\times S^{n-1})}\le 4$, 类似于文 [?] 中命题 2.1 的讨论, 能得到下列引理.

引理 1 对每一 b_μ 和每一对 λ_1 与 λ_2, $\sigma^{*,\mu}_{\lambda_1,\lambda_2}$ 是 $L^p(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)$ 有界的, $1<p<\infty$, 且其界与 P_{λ_1} 和 P_{λ_2} 的系数无关.

引理 2 对于每一对 λ_1 和 λ_2, 存在 δ_1 和 δ_2 满足

(i) 如果 $|Q_\mu|<e^{q/(1-q)}$, $\alpha_{\lambda_1}\beta_{\lambda_2}\ne 0$, 那么

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)\right|\le C\min\{1,&|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi|^{1/(2\lambda_1\log|Q_\mu|)},|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|^{1/(2\lambda_2\log|Q_\mu|)},\\&|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi|^{1/(2\lambda_1\log|Q_\mu|)}\cdot|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|^{1/(2\lambda_2\log|Q_\mu|)}\},\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\left|\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)-\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1-1,\lambda_2}(\xi,\eta)\right|\le C|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi|\min\{1,|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|^{1/(2\lambda_2\log|Q_\mu|)}\}, \tag{3.11}$$

$$\left|\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)-\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2-1}(\xi,\eta)\right|\le C|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|\min\{1,|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi|^{1/(2\lambda_1\log|Q_\mu|)}\}, \tag{3.12}$$

(ii) 如果 $|Q_\mu|\ge e^{q/(1-q)}$, $\alpha_{\lambda_1}\beta_{\lambda_2}\ne 0$, 那么

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)\right|\le C\min\{1,&|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi|^{-\delta_1},|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|^{-\delta_2},\\&|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi|^{-\delta_1}\cdot|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|^{-\delta_2}\},\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\left|\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)-\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1-1,\lambda_2}(\xi,\eta)\right|\le C|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi|\min\left\{1,|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|^{-\delta_2}\right\}, \tag{3.14}$$

$$\left|\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)-\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2-1}(\xi,\eta)\right|\le C|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|\min\left\{1,|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi|^{-\delta_1}\right\}, \tag{3.15}$$

(iii) $$|\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)-\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2}(\xi,\eta)-\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2-1}(\xi,\eta)+\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2-1}(\xi,\eta)| \\ \le C\min\left\{1,\,|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi|,\,|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|,\,|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi||2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|\right\}, \tag{3.16}$$

其中 C 与 $j,k\in Z$ 和 $s,t\in\mathbb{R}_+$, $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ 以及 P_{λ_1} 和 P_{λ_2} 的系数无关.

证明 先来证明 (3.16) 式. 由于

$$|\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)-\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2}(\xi,\eta)-\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2-1}(\xi,\eta)+\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2-1}(\xi,\eta)| \\ \le C\iint_{S^{m-1}\times S^{n-1}}\left|\widetilde{b}_\mu(x',y')\right|\bigg|\int_1^2\int_1^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\{\mathrm{P}_{\lambda_1-1}(2^{\mathrm{j}}\mathrm{su})\xi\cdot\mathrm{x}'+\mathrm{P}_{\lambda_2-1}(2^{\mathrm{k}}\mathrm{tv})\eta\cdot\mathrm{y}'\}} \\ \times[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_{\lambda_1}2^{\mathrm{j}\lambda_1}\mathrm{s}^{\lambda_1}\mathrm{u}^{\lambda_1}\xi\cdot\mathrm{x}'}-1][\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_{\lambda_2}2^{\mathrm{k}\lambda_2}\mathrm{t}^{\lambda_2}\mathrm{v}^{\lambda_2}\eta\cdot\mathrm{y}'}-1]dudv\bigg|dx'dy',$$

(3.16) 式可由此推出.

下面证明 (3.10) 与 (3.13) 式. 应用 Hölder 不等式得到

$$|\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)|^2 \\ \le C\frac{1}{2^{j+k}st}\int_{2^js}^{2^{j+1}s}\int_{2^kt}^{2^{k+1}t}\left|\iint_{S^{m-1}\times S^{n-1}}\widetilde{b}_\mu(x',y')\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\mathrm{P}_{\lambda_1}(\mathrm{u})\xi\cdot\mathrm{x}'+\mathrm{P}_{\lambda_2}(\mathrm{v})\eta\cdot\mathrm{y}']}dx'dy'\right|^2dudv.$$

注意到

$$\left|\iint_{S^{m-1}\times S^{n-1}}\widetilde{b}_\mu(x',\,y')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\mathrm{P}_{\lambda_1}(\mathrm{u})\xi\cdot\mathrm{x}'+\mathrm{P}_{\lambda_2}(\mathrm{v})\eta\cdot\mathrm{y}']}dx'dy'\right|^2 \\ =\iint_{(S^{m-1}\times S^{n-1})^2}\widetilde{b}_\mu(x',\,y')\overline{\widetilde{b}_\mu(z',\,w')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\mathrm{P}_{\lambda_1}(\mathrm{u})\xi\cdot(\mathrm{x}'-\mathrm{z}')+\mathrm{P}_{\lambda_2}(\mathrm{v})\eta\cdot(\mathrm{y}'-\mathrm{w}')]}dx'dy'dz'dw',$$

可写 $\Theta^{s,t}_{\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta;\,x',y';\,z',w')=\frac{1}{2^{j+k}st}\int_{2^js}^{2^{j+1}s}\int_{2^kt}^{2^{k+1}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[\mathrm{P}_{\lambda_1}(\mathrm{u})\xi\cdot(\mathrm{x}'-\mathrm{z}')+\mathrm{P}_{\lambda_2}(\mathrm{v})\eta\cdot(\mathrm{y}'-\mathrm{w}')]}dudv$, 从而有

$$\|\Theta^{s,\,t}_{\lambda_1,\lambda_2}\|_\infty\le 1, \tag{3.17}$$

和

$$\Theta^{s,\,t}_{\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\,\eta;\,x',\,y;\,z',\,w')=\int_1^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{P}_{\lambda_1}(2^{\mathrm{j}}\mathrm{su})\xi\cdot(\mathrm{x}'-\mathrm{z}')}du\int_1^2\mathrm{e}^{-P_{\lambda_2}(2^ktv)\eta\cdot(y'-w')}dv.$$

而由 Van der Corput 引理容易导出 (参见文 [?])

$$|\Theta^{s,\,t}_{\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta;\,x',y;\,z',w')| \\ \le C\min\{1,(|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi|\,|\xi'\cdot(x'-z')|)^{-1/\lambda_1},(|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|\,|\eta'\cdot(y'-w')|)^{-1/\lambda_2}, \\ (|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi|\,|\xi'\cdot(x'-z')|)^{-1/\lambda_1}\times(|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|\,|\eta'\cdot(y'-w')|)^{-1/\lambda_2}\}. \tag{3.18}$$

因此, 对于任意 $\delta\in(0,\,1]$, 从 (3.17) 和 (3.18) 式, 可得

$$|\Theta^{s,t}_{\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta;\,x',y;\,z',w')| \\ \le C\min\{1,(|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi||\xi'\cdot(x'-z')|)^{-\delta/\lambda_1},(|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|\,|\eta'\cdot(y'-w')|)^{-\delta/\lambda_2}, \\ (|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi|\,|\xi'\cdot(x'-z')|)^{-\delta/\lambda_1}\times(|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|\,|\eta'\cdot(y'-w')|)^{-\delta/\lambda_2}\}. \tag{3.19}$$

