2009,**29A**(3):553–563

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

齐型空间上的分数次积分交换子的加权弱型估计 *

[1,2] 王卫红 [1] 伍火熊 **

([1] 厦门大学数学科学学院 福建厦门 361005; [2] 汕头大学数学系 广东汕头 515063)

摘要：在齐型空间上，建立了关于分数次积分算子与 BMO 函数生成的交换子的加权弱型端点估计，并运用此估计式得到交换子的一个双权弱型估计.

关键词：齐型空间；分数次积分；交换子；加权弱型估计.

MR(2000) 主题分类：42B20; 42B25; 42B99 **中图分类号**：O177.6 **文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2009)03-553-11

1 引言

设 $\mathcal{X}$ 为一集合，赋予其正的 Borel 正则测度 μ 以及拟距离 d, 满足球 $B(x,r)=\{y\in\mathcal{X}: d(x,y)<r\}$ 为开集，并对 $\mathcal{X}$ 中任何 x,y 和 z, 存在常数 $\kappa\geq 1$ 使得

$$d(x,y)\leq\kappa(d(x,z)+d(z,y)). \tag{1.1}$$

在 Coifman 和 Weiss[1] 意义下称 $(\mathcal{X},d,\mu)$ 为齐型空间，如果测度 μ 满足如下二倍条件：存在常数 $C\geq 1$ 使得对于所有 $x\in\mathcal{X}$ 和 $r>0$, 有

$$0<\mu(B(x,2r))\leq C\mu(B(x,r))<\infty. \tag{1.2}$$

再者，设 C 是满足二倍条件的最小常数，则称 $D=\log_2 C$ 为 μ 的二倍阶，我们有

$$\frac{\mu(B_1)}{\mu(B_2)}\leq C_\mu\left(\frac{r_{B_1}}{r_{B_2}}\right)^D \tag{1.3}$$

对于所有的球 $B_2\subset B_1\subset\mathcal{X}$ 都成立，其中 r_{B_i} 表示球 B_i 的半径， $i=1,2$. 对于 $0<\gamma<1$, 定义分数次积分算子 I_γ

$$I_\gamma f(x)=\int_{\mathcal{X}}K_\gamma(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\mu(y),\ 0<\gamma<1,$$

其中

$$K_\gamma(x,y)=\begin{cases}\Big\{\mu(B(x,d(x,y)))\Big\}^{\gamma-1}, & x\neq y;\\ \{\mu(x)\}^{\gamma-1}, & x=y\quad 且\quad \mu(x)>0.\end{cases}$$

收稿日期：2007-11-22; 修订日期：2009-03-11

E-mail: wangwhzk@sohu.com; huoxwu@xmu.edu.cn

* 基金项目：国家自然科学基金 (10571122, 10771054) 资助

** 通讯作者

注意到函数

$$\rho(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\Big\{\mu(B(x,\,d(x,\,y)))+\mu(B(y,\,d(x,\,y)))\Big\}, & x\neq y;\\ 0, & x=y\end{cases}$$

是 $\mathcal{X}$ 上的拟距离，由 Macías 及 Segovia[4] 结论可知，存在与 ρ 等价的拟距离 η, 使得

$$|\eta(x,\,y)-\eta(z,\,y)|\leq C\eta(x,\,z)^{\theta}\left(\eta(x,\,y)+\eta(z,\,y)\right)^{1-\theta}. \tag{1.4}$$

利用 η, 定义核

$$Q_\gamma(x,y)=\begin{cases}\{\eta(x,y)\}^{\gamma-1}, & x\neq y;\\ \{\mu(x)\}^{\gamma-1}, & x=y \ \text{ 且 } \ \mu(x)>0.\end{cases}$$

显然，存在某个常数 $C>1$, 有

$$C^{-1}K_\gamma(x,\,y)\leq Q(x,\,y)\leq CK_\gamma(x,\,y).$$

因此，可以视算子 I_γ 为

$$I_\gamma f(x)=\int_{\mathcal{X}}Q_\gamma(x,\,y)f(y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

已知 I_γ 是从 $L^1(\mathcal{X})$ 到 $L^{1/(1-\gamma),\infty}(\mathcal{X})$ 的有界算子，取 $p\in(1,\,1/\gamma)$ 及 $1/q=1/p-\gamma$, 则 I_γ 是从 $L^p(\mathcal{X})$ 到 $L^q(\mathcal{X})$ 的有界算子. 关于算子 I_γ 的加权估计，Pérez 和 Wheeden 证明了，当取定 $1<p<\infty$, 则存在常数 $C>0$, 使得对任意 ω 有

$$\int_{\mathcal{X}}|I_\gamma f(x)|^p\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\leq C\int_{\mathcal{X}}|f(x)|^pM_{\gamma p}(M^{[p]}\omega)(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