如果 $|Q_\mu| < \mathrm{e}^{q/(1-q)}$, 令 $p_\mu = \log|Q_\mu|/(1+\log|Q_\mu|)$, 则 $1 < p_\mu < q$. 在 (3.19) 式中取 $\delta = 1/p'_\mu$, 即 $\delta = -1/\log|Q_\mu| > 1/q'$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\Theta^{s,t}_{\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta;x',y;z',w')\right| \\
&\quad\le C\min\{1,(|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi||\xi'\cdot(x'-z')|)^{1/(\lambda_1\log|Q_\mu|)},(|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta||\eta'\cdot(y'-w')|)^{1/(\lambda_2\log|Q_\mu|)},\\
&\qquad(|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi||\xi'\cdot(x'-z')|)^{1/(\lambda_1\log|Q_\mu|)}\\
&\qquad\times(|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta||\eta'\cdot(y'-w')|)^{1/(\lambda_2\log|Q_\mu|)}\}.
\end{aligned}\tag{3.20}$$

由于 $\|\widetilde{b}_\mu\|_{L^{p_\mu}(S^{m-1}\times S^{n-1})}\le C$ 和

$$\begin{aligned}
&\left|\widehat{\sigma}^{\mu,s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)\right|\\
&\quad\le C\left|\iint_{(S^{m-1}\times S^{n-1})^2}\widetilde{b}_\mu(x',y')\overline{\widetilde{b}_\mu(z',w')}\times\Theta^{s,t}_{\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta;x',y;z',w')dx'dy'dz'dw'\right|^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}\tag{3.21}$$

应用 (3.20) 式和 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)\right| \le C\min\{&1,\ |2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi|^{1/(2\lambda_1\log|Q_\mu|)},\ |2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|^{1/(2\lambda_2\log|Q_\mu|)},\\
&|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi|^{1/(2\lambda_1\log|Q_\mu|)}\cdot|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|^{1/(2\lambda_2\log|Q_\mu|)}\}.
\end{aligned}$$

(3.10) 式得证.

如果 $|Q_\mu|\ge \mathrm{e}^{q/(1-q)}$, 则选取 $1<\lambda\le\min\{q,2\}$ 和 $\delta\in(0,1]$ 满足 $\delta<1/\lambda'$. 注意到 $\|\widetilde{b}_\mu\|_{L^\lambda(S^{m-1}\times S^{n-1})}\le C$, 应用 (3.19), (3.21) 式和 Hölder 不等式可推得 (3.13) 式.

下面证明 (3.11), (3.12), (3.14) 和 (3.15) 式. 仅证明 (3.11) 和 (3.14) 式, 类似地可得 (3.12) 和 (3.15) 式. 由于

$$\begin{aligned}
&\left|\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)-\widehat{\sigma}^{\mu,s,t}_{j,k;\lambda_1-1,\lambda_2}(\xi,\eta)\right|^2\\
&\quad\le C\frac{1}{2^{j+k}st}\int_{2^js}^{2^{j+1}s}\int_{2^kt}^{2^{k+1}t}\left|\iint_{S^{m-1}\times S^{n-1}}\widetilde{b}_\mu(x',y')[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{P}_{\lambda_1}(\mathrm{u})\xi\cdot\mathrm{x}'}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{P}_{\lambda_1-1}(\mathrm{u})\xi\cdot\mathrm{x}'}]\right.\\
&\qquad\left.\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{P}_{\lambda_2}(\mathrm{v})\eta\cdot\mathrm{y}'}dx'dy'\right|^2dudv.
\end{aligned}$$

类似于 (3.10) 与 (3.13) 式的证明可得 (3.11) 与 (3.14) 式, 在此省略其细节, 从而引理 2 得证.

取定两个径向 Schwartz 函数 $\phi_1\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ 和 $\phi_2\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 使之满足 $\phi_i(r)=1$ 对 $|r|\le1$ 和 $\phi_i(r)=0$ 对 $|r|>2$ $(i=1,2)$. 置 $\varphi_i(r)=\phi_i(r^2)$, $i=1,2$. 为了便于归纳推理, 定义 $\{\tau^{\mu,s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}\}$ 如下

$$\begin{aligned}
\widehat{\tau}^{\mu,s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)=\ &\widehat{\sigma}^{\mu,s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)\prod_{l=\lambda_1+1}^{N_1}\varphi_1(2^{jl}s^l\alpha_l\xi)\prod_{l'=\lambda_2+1}^{N_2}\varphi_2(2^{kl'}t^{l'}\beta_{l'}\eta)\\
&-\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1-1,\lambda_2}(\xi,\eta)\prod_{l=\lambda_1}^{N_1}\varphi_1(2^{jl}s^l\alpha_l\xi)\prod_{l'=\lambda_2+1}^{N_2}\varphi_2(2^{kl'}t^{l'}\beta_{l'}\eta)\\
&-\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2-1}(\xi,\eta)\prod_{l=\lambda_1+1}^{N_1}\varphi_1(2^{jl}s^l\alpha_l\xi)\prod_{l'=\lambda_2}^{N_2}\varphi_2(2^{kl'}t^{l'}\beta_{l'}\eta)\\
&+\widehat{\sigma}^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1-1,\lambda_2-1}(\xi,\eta)\prod_{l=\lambda_1}^{N_1}\varphi_1(2^{jl}s^l\alpha_l\xi)\prod_{l'=\lambda_2}^{N_2}\varphi_2(2^{kl'}t^{l'}\beta_{l'}\eta),
\end{aligned}$$

其中对于空集 A, 我们记 $\prod_{j\in A} R_j = 1$.

由于 $\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,0,\lambda_2}(\xi,\eta) \equiv \widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,0}(\xi,\eta) \equiv 0$, 容易导出

$$\sum_{\lambda_1=1}^{N_1}\sum_{\lambda_2=1}^{N_2} \widehat{\tau}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta) = \widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,N_1,N_2}(\xi,\eta). \tag{3.22}$$

对于 $\{\widehat{\tau}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}\}$, 我们有如下估计.

引理 3 对于 $\lambda_1 \in \{1, 2, \ldots, N_1\}$, $\lambda_2 \in \{1, 2, \ldots, N_2\}$ 和每一 $\widetilde{b}_\mu$,

(i) 如果 $|Q_\mu| < \mathrm{e}^{q/(1-q)}$, 那么

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\tau}^{\mu,\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)\right| \quad \le C\min\{&1, \left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|,\\ &\left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|^{1/(2\lambda_1\log|Q_\mu|)}\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|,\\ &\left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|^{1/(2\lambda_2\log|Q_\mu|)},\\ &\left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|^{1/(2\lambda_1\log|Q_\mu|)}\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|^{1/(2\lambda_2\log|Q_\mu|)}\};\end{aligned}$$

(ii) 如果 $|Q_\mu| \ge \mathrm{e}^{q/(1-q)}$, 那么

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\tau}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)\right| \quad \le C\min\{&\left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|, \left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|^{-\omega}\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|,\\ &\left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|^{-\omega}, \left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|^{-\omega}\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|^{-\omega}\},\end{aligned}$$

其中 C, ω 与 $\widetilde{b}_\mu$ 和 $P_{\lambda_1}, P_{\lambda_2}$ 的系数无关.

证明 由于 (i) 与 (ii) 的证明类似, 我们只证明 (i). 令

$$\Pi_1(\lambda_1) = \prod_{l=\lambda_1+1}^{N_1}\varphi_1(2^{jl}s^l\alpha_l\xi);\quad \Pi_2(\lambda_2) = \prod_{l'=\lambda_2+1}^{N_2}\varphi_2(2^{kl'}t^{l'}\beta_{l'}\eta).$$

从定义可以看出, 对任意 $\delta_1, \delta_2 > 0$, 有

$$|\Pi_1(\lambda_1-1)| \le C\min\{1, \left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|^{-\delta_1}\},\quad |\Pi_2(\lambda_2-1)| \le C\min\{1, \left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|^{-\delta_2}\}. \tag{3.23}$$

和

$$\Pi_1(\lambda_1-1) = \Pi_1(\lambda_1)\varphi_1(2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi),\quad \Pi_2(\lambda_2-1) = \Pi_2(\lambda_2)\varphi_2(2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta).$$

利用这些表示, 得到

$$\begin{aligned}\widehat{\tau}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta) = &\,\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)\Pi_1(\lambda_1)\Pi_2(\lambda_2) - \widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2}(\xi,\eta)\Pi_1(\lambda_1-1)\Pi_2(\lambda_2)\\ &- \widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2-1}(\xi,\eta)\Pi_1(\lambda_1)\Pi_2(\lambda_2-1)\\ &+ \widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2-1}(\xi,\eta)\Pi_1(\lambda_1-1)\Pi_2(\lambda_2-1).\end{aligned} \tag{3.24}$$

因而

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\tau}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)\right| \le &\,|\Pi_1(\lambda_1)\Pi_2(\lambda_2)|\\ &\times\left\{\left|\left(\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2} - \widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2} - \widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2-1} + \widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2-1}\right)(\xi,\eta)\right|\right.\\ &+ \left|\left(\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2} - \widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2-1}\right)(\xi,\eta)\right|\left|1-\varphi_1(2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi)\right|\\ &+ \left|\left(\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2-1} - \widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2-1}\right)(\xi,\eta)\right|\left|1-\varphi_2(2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta)\right|\\ &\left.+ \left|\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2-1}(\xi,\eta)\right|\left|1-\varphi_1(2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi)\right|\left|1-\varphi_2(2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta)\right|\right\}\\ &:= I + II + III + IV.\end{aligned}$$

我们先来证明 I-IV 都被 $C|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi||2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|$ 控制. 事实上, 由 (3.16) 和 (3.23) 式, 易知

$$I \le C\left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|.$$

又

$$\left|1-\varphi_1(2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi)\right| \le C\left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|,\quad \left|1-\varphi_2(2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta)\right| \le C\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|. \tag{3.25}$$

借助于 (3.12), (3.23) 和 (3.25) 式, 可推得 $II \le C\left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|$. 类似地, 利用 (3.11), (3.23) 和 (3.25) 式可得到关于 III 的证明. 而由 (3.10), (3.23) 和 (3.25) 式可得到关于 IV 的证明.

其次, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\tau}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)\right| \le{}& \left|\left(\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}-\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2}\right)(\xi,\eta)\Pi_1(\lambda_1)\Pi_2(\lambda_2)\right|\\
&+\left|\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2}(\xi,\eta)\Pi_1(\lambda_1)\Pi_2(\lambda_2)\left(1-\varphi_1(2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi)\right)\right|\\
&+\left|\left(\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2-1}-\widehat{\sigma}^{\mu,\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2-1}\right)(\xi,\eta)\Pi_1(\lambda_1)\Pi_2(\lambda_2-1)\right|\\
&+\left|\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2-1}(\xi,\eta)\Pi_1(\lambda_1)\Pi_2(\lambda_2-1)\left(1-\varphi_1(2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta)\right)\right|.\end{aligned}$$

因此, 应用 (3.10)–(3.12), (3.23) 和 (3.25) 式, 我们得到

$$\left|\widehat{\tau}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)\right| \le C\left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|^{1/(2\lambda_2\log|Q_\mu|)}.$$

类似地, 由于

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\tau}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)\right| \le{}& \left|\left(\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}-\widehat{\sigma}^{\mu,\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2-1}\right)(\xi,\eta)\Pi_1(\lambda_1)\Pi_2(\lambda_2)\right|\\
&+\left|\widehat{\sigma}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2-1}(\xi,\eta)\Pi_1(\lambda_1)\Pi_2(\lambda_2)\left(1-\varphi_2(2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta)\right)\right|\\
&+\left|\left(\widehat{\sigma}^{\mu,\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2}-\widehat{\sigma}^{\mu,\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2-1}\right)(\xi,\eta)\Pi_1(\lambda_1-1)\Pi_2(\lambda_2)\right|\\
&+\left|\widehat{\sigma}^{\mu,\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1-1,\lambda_2-1}(\xi,\eta)\Pi_1(\lambda_1-1)\Pi_2(\lambda_2)\left(1-\varphi_2(2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta)\right)\right|,\end{aligned}$$

我们有 $|\widehat{\tau}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)| \le C|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi|^{1/(2\lambda_1\log|Q_\mu|)}|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta|$.

最后, 从 (3.10), (3.23) 和 (3.24) 式, 容易推得

$$\left|\widehat{\tau}^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}(\xi,\eta)\right| \le C\left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|^{1/(2\lambda_1\log|Q_\mu|)}\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|^{1/(2\lambda_2\log|Q_\mu|)}.$$

引理 3 得证.

另外, 利用引理 1, 对于 $\lambda_1 \in \{1, 2, \dots, N_1\}$ 和 $\lambda_2 \in \{1, 2, \dots, N_1\}$, 我们有

$$\left\|\sup_{j,k\in Z}\sup_{s,t>0}|\tau^{\mu,\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}|*f\right\|_p \le C\|f\|_p,\quad 1<p<\infty, \tag{3.26}$$

且其界与 $\widetilde{b}_\mu$ 和 P_{λ_1}, P_{λ_2} 的系数无关. 应用 (3.26) 式和类似于文 [?] 中引理 1 的证明, 可得到如下引理.

引理 4 对于任意函数 $\{g_{j,k}\}$ 及 $1<p_0<\infty$, $\lambda_1 \in \{1, 2, \dots, N_1\}$ 和 $\lambda_2 \in \{1, 2, \dots, N_2\}$, 有

$$\left\|\left(\sum_{j,\,k\in Z}\left|\tau^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}*g_{j,k}\right|^2\right)^{\frac12}\right\|_{p_0} \le C\left\|\left(\sum_{j,k\in Z}|g_{j,k}|^2\right)^{\frac12}\right\|_{p_0},$$

其中 C 与 $\widetilde{b}_\mu$ 和 $P_{\lambda_1}, P_{\lambda_2}$ 的系数无关.

4 主要定理的证明

我们只需证明定理 1. 应用 Minkowski 不等式和 (3.7) 式, 我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_P(f)(x,y) &= \Big(\int_0^\infty\int_0^\infty\Big|\sum_\mu C_\mu\sum_{j=-\infty}^{-1}\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{j+k}\sigma^{\mu;s,t}_{j,k;N_1,N_2}*f(x,y)\Big|^2\frac{dsdt}{st}\Big)^{\frac12}\\ &\le\sum_\mu|C_\mu|\sum_{j=-\infty}^{-1}\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{j+k}\Big(\int_0^\infty\int_0^\infty\big|\sigma^{\mu;s,t}_{j,k;N_1,N_2}*f(x,y)\big|^2\frac{dsdt}{st}\Big)^{\frac12}\\ &\le\sum_\mu|C_\mu|\sum_{j=-\infty}^{-1}\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{j+k}\Big(\int_0^\infty\int_0^\infty\big|\sigma^{\mu;s,t}_{0,0;N_1,N_2}*f(x,y)\big|^2\frac{dsdt}{st}\Big)^{\frac12}\\ &=\sum_\mu|C_\mu|\Big(\int_0^\infty\int_0^\infty\big|\sigma^{\mu;s,t}_{0,0;N_1,N_2}*f(x,y)\big|^2\frac{dsdt}{st}\Big)^{\frac12}\\ &=\sum_\mu|C_\mu|\Big(\int_1^2\int_1^2\sum_{j\in Z}\sum_{k\in Z}\big|\sigma^{\mu;s,t}_{j,k,N_1,N_2}*f(x,y)\big|^2\frac{dsdt}{st}\Big)^{\frac12}.\end{aligned}$$

因而, 由 (3.22) 式可得

$$\begin{aligned}\mathscr{M}_P(f)(x,y) &\le C\sum_\mu|C_\mu|\sum_{\lambda_1=1}^{N_1}\sum_{\lambda_2=1}^{N_2}\Big(\int_1^2\int_1^2\sum_{j,k\in Z}\big|\tau^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}*f(x,y)\big|^2dsdt\Big)^{\frac12}\\ &:=C\sum_{\lambda_1=1}^{N_1}\sum_{\lambda_2=1}^{N_2}\sum_\mu|C_\mu|M^{\lambda_1,\lambda_2}_{P,\mu}(f)(x,y),\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中 $M^{\lambda_1,\lambda_2}_{P,\mu}(f)(x,y)=\big(\int_1^2\int_1^2\sum_{j,k\in Z}|\tau^{\mu,s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}*f(x,y)|^2dsdt\big)^{\frac12}$. 进而有

$$\|\mathscr{M}_P(f)\|_p\le C\sum_{\lambda_1=1}^{N_1}\sum_{\lambda_2=1}^{N_2}\sum_\mu|C_\mu|\,\big\|M^{\lambda_1,\lambda_2}_{P,\mu}(f)\big\|_p,\quad 1<p<\infty.\tag{4.2}$$