我们规定权 ω 是指非负局部可积函数，$[p]$ 表示不超过 p 的最大整数，M 是标准的 Hardy-Littlewood 极大算子，而对于任意正数 p, $M^{[p]}$ 表示算子 M 叠代 $[p]$ 次，令 $\beta\in(0,\,1)$, 定义分数次极大算子 M_β 为

$$M_\beta f(x)=\sup_{B\ni x}\mu(B)^{\beta-1}\int_B|f(y)|\,\mathrm{d}\mu(y).$$

对于函数 $b\in\mathrm{BMO}(\mathcal{X})$ 及自然数 m, 我们如下定义分数次积分的 m 阶交换子

$$I^m_{\gamma,b}f(x)=\int_{\mathcal{X}}\left(b(x)-b(y)\right)^mQ_\gamma(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\mu(y),\quad 0<\gamma<1, \tag{1.5}$$

以及

$$\mathcal{I}^m_{\gamma,b}f(x)=\int_{\mathcal{X}}|b(x)-b(y)|^mQ_\gamma(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\mu(y),\quad 0<\gamma<1. \tag{1.6}$$

显然，不等式 $|I^m_{\gamma,b}f(x)|\leq\mathcal{I}^m_{\gamma,b}(|f|)(x)$ 对于任何 $f\geq 0$ 都成立. 对于交换子的加一般权的不等式，已由 Bernardis, Hartzstein 及 Pradolini 在文献 [2] 中得到.

定理 A 设 $(\mathcal{X},d,\mu)$ 为齐型空间，ω 为 $\mathcal{X}$ 中任意权，$0<\gamma<1$, $1<p<\infty$ 以及 $m\in N\cup\{0\}$. 若 $b\in\mathrm{BMO}(\mathcal{X})$, 则存在常数 C, 使得

$$\int_{\mathcal{X}}\left|\mathcal{I}^m_{\gamma,b}f(x)\right|^p\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\leq C\|b\|^{mp}_{\mathrm{BMO}}\int_{\mathcal{X}}|f(x)|^pM_{\gamma p}(M^{[(m+1)p]}\omega)(x)\,\mathrm{d}\mu(x). \tag{1.7}$$

本文我们将建立下列主要定理.

定理 1.1 在定理 A 的条件下，存在 $\delta>1$ 且 $\gamma\delta<1$, 使得对于任何具有有界支集的有界函数 f 及 $\lambda>0$, 满足

$$\omega\left(\{x\in\mathcal{X}:|I^m_{\gamma,b}f(x)|>\lambda\}\right)\le C\int_{\mathcal{X}}\frac{|f(x)|}{\lambda}\log^m\left(\mathrm{e}+\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)M_{\gamma\delta}(M^{[m+1]}\omega)(x)\mathrm{d}\mu(x),\quad(1.8)$$

其中常数 C 只与 m,δ,γ 有关.

作为定理 1.1 的应用，我们可以得到 $I^m_{\gamma,b}$ 的加双权弱型估计.

定理 1.2 在定理 A 的条件下，设 $1<p\le q<\infty$, $0<\gamma<1$, (u,v) 为满足如下条件的双权

$$\{\mu(B)\}^{\gamma\delta+1/p'-1/q'}\|u\|_{\Psi,B}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B v(x)^{1-p'}\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p'}\le C,\quad(1.9)$$

其中 $\Psi(t)=t^q\log^{(m+2)q-1+\eta}(\mathrm{e}+t)$, 范数 $\|\cdot\|_{\Psi,B}$ 如第二节定义. 则

$$u\left(\{x\in\mathcal{X}:I_{\gamma,b}f(x)>\lambda\}\right)\le C\left(\int_{\mathcal{X}}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^p\log^p\left(\mathrm{e}+\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)v(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{q/p}.\quad(1.10)$$