注意到对于固定的 $\lambda_1\in\{1,2,\dots,N_1\}$ 和 $\lambda_2\in\{1,2,\dots,N_2\}$, 若 $\alpha_{\lambda_1}\beta_{\lambda_2}=0$, 则 $\tau^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}=0$. 因此, 不失一般性可假定 $\alpha_{\lambda_1}\beta_{\lambda_2}\ne0$. 设 ψ_1 与 ψ_2 分别是 $\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^n$ 上的两个径向 Schwartz 函数, 并且满足

(a) $0\le\psi_i\le1$, $i=1,2$;

(b) $\mathrm{supp}(\psi_1)\subseteq\{x\in\mathbb{R}^m:2^{-\lambda_1}\le|x|\le2^{\lambda_1}\}$ 与 $\mathrm{supp}(\psi_2)\subseteq\{y\in\mathbb{R}^n:2^{-\lambda_2}\le|y|\le2^{\lambda_2}\}$;

(c) $\sum_{d\in Z}\big(\psi_1(2^{d\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}x)\big)^2\equiv1$ 对所有 $x\in\mathbb{R}^m\setminus\{0\}$ 成立, 而 $\sum_{l\in Z}\big(\psi_2(2^{l\lambda_2}\beta_{\lambda_2}y)\big)^2\equiv1$ 对所有 $y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 成立.

令 $\psi_{1,d}(x)=\psi_1(2^{d\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}x)$ 和 $\psi_{2,l}(y)=\psi_2(2^{l\lambda_2}\beta_{\lambda_2}y)$. 定义乘子算子 S^1_d 与 S^2_l 如下 $\widehat{S^1_df}(\xi)=\psi_{1,d}(\xi)\widehat{f}(\xi)$, $\widehat{S^2_lg}(\eta)=\psi_{2,l}(\eta)\widehat{g}(\eta)$, 以及定义 $S^1_d\otimes S^2_l$ 如下 $((S^1_d\widehat{\otimes S^2_l})f)(\xi,\eta)=\psi_{1,d}(\xi)\psi_{2,l}(\eta)\widehat{f}(\xi,\eta)$. 于是有

$$\begin{aligned}&M^{\lambda_1,\lambda_2}_{P,\mu}(f)(x,y)\\ &=\Big(\int_1^2\int_1^2\sum_{j,k\in Z}\Big|\sum_{d,l\in Z}(S^1_{j+d}\otimes S^2_{k+l})(\tau^{\mu;s,t}_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}*(S^1_{j+d}\otimes S^2_{k+l})f)(x,y)\Big|^2dsdt\Big)^{\frac12}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

下面给出定理 1 的证明.

定理 1 (i) 的证明 由于引理 3, 不失一般性, 可假定每一 b_μ 的支集 Q_μ 满足 $|Q_\mu| < \mathrm{e}^{1/(1-q)}$. 我们首先考虑映射 $\mathscr{G}$, 它被定义为

$$\mathscr{G}: \quad \{g^{s,t}_{j,k;\,d,l}(x,\,y)\}_{j,k;\,d,l\in Z} \longrightarrow \left\{\sum_{d,l\in Z}\big((S^1_{j+d}\otimes S^2_{k+l})(g^{s,t}_{j,k;\,d,l})\big)(x,\,y)\right\}_{j,k\in Z}.$$

由 Plancherel 定理知

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2\left|\sum_{d,l\in Z}(S^1_{j+d}\otimes S^2_{k+l})g^{s,t}_{j,k;\,d,l}\right|^2 dsdt\right)^{\frac12}\right\|_2^2\\
&\quad=\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2\iint_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}\sum_{d,l\in Z}(S^1_{j+d}\otimes S^2_{k+l})g^{s,t}_{j,k;\,d,l}(x,y)\\
&\qquad\times\overline{\sum_{d',l'\in Z}(S^1_{j+d'}\otimes S^2_{k+l'})g^{s,t}_{j,k;\,d',l'}(x,y)}dxdydsdt\\
&\quad=\sum_{j,k\in Z}\sum_{d,l\in Z}\sum_{d',l'\in Z}\int_1^2\int_1^2\iint_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}\psi_{1,j+d}(\xi)\psi_{2,k+l}(\eta)\widehat{g^{s,t}_{j,k;\,d,l}}(\xi,\,\eta)\\
&\qquad\times\overline{\psi_{1,j+d'}(\xi)\psi_{2,k+l'}(\eta)\widehat{g^{s,t}_{j,k;\,d',l'}}(\xi,\,\eta)}d\xi d\eta dsdt\\
&\quad=\sum_{j,k\in Z}\sum_{d,l\in Z}\sum_{|d-d'|\le 2,\,|l-l'|\le 2}\int_1^2\int_1^2\iint_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}\psi_{1,j+d}(\xi)\psi_{2,k+l}(\eta)\widehat{g^{s,t}_{j,k;\,d,l}}(\xi,\,\eta)\\
&\qquad\times\overline{\psi_{1,j+d'}(\xi)\psi_{2,k+l'}(\eta)\widehat{g^{s,t}_{j,k;\,d',l'}}(\xi,\,\eta)}d\xi d\eta dsdt.
\end{aligned}$$

通过简单计算可得

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{d,l\in Z}\sum_{|d-d'|\le 2,\,|l-l'|\le 2}\int_1^2\int_1^2\iint_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}\psi_{1,j+d}(\xi)\psi_{2,k+l}(\eta)\widehat{g^{s,t}_{j,k;\,d,l}}(\xi,\,\eta)\right.\\
&\qquad\left.\times\overline{\psi_{1,j+d'}(\xi)\psi_{2,k+l'}(\eta)\widehat{g^{s,t}_{j,k,\,d',l'}}(\xi,\,\eta)}d\xi d\eta dsdt\right|\\
&\quad\le\sum_{d,l\in Z}\sum_{|d-d'|\le 2,\,|l-l'|\le 2}\int_1^2\int_1^2\iint_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}\left|\widehat{g^{s,t}_{j,k;\,d,l}}(\xi,\,\eta)\right|\left|\widehat{g^{s,t}_{j,k;\,d',l'}}(\xi,\,\eta)\right|d\xi d\eta dsdt\\
&\quad\le C\sum_{d,l\in Z}\int_1^2\int_1^2\iint_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}\left|\widehat{g^{s,t}_{j,k;\,d,l}}(\xi,\,\eta)\right|^2 d\xi d\eta dsdt.
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2\left|\sum_{d,l\in Z}(S^1_{j+d}\otimes S^2_{k+l})g^{s,t}_{j,k;\,d,l}\right|^2 dsdt\right)^{\frac12}\right\|_2^2\\
&\quad\le C\sum_{d,l\in Z}\left\|\left(\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2\left|g^{s,t}_{j,k;\,d,l}\right|^2 dsdt\right)^{\frac12}\right\|_2^2. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

这表明 $\mathscr{G}$ 是从 $l^2(L^2(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)(L^2([1,\,2]\times[1,\,2])(l^2)))$ 到 $L^2(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)(L^2([1,\,2]\times[1,\,2])(l^2))$

有界的. 而从 (4.3) 和 (4.4) 式, 可得

$$\left\|M_{P,\mu}^{\lambda_1,\lambda_2}(f)\right\|_2^2 \le C\sum_{d,l\in Z}\left\|\Big(\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2\left|\tau_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}^{\mu;s,t}*\big((S_{j+d}^1\otimes S_{k+l}^2)f\big)\right|^2dsdt\Big)^{\frac12}\right\|_2^2.$$