我们作如下约定，字母 C 表示与本质变量无关的正常数，在不同的位置其值可以不同. 带有下标的字母如 C_1, 则表示一个不变的常数. 对于可测集 E 及权 ω, 我们用 χ_E 表示 E 上的特征函数， $\omega(E)=\int_E\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$. 给定 λ 及球 B, r_B 表示球 B 的半径， λB 表示与球 B 同心，半径是球 B 的 λ 倍的球. 固定 $p>0$, p' 表示 p 的对偶指数，即， $p'=p/(p-1)$. 对于 $\mathcal{X}$ 上的一个局部可积函数 f 及有界的可测集 E, $m_E(f)$ 表示 f 在 E 上的平均，即

$$m_E(f)=\frac{1}{\mu(E)}\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

2 定理 1.1 的证明

首先回顾 Young 函数的概念. 一个函数 $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 被称作 Young 函数，如果它是连续的，凸的递增函数，满足 $\Phi(0)=0$ 及 $\Phi(t)\to\infty(\,t\to\infty)$. Young 函数 ϕ 的补函数定义为

$$\widetilde{\Phi}(s)=\sup_{0\le t<\infty}[st-\Phi(t)],\qquad 0\le s<\infty.$$

给定一个 Young 函数 ϕ 和一个球 B, 定义可测函数 f 在 B 上的平均 Luxemburg 模为

$$\|f\|_{\Phi,B}=\inf\left\{\lambda>0:\ \frac{1}{\mu(B)}\int_B\Phi\left(|f(x)|/\lambda\right)\mathrm{d}\mu(x)\le 1\right\}.$$

关于 $\|f\|_{\Phi,B}$ 及 $0<\gamma<1$, 我们定义极大算子 M_Φ

$$M_\Phi f(x)=\sup_{B\ni x}\|f\|_{\Phi,B},$$

分数次极大算子 $M_{\Phi,\gamma}$

$$M_{\Phi,\gamma}f(x)=\sup_{B\ni x}\mu(B)^\gamma\|f\|_{\Phi,B},$$

其中对所有包含 x 的球 B 取上确界. 本文中我们取 $\Phi(t)=t\log(\mathrm{e}+t)$, 其补函数为 $\widetilde{\Phi}(t)\approx\mathrm{e}^t-t-1$. 记

$$\|f\|_{L\log L,B}=\|f\|_{\Phi,B},\qquad\|f\|_{\exp L,B}=\|f\|_{\widetilde{\Phi},B}.$$

我们将用到广义 Hölder 不等式

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f(y)g(y)|\mathrm{d}\mu(y) \le \|f\|_{\Phi,B}\|g\|_{\tilde{\Phi},B} \tag{2.1}$$

及如下事实 (见文献 [2, 引理 4.1])

$$M_{L\log L,\gamma}f(x)\approx M_\gamma Mf(x), \qquad M_{L\log L}f(x)\approx M^2f(x). \tag{2.2}$$

如果二倍 Young 函数 Φ 满足 B_p $(1<p<\infty)$ 条件, 即, 存在正常数 C 使得

$$\int_c^\infty \frac{\Phi(t)}{t^p}\frac{\mathrm{d}t}{t}\approx\int_c^\infty\left(\frac{t^{p'}}{\tilde{\Phi}(t)}\right)^{p-1}\frac{\mathrm{d}t}{t}<\infty,$$

则 M_Φ 是 $L^p(\mathcal{X})$ 有界的 [6]. 存在一个广义 Hölder 不等式 [5], 即, 如果 Φ, Ψ 和 Θ 是 Young 函数, 满足对任意 $t\in[0,\infty)$, $\Psi^{-1}(t)\Theta^{-1}(t)\le\Phi^{-1}(t)$, 则

$$\|fg\|_{\Phi,B}\le C\|f\|_{\Psi,B}\|g\|_{\Theta,B}.$$

为证明定理 1.1, 我们先介绍两个预备定理.

引理 2.1[1] 设 $(\mathcal{X},d,\mu)$ 是齐型空间, f 是非负可积函数. 则对每个 $\lambda\ge m_{\mathcal{X}}(f)$ (若 $\mu(\mathcal{X})=\infty$, 则 $m_{\mathcal{X}}(f)=0$), 存在互不相交的球列 $\{B_j\}_{j\ge1}$ 及常数 $C_1\ge1$ 使得

$$m_{C_1B_j}(f)\le\lambda<m_{B_j}(f), \tag{2.3}$$

以及 $m_B(f)\le\lambda$ 对于每个中心在 $x\in\mathcal{X}\setminus\bigcup_j C_1B_j$ 的球 B 成立.