对于每一固定的 $d,\,l\in Z$, 令

$$I_{d,l}(f)(x,\,y)=\Big(\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2\left|\tau_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}^{\mu;s,t}*\big((S_{j+d}^1\otimes S_{k+l}^2)f\big)(x,\,y)\right|^2dsdt\Big)^{\frac12},$$

则有

$$\left\|M_{P,\mu}^{\lambda_1,\lambda_2}(f)\right\|_2^2\le C\sum_{d,l\in Z}\|I_{d,l}(f)\|_2^2. \tag{4.5}$$

再次应用 Plancherel 定理可知

$$\begin{aligned}\|I_{d,l}(f)\|_2^2&=\int_1^2\int_1^2\sum_{j,k\in Z}\iint_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}|\psi_{1,j+d}(\xi)\psi_{2,k+l}(\eta)|^2\left|\widehat{\tau_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}^{\mu;s,t}}(\xi,\,\eta)\right|^2|\widehat{f}(\xi,\,\eta)|^2d\xi d\eta dsdt\\&\le C\int_1^2\int_1^2\sum_{j,k\in Z}\int_{E_{j,k,d,l}}\left|\widehat{\tau_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}^{\mu;s,t}}(\xi,\,\eta)\right|^2\left|\widehat{f}(\xi,\,\eta)\right|^2d\xi d\eta dsdt,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}E_{j,k;d,l}=\{(\xi,\,\eta)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n:&\,2^{-(j+d+1)\lambda_1}\le|\alpha_{\lambda_1}\xi|\le 2^{-(j+d-1)\lambda_1},\\&2^{-(k+l+1)\lambda_2}\le|\beta_{\lambda_2}\eta|\le 2^{-(k+l-1)\lambda_2}\}.\end{aligned}$$

又对于 $(\xi,\,\eta)\in E_{j,k;d,l}$ 和 $s,\,t\in[1,\,2]$, 应用引理 3 可得

$$\left|\widehat{\tau_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}^{\mu;s,t}}(\xi,\,\eta)\right|\le C\left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|\le C2^{-d\lambda_1-l\lambda_2},\quad d\ge0,\quad l\ge0; \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\tau_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}^{\mu;s,t}}(\xi,\,\eta)\right|&\le C\left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|^{1/(2\lambda_2\log|Q_\mu|)}\\&\le C2^{-d\lambda_1-l/(2\log|Q_\mu|)},\quad d\ge0,\quad l<0;\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\tau_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}^{\mu;s,t}}(\xi,\,\eta)\right|&\le C\left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|^{1/(2\lambda_1\log|Q_\mu|)}\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|\\&\le C2^{-d/(2\log|Q_\mu|)-l\lambda_2},\qquad d<0,\quad l\ge0;\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\tau_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}^{\mu;s,t}}(\xi,\,\eta)\right|&\le C\left|2^{j\lambda_1}s^{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}\xi\right|^{1/(2\lambda_1\log|Q_\mu|)}\left|2^{k\lambda_2}t^{\lambda_2}\beta_{\lambda_2}\eta\right|^{1/(2\lambda_2\log|Q_\mu|)}\\&\le C2^{-d/(2\log|Q_\mu|)-l/(2\log|Q_\mu|)},\quad d<0,\quad l<0.\end{aligned} \tag{4.9}$$

于是

$$\|I_{d,l}(f)\|_2\le C2^{-d\lambda_1-l\lambda_2}\|f\|_2,\qquad d\ge0,\quad l\ge0; \tag{4.10}$$

$$\|I_{d,l}(f)\|_2\le C2^{-d\lambda_1-l/(2\log|Q_\mu|)}\|f\|_2,\qquad d\ge0,\quad l<0; \tag{4.11}$$

$$\|I_{d,l}(f)\|_2\le C2^{-d/(2\log|Q_\mu|)-l\lambda_2}\|f\|_2,\qquad d\ge0,\quad l\ge0; \tag{4.12}$$

$$\|I_{d,l}(f)\|_2\le C2^{-d/(2\log|Q_\mu|)-l/(2\log|Q_\mu|)}\|f\|_2,\quad d<0,\quad l<0. \tag{4.13}$$

综合 (4.5) 与 (4.10)–(4.13) 式, 我们有

$$\begin{aligned}\|M_{P,\mu}^{\lambda_1,\lambda_2}(f)\|_2^2 &\le C\|f\|_2^2\Big\{\sum_{d\ge0,\,l\ge0}2^{-\lambda_1d-\lambda_2l}+\sum_{d\ge0,\,l<0}2^{-\lambda_1d-l/(2\log|Q_\mu|)}\\&\quad+\sum_{d<0,\,l\ge0}2^{-d/(2\log|Q_\mu|)-\lambda_2l}+\sum_{d<0,\,l<0}2^{-(d+l)/(2\log|Q_\mu|)}\Big\}\\&\le C\left(1+\log\frac{1}{|Q_\mu|}\right)^2\|f\|_2^2.\end{aligned}$$

故而有 $\|M_{P,\mu}^{\lambda_1,\lambda_2}(f)\|_2\le C\big(1+\log\frac{1}{|Q_\mu|}\big)\|f\|_2$. 由此和 (4.2) 式, 便得

$$\|\mathscr{M}_P(f)\|_2\le C\sum_{\lambda_1=1}^{N_1}\sum_{\lambda_2=1}^{N_2}\sum_{\mu}|C_\mu|\left(1+\log\frac{1}{|Q_\mu|}\right)\|f\|_2\le C\|f\|_2.$$

定理 1 之 (i) 得证.

定理 1 (ii) 的证明 我们首先证明: 对于 $1<p<2$ 和 $1<q<p$, 有

$$\|M_{P,\mu}^{\lambda_1,\lambda_2}(f)\|_p^q\le C\sum_{d,l\in Z}\left\|\left(\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2\left|\tau_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}^{\mu,\,s,t}*\big((S_{j+d}^1\otimes S_{k+l}^2)f\big)\right|^2dsdt\right)^{\frac12}\right\|_p^q. \tag{4.14}$$

事实上, 对于 $1<p_0<\infty$, 应用 Minkowski 不等式可得

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2\left|\sum_{d,l\in Z}(S_{j+d}^1\otimes S_{k+l}^2)g_{j,k;\,d,l}^{s,t}\right|^2dsdt\right)^{\frac12}\right\|_{p_0}\\&\le\sum_{d,l\in Z}\left\|\left(\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2\left|(S_{j+d}^1\otimes S_{k+l}^2)g_{j,k;\,d,l}^{s,t}\right|^2dsdt\right)^{\frac12}\right\|_{p_0}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

而对于每一固定的 $d,l\in Z$ 和任意函数 $\{h_{j,k}^{s,t}\}$, 有

$$\left\|\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2\left|(S_{j+d}^1\otimes S_{k+l}^2)h_{j,k}^{s,t}\right|dsdt\right\|_1\le\sum_{j,k\in Z}\left\|\int_1^2\int_1^2\left|h_{j,k}^{s,t}\right|dsdt\right\|_1,$$

和

$$\left\|\sup_{j,k\in Z}\sup_{s,t\in[1,2]}\left|(S_{j+d}^1\otimes S_{k+l}^2)h_{j,k}^{s,t}\right|\right\|_{p_0}\le C\left\|\sup_{j,k\in Z}\sup_{s,t\in[1,2]}\left|h_{j,k}^{s,t}\right|\right\|_{p_0},\quad 1<p_0<\infty.$$

这表明映射

$$\mathscr{H}:\big\{h_{j,k}^{s,t}(x,y)\big\}_{j,k\in Z;\,s,t\in[1,2]}\longrightarrow\big\{(S_{j+d}^1\otimes S_{k+l}^2)h_{j,k}^{s,t}(x,y)\big\}_{j,k\in Z;\,s,t\in[1,2]}$$

分别在 $L^{p_0}(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)(L^\infty([1,2]\times[1,2])(l^\infty))(1<p_0<\infty)$ 上有界和在 $L^1(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)(L^1([1,2]\times[1,2])(l^1)$ 上有界. 因此, 对于给定的 $p\in(1,2)$, 选取 p_0 满足 $1<p_0<\infty$ 和 $2/p=1+1/p_0$. 借助于插值定理可知 $\mathscr{H}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)(L^2([1,2]\times[1,2])(l^2)$ 上有界. 结合 (4.15) 式, 有

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2\left|\sum_{d,l\in Z}(S_{j+d}^1\otimes S_{k+l}^2)g_{j,k,\,d,l}^{s,t}\right|^2dsdt\right)^{\frac12}\right\|_p\\&\le\sum_{d,l\in Z}\left\|\left(\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2\left|g_{j,k;\,d,l}^{s,t}\right|^2dsdt\right)^{\frac12}\right\|_p,\quad 1<p<2.\end{aligned} \tag{4.16}$$

因而, 对于每一固定的 $1<p<2$ 和任意 $1<q<p$, 插值 (4.4) 和 (4.16) 式, 即得

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big(\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2\Big|\sum_{d,l\in Z}(S^1_{j+d}\otimes S^2_{k+l})g^{s,t}_{j,k;\,d,l}\Big|^2dsdt\Big)^{\frac12}\Big\|_p^q\\&\quad\le\sum_{d,l\in Z}\Big\|\Big(\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2|g^{s,t}_{j,k;\,d,l}|^2dsdt\Big)^{\frac12}\Big\|_p^q.\end{aligned}$$

(4.14) 式得证.

接下来, 我们断言: 对于 $2<p<\infty$ 和任意 $1<q<p'=p/(p-1)$, 有

$$\|M^{\lambda_1,\lambda_2}_{P,\mu}(f)\|_p^q\le C\sum_{d,l\in Z}\Big(\int_1^2\int_1^2\Big\|\Big(\sum_{j,k\in Z}\big|\tau^{\mu;\,s,t}_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}*\big((S^1_{j+d}\otimes S^2_{k+l})f\big)\big|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p^2dsdt\Big)^{\frac q2}. \tag{4.17}$$

事实上, 由 Minkowski 不等式和 Littlewood–Paley 理论 (见文 [?, Chapter 4]) 知

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big(\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2|(S^1_{j+d}\otimes S^2_{k+l})g^{s,t}_{j,k;\,d,l}|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p^2\\&\quad\le\int_1^2\int_1^2\Big\|\Big(\sum_{j,k\in Z}|(S^1_{j+d}\otimes S^2_{k+l})g^{s,t}_{j,k;\,d,l}|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p^2dsdt\\&\quad\le C\int_1^2\int_1^2\Big\|\Big(\sum_{j,k\in Z}|g^{s,t}_{j,k;\,d,l}|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p^2dsdt,\qquad 2<p<\infty.\end{aligned}$$

由此式和 (4.15) 式, 我们有

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big(\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2\Big|\sum_{d,l\in Z}(S^1_{j+d}\otimes S^2_{k+l})g^{s,t}_{j,k;\,d,l}\Big|^2dsdt\Big)^{\frac12}\Big\|_p\\&\quad\le C\sum_{d,l\in Z}\Big(\int_1^2\int_1^2\Big\|\Big(\sum_{j,k\in Z}|g^{s,t}_{j,k;\,d,l}|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p^2dsdt\Big)^{\frac12},\quad 2<p<\infty.\end{aligned} \tag{4.18}$$

另一方面, 从 (4.4) 式, 可得

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big(\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2\Big|\sum_{d,l\in Z}(S^1_{j+d}\otimes S^2_{k+l})g^{s,t}_{j,k;\,d,l}\Big|^2dsdt\Big)^{\frac12}\Big\|_2\\&\quad\le C\Big(\sum_{d,l\in Z}\int_1^2\int_1^2\Big\|\Big(\sum_{j,k\in Z}|g^{s,t}_{j,k;\,d,l}|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_2^2dsdt\Big)^{\frac12}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

从而对于每一固定的 $2<p<\infty$ 和任意 $1<q<p'=p/(p-1)$, 插值 (4.18) 和 (4.19) 式, 便得

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big(\sum_{j,k\in Z}\int_1^2\int_1^2\Big|\sum_{d,l\in Z}(S^1_{j+d}\otimes S^2_{k+l})g^{s,t}_{j,k;\,d,l}\Big|^2dsdt\Big)^{\frac12}\Big\|_p^q\\&\quad\le C\sum_{d,l\in Z}\Big(\int_1^2\int_1^2\Big\|\Big(\sum_{j,k\in Z}|g^{s,t}_{j,k;\,d,l}|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_p^2dsdt\Big)^{\frac q2}.\end{aligned}$$

(4.17) 式得证.

现在我们分如下两种情形来建立 $\mathscr{M}_P(f)$ 的 $L^p(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)$ 估计:

情形 1 $2/(1+\nu)<p<2$: 由 (4.14) 式和 $I_{d,l}$ 定义知

$$\left\|M_{P,\mu}^{\lambda_1,\lambda_2}(f)\right\|_p^q \le C\sum_{d,l\in Z}\|I_{d,l}(f)\|_p^q,\quad 1<p<2,\quad 1<q<p. \tag{4.20}$$

首先估计 $\|I_{d,l}(f)\|_p$. 从 $\tau_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}^{\mu;s,t}$ 的定义和 (3.26) 式容易看出, 对于任意函数 $\{h_{j,k}\}_{j,k\in Z}$, 有

$$\left\|\int_1^2\int_1^2\sum_{j,k\in Z}\left|\tau_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}^{\mu;s,t}*h_{j,k}\right|dsdt\right\|_1\le C\left\|\sum_{j,k\in Z}|h_{j,k}|\right\|_1$$

和

$$\left\|\sup_{j,k\in Z}\sup_{s,t\in[1,2]}\left|\tau_{j,k,\lambda_1,\lambda_2}^{\mu;s,t}*h_{j,k}\right|\right\|_{p_0}\le C\left\|\sup_{j,k\in Z}|h_{j,k}|\right\|_{p_0},\quad 1<p_0<\infty.$$

因此

$$\left\|\left(\int_1^2\int_1^2\sum_{j,k\in Z}\left|\tau_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}^{\mu;s,t}*h_{j,k}\right|^2dsdt\right)^{\frac12}\right\|_p\le C\left\|\left(\sum_{j,k\in Z}|h_{j,k}|^2\right)^{\frac12}\right\|_p,\quad 1<p<2.$$

特别地, 取 $h_{j,k}(x,y)=(S_{j+d}^1\otimes S_{k+l}^2)f(x,y)$. 由 Littlewood–Paley 理论得

$$\|I_{d,l}(f)\|_p\le C\left\|\left(\sum_{j,k\in Z}\left|(S_{j+d}^1\otimes S_{k+l}^2)f\right|^2\right)^{\frac12}\right\|_p\le C\|f\|_p,\quad 1<p<2. \tag{4.21}$$

运用插值定理, 由 (4.10)–(4.13) 和 (4.21) 式可知: 对于任意 $1<p<2$ 和 $0<\theta<1$, 有

$$\begin{aligned}
&\|I_{d,l}(f)\|_p\le C2^{-\theta\lambda_1 d-\theta\lambda_2 l}\|f\|_p, && d\ge0,\quad l\ge0;\\
&\|I_{d,l}(f)\|_p\le C2^{-\theta\lambda_1 d-\theta l/(2\log|Q_\mu|)}\|f\|_p, && d\ge0,\quad l<0;\\
&\|I_{d,l}(f)\|_p\le C2^{-\theta d/(2\log|Q_\mu|)-\theta\lambda_2 l}\|f\|_p, && d<0,\quad l\ge0;\\
&\|I_{d,l}(f)\|_p\le C2^{-\theta d/(2\log|Q_\mu|)-\theta l/(2\log|Q_\mu|)}\|f\|_p, && d<0,\quad l<0.
\end{aligned}$$

综合上述不等式和 (4.20) 式, 对于 $2/(1+\nu)<p<2$, 我们有

$$\left\|M_{P,\mu}^{\lambda_1,\lambda_2}(f)\right\|_p\le C\left(1+\log\frac{1}{|Q_\mu|}\right)^{1+\nu}\|f\|_p\le C\left\{1+\left(\log\frac{1}{|Q_\mu|}\right)^{1+\nu}\right\}\|f\|_p.$$

因此

$$\|\mathscr{M}_P(f)\|_p\le C\sum_{\lambda_1=1}^{N_1}\sum_{\lambda_2=1}^{N_2}\sum_{\mu}|C_\mu|\left\{1+\left(\log\frac{1}{|Q_\mu|}\right)^{1+\nu}\right\}\|f\|_p\le C\|f\|_p,\ \frac{2}{1+\nu}<p<2.$$

情形 2 $2<p<2/(1-\nu)$: 对于固定的 $s,t\in[1,2]$ 与 $d,l\in Z$, 置

$$J_{d,l}^{s,t}(f)(x,y)=\left(\sum_{j,k\in Z}\left|\tau_{j,k;\lambda_1,\lambda_2}^{\mu;s,t}*((S_{j+d}^1\otimes S_{k+l}^2)f)(x,y)\right|^2\right)^{\frac12},$$

则对于任意 $1<q<p'=p/(p-1)$, 由 (4.17) 式, 可得

$$\left\|M_{P,\mu}^{\lambda_1,\lambda_2}(f)\right\|_p^q\le C\sum_{d,l\in Z}\left(\int_1^2\int_1^2\left\|J_{d,l}^{s,t}(f)\right\|_p^2dsdt\right)^{\frac q2}. \tag{4.22}$$

应用 Plancherel 定理知

$$\|J_{d,l}^{s,t}(f)\|_2^2=\sum_{j,k\in Z}\iint_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n}\left|\widehat{\tau_{j,k;\,\lambda_1,\lambda_2}^{\mu;\,s,t}}(\xi,\eta)\right|^2|\psi_{1,j+d}(\xi)\psi_{2,k+l}(\eta)|^2|\widehat{f}(\xi,\eta)|^2d\xi d\eta.$$

类似于不等式 (4.10)–(4.13) 式的证明, 对于 $s,\,t\in[1,\,2]$ 借助于引理 3, 有

$$\|J_{d,l}^{s,t}(f)\|_2\le C2^{-d\lambda_1-l\lambda_2}\|f\|_2,\qquad d\ge 0,\quad l\ge 0;\tag{4.23}$$

$$\|J_{d,l}^{s,t}(f)\|_2\le C2^{-d\lambda_1-l/(2\log|Q_\mu|)}\|f\|_2,\qquad d\ge 0,\quad l<0;\tag{4.24}$$

$$\|J_{d,l}^{s,t}(f)\|_2\le C2^{-d/(2\log|Q_\mu|)-l\lambda_2}\|f\|_2,\qquad d<0,\quad l\ge 0;\tag{4.25}$$

$$\|J_{d,l}^{s,t}(f)\|_2\le C2^{-d/(2\log|Q_\mu|)-l/(2\log|Q_\mu|)}\|f\|_2,\qquad d<0,\quad l<0.\tag{4.26}$$

又对于 $s,\,t\in[1,\,2]$, 由引理 4 和 Littlewood–Paley 理论可得

$$\|J_{d,l}^{s,t}(f)\|_{p_0}\le C\left\|\left(\sum_{j,k\in Z}\left|(S_{j+d}^1\otimes S_{k+l}^2)f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{p_0}\le C\|f\|_{p_0},\quad 2<p_0<\infty.\tag{4.27}$$

再次引用插值得定理, 从不等式 (4.23)–(4.27) 式可推出: 对于任意 $2<p<\infty$ 与 $0<\theta<1$, 有

$$\|J_{d,l}^{s,t}(f)\|_p\le C2^{-\theta d\lambda_1-\theta l\lambda_2}\|f\|_p,\qquad d\ge 0,\quad l\ge 0;$$

$$\|J_{d,l}^{s,t}(f)\|_p\le C2^{-\theta d\lambda_1-\theta l/(2\log|Q_\mu|)}\|f\|_p,\qquad d\ge 0,\quad l<0;$$

$$\|J_{d,l}^{s,t}(f)\|_p\le C2^{-\theta d/(2\log|Q_\mu|)-\theta l\lambda_2}\|f\|_p,\qquad d<0,\quad l\ge 0;$$

$$\|J_{d,l}^{s,t}(f)\|_p\le C2^{-\theta d/(2\log|Q_\mu|)-\theta l/(2\log|Q_\mu|)}\|f\|_p,\quad d<0,\quad l<0.$$

综合上述不等式和 (4.22) 式, 如情形 1 的讨论便得所要证. 定理 1 (ii) 得证.

定理 1 (iii) 的证明 我们只需对 $\mathscr{M}_I$ 进行证明即可. 借助于 Plancherel 定理易知 $\mathscr{M}_I$ 在 $L^2(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n)$ 有界等价于乘子

$$m(\xi,\,\eta)=\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\left|\iint_{|x|\le s,\,|y|\le t}\frac{\Omega(x',\,y')}{|x|^{m-1}|y|^{n-1}}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}[\xi'\cdot\mathrm{x}+\eta'\cdot\mathrm{y}]}dxdy\right|^2\frac{dsdt}{s^3t^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

为一 L^∞ 函数, 其中 $\xi'=\xi/|\xi|$, $\eta'=\eta/|\eta|$.

不难验证

$$\begin{aligned}m(\xi,\,\eta)^2\ &=\lim_{A_1\to\infty,\,\varepsilon_1\to 0}\ \lim_{A_2\to\infty,\,\varepsilon_2\to 0}\int_{(S^{m-1}\times S^{n-1})^2}\Omega(x',\,y')\overline{\Omega(z',\,w')}\\&\quad\times\int_{([0,\,1]\times[0,\,1])^2}\left(\int_{\varepsilon_1}^{A_1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}s\xi'\cdot(\mathrm{r}_1\mathrm{x}'-\rho_1\mathrm{z}')}\frac{ds}{s}\right)\\&\quad\times\left(\int_{\varepsilon_2}^{A_2}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}t\eta'\cdot(\mathrm{r}_2\mathrm{y}'-\rho_2\mathrm{w}')}\frac{dt}{t}\right)dr_1d\rho_1dr_2d\rho_2dx'dy'dz'dw'.\end{aligned}$$

注意到当 $A\longrightarrow\infty$ 和 $\varepsilon\longrightarrow 0$ 时

$$\int_\varepsilon^A(\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\gamma\varsigma'\cdot(\alpha\mathrm{u}-\beta\mathrm{v})}-\cos(2\pi\gamma))\frac{d\gamma}{\gamma}\longrightarrow\log|\varsigma'\cdot(\alpha u-\beta v)|^{-1}-i\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\varsigma'\cdot(\alpha u-\beta v)),$$

且此积分被 $C(\log|\varsigma'\cdot(\alpha u-\beta v)|)$ 所控制, 其中 C 与 ε 和 A 无关. 于是由 (1.1) 式和 Lebesgue 控制收敛定理, 得

$$\begin{aligned}m(\xi,\eta)^2=&\iint_{(S^{m-1}\times S^{n-1})^2}\iint_{([0,1]\times[0,1])^2}\Omega(x',y')\overline{\Omega(z',w')}\\&\times\left[\log|\xi'\cdot(r_1x'-\rho_1z')|^{-1}-i\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\xi'\cdot(r_1x'-\rho_1z'))\right]\\&\times\left[\log|\eta'\cdot(r_2y'-\rho_2w')|^{-1}-i\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\eta'\cdot(r_2y'-\rho_2w'))\right]\\&\times dr_1d\rho_1dr_2d\rho_2dx'dy'dz'dw'.\end{aligned}$$

因此, 若 Ω 是一实值函数, 则结合 (1.1) 式通过简单计算可得

$$\begin{aligned}m(\xi,\eta)^2=&\iint_{(S^{m-1}\times S^{n-1})^2}\Omega(x',y')\Omega(z',w')\\&\times\left[\left(\frac{\xi'\cdot x'}{\xi'\cdot z'}-1\right)\log|\xi'\cdot(x'-z')|-\frac{\xi'\cdot x'}{\xi'\cdot z'}\log|\xi'\cdot x'|\right]\\&\times\left[\left(\frac{\eta'\cdot y'}{\eta'\cdot w'}-1\right)\log|\eta'\cdot(y'-w')|-\frac{\eta'\cdot y'}{\eta'\cdot w'}\log|\eta'\cdot y'|\right]dx'dy'dz'dw'.\end{aligned}\tag{4.28}$$

下面证明 (iii). 为简单起见, 我们仅对 $m=n=2$ 和 $q=\infty$ 情形来构造所需要的 Ω, 其它情形稍作修改即得. 此外, 用 $[-1,1]\times[-1,1]$ 代替 $S^1\times S^1$. 对于 $(u,v)\in[-1,1]\times[-1,1]$, 置

$$\Omega(u,v)=C_1b_1(u,v)+\sum_{k=2}^{\infty}C_kb_k(u,v),\tag{4.29}$$

其中

$$C_1=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(\log k)^2},\quad b_1(u,v)=-\chi_{[-1,0]\times[-1,0]}(u,v),\quad C_k=\frac{1}{(k+1)(\log k)^2},$$
$$b_k(u,v)=|D_k|^{-2}\chi_{D_k\times D_k}(u,v),\ D_k=\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right)\ \text{for } k\geq 2,$$

则 Ω 满足我们的要求. 确切地说, Ω 满足下列性质

$$\iint_{[-1,1]\times[-1,1]}\Omega(u,v)dudv=0;\tag{4.30}$$

$$\Omega\in B_{\infty}^{0,\nu}([-1,1]\times[-1,1]),\quad -1<\nu<0;\tag{4.31}$$

$$\Omega\notin B_{\infty}^{0,0}([-1,1]\times[-1,1]);\tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}T_1=&\iint_{([0,1]\times[0,1])^2}\Omega(u,v)\Omega(w,z)\left[\left(1-\frac{u}{w}\right)\log|u-w|^{-1}+\left(\frac{u}{w}\right)\log|u|^{-1}\right]\\&\times\left[\left(1-\frac{v}{z}\right)\log|v-z|^{-1}+\left(\frac{v}{z}\right)\log|v|^{-1}\right]dudvdwdz=\infty;\end{aligned}\tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}T_2=&\iint_{([-1,1]\times[-1,1])^2\setminus([0,1]\times[0,1])^2}\Big|\Omega(u,v)\Omega(w,z)\\&\times\left[\left(1-\frac{u}{w}\right)\log|u-w|^{-1}+\left(\frac{u}{w}\right)\log|u|^{-1}\right]\\&\times\left[\left(1-\frac{v}{z}\right)\log|v-z|^{-1}+\left(\frac{v}{z}\right)\log|v|^{-1}\right]\Big|dudvdwdz<\infty.\end{aligned}\tag{4.34}$$

直接计算可得 (4.30)–(4.32) 式. 另外, 类似于文 [?] 中 (4.6) 与 (4.7) 式的证明 (见文 [?, 706–708 页]), 我们容易验证 (4.33) 与 (4.34) 式成立. 在此省略其细节. 定理 1 证毕.

参 考 文 献

[1] Stein E. M., On the function of Littlewood-Paley, Lusin and Marcinkiewicz, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1958, **88**: 436–466.

[2] Chen J. C., Ding Y., Fan D. S., L^p boundedness of rough Marcinkiewicz integral on product spaces, *Chinese of Contem. Math.*, 2000, **21**(1): 47–54.

[3] Ding Y., L^2 boundedness of Marcinkiewicz integral with rough kernel, *Hokkaido Math. J.*, 1998, **27**: 105–115.

[4] Chen J. C., Fan D. S., Ying Y. M., Rough Marcinkiewicz integrals with $L(\log^+ L)^2$ kernels on product spaces, *Adv. in Math.*, 2001, **30**(2): 179–181 (in Chinese).

[5] Choi Y., Marcinkiewicz integrals with rough homogeneous kernel of degree zero on product domains, *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, **261**: 53–60.

[6] Chen J. C., Fan D. S., Ying Y. M., The method of rotation and Marcinkiewicz integrals on product domains, *Studia Math.*, 2002, **153**(1): 41–58.

[7] Ding Y., Fan D. S., Pan Y. B., Marcinkiewicz integrals with rough kernels on product spaces, *Yokohama Math. J.*, 2001, **49**: 1–15.

[8] Wu H. X., L^2 boundedness of a parametric Marcinkiewicz integral related to block spaces on product spaces, *J. Beijing Normal Univ.* (Natural Sci.), 2003, **39**(2): 147–152 (in Chinese).

[9] Hu G. E., Lu S. Z., Yan D. Y., $L^p(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$ boundedness for the Marcinkiewicz integral on product spaces, *Science in China, Ser. A*, 2003, **46**(1): 75–82.

[10] Jiang Y. S., Lu S. Z., A class of singular integral operators with rough kernels on product domain, *Hokkaido Math. J.*, 1995, **24**: 1–7.

[11] Keitoku M., Sato S., Block spaces on the unit sphere in $\mathbb{R}$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1993, **119**: 453–455.

[12] Wu H. X., L^p boundedness for a class of rough singular integral operators on product domains, *J. Beijing Normal Univ.* (Natural Sci.), 2002, **38**(4): 432–439 (in Chinese).

[13] Al-Qassem H. M., Al-Salman A. J., A note on Marcinkiewicz integral operators, *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, **282**: 698–710.

[14] Stein E. M., Problems in harmonic analysis related to curvature and oscillatory integrals, *Proc. Internat. Congr. Math., Berkeley*, 1986, 196–221.

[15] Stein E. M., Some geometrical concepts arising in harmonic analysis, *Geom. and Funct. Anal. Special Vol.*, 2000, 434–453.

[16] Wu H. X., General Littlewood-Paley functions and singular integral operators on product spaces, *Math. Nachr.*, to appear.

[17] Ying Y. M., Chen J. C., L^p boundedness of a class of singular integral on product domians, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2003, **46**(5): 833–842.

[18] Chen J. C., Ding Y., Fan D. S., Certain square functions on product spaces, *Math. Nachr.*, 2001, **230**: 5–18.

[19] Ying Y. M., Investigations on some operators with rough kernels in harmonic analysis, *Ph. D. Thesis, Zhejiang Univ., Hangzhou*, 2002 (in Chinese).

[20] Duoandikoetxea J., Multiple singular integrals and maximal functions along hypersurfaces, *Ann. Inst. Fourier, Gronble*, 1986, **36**(4): 185–206.

[21] Taibleson M. H., Weiss G., Certain function spaces associated with a.e. convergence of Fourier series, in *Univ. of Chicago Conf. in honor of Zygmund, Woodsworth*, 1983, Vol.I, 95–113.

[22] Meyer Y., Taibleson M. H., Weiss G., Some functional analytic properties of the space B_q generated by blocks, *Indiana Univ. Math. J.*, 1985, **34**: 493–515.

[23] Soria F., Characterizations of class of functions generated by blocks and associated Hardy spaces, *Indiana Univ. Math. J.*, 1985, **34**: 463–492.

[24] Long R. L., The spaces generated by blocks, *Sci. Sinica, Ser. A*, 1984, **27**: 16–26.

[25] Lu S. Z., On block decomposition of functions, *Sci. Sinica, Ser. A*, 1984, **27**: 585–596.

[26] Lu S. Z., Taibleson M. H., Weiss G., *Spaces Generated by Blocks*, Beijing: Beijing Normal University Press, 1989.

[27] Stein E. M., Harmonic Analysis: Real-variable Methods, Orthogonality And Oscillatory Integral, *Princeton Univ. Press, Princeton, NJ*, 1993.

[28] Stein E. M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, *Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey*, 1970.