引理 2.2[8] 设 $0<\gamma<1$ 及 $\delta>0$, 则对于任何权 ω 及具有有界支集的有界函数, 有

$$\|I_\gamma f\|_{L^{1,\infty}(\omega)}\le C\int_{\mathcal{X}}|f(x)|M_\gamma(M_{L(\log L)^\delta}\omega)(x)\,\mathrm{d}\mu(x). \tag{2.4}$$

下面我们给出定理 1.1 的证明.

定理 1.1 的证明 我们只考虑 $m=1$ 的情况, 当 $m\ge2$ 时, 可以应用与 $m=1$ 情形相同的证法结合数学归纳法来证明. 令 $m_{\mathcal{X}}(f)=\mu(\mathcal{X})^{-1}\int_{\mathcal{X}}|f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)$. 若 $\mu(\mathcal{X})<\infty$ 及 $\lambda\le m_{\mathcal{X}}(f)$, 不等式 (1.8) 容易验证. 故只要考虑 $\lambda>m_{\mathcal{X}}(f)$ 的情形. 不失一般性, 我们假设 $\|b\|_{\mathrm{BMO}}=1$. 由引理 2.1, 我们得到互不相交的球列 $\{B_j\}_{j\ge1}$. 令

$$V_1=C_1B_1\setminus\bigcup_{j\ge2}B_j,\quad V_j=C_1B_j\setminus\left[\bigcup_{n=1}^{j-1}V_n\bigcup_{n\ge j+1}B_n\right].$$

于是有

$$B_j\subset V_j\subset C_1B_j,\quad \bigcup_j V_j=\bigcup_j C_1B_j.$$

分解 f

$$f(x)=g(x)+h(x)=g(x)+\sum_j h_j(x),$$

其中

$$g(x)=f(x)\chi_{\mathcal{X}\setminus\bigcup_j V_j}(x)+\sum_j m_{V_j}(f)\chi_{V_j}(x),$$

$$h_j(x) = \big(f(x) - m_{V_j}(f)\big)\,\chi_{V_j}(x).$$

由引理 2.1 可得，对于任何固定的 j

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(V_j)}\int_{V_j}|f(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) &\le \frac{\mu(C_1B_j)}{\mu(V_j)}\cdot\frac{1}{\mu(C_1B_j)}\int_{C_1B_j}|f(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\\ &\le \lambda\frac{\mu(C_1B_j)}{\mu(V_j)} \le \lambda C_\mu\left(\frac{r_{C_1B_j}}{r_{V_j}}\right)^D \le \lambda C_\mu\left(\frac{r_{C_1B_j}}{r_{B_j}}\right)^D = C\lambda,\end{aligned}$$

其中第三个不等式运用了 (1.3) 式. 设 $B_j^* = \kappa(4\kappa^2+1)B_j = C_*B_j$, 由不等式 (1.3) 和 (2.3) 可知

$$\begin{aligned}\omega\Big(\bigcup_j B_j^*\Big) &\le C\sum_j \frac{\omega(B_j^*)}{\mu(B_j^*)}\mu(B_j) \le C\sum_j \inf_{x\in B_j} M\omega(x)\mu(B_j)\\ &\le C\sum_j \inf_{x\in B_j} M\omega(x)\frac{1}{\lambda}\int_{B_j}|f(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\\ &\le C\lambda^{-1}\sum_j\int_{B_j}|f(y)|M\omega(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\\ &\le C\lambda^{-1}\int_{\mathcal{X}}|f(y)|M\omega(y)\,\mathrm{d}\mu(y).\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}\omega\Big(\Big\{x\in\mathcal{X}:\ |I_{\gamma,b}f(x)|>\lambda\Big\}\Big) &\le \omega\Big(\Big\{x\in\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*:\ |I_{\gamma,b}g(x)|>\lambda/2\Big\}\Big)+\omega\Big(\bigcup_j B_j^*\Big)\\ &\quad+\omega\Big(\Big\{x\in\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*:\ |I_{\gamma,b}h(x)|>\lambda/2\Big\}\Big).\end{aligned}$$

于是对 (1.8) 式的证明可转化为证明

$$\begin{aligned}&\omega\Big(\Big\{x\in\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*:|I_{\gamma,b}g(x)|>\frac{\lambda}{2}\Big\}\Big)\\ &\le C\int_{\mathcal{X}}\frac{|f(x)|}{\lambda}\log(\mathrm{e}+\frac{|f(x)|}{\lambda})M_{\gamma\delta}(M^2\omega)(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}\tag{2.5}$$

及

$$\begin{aligned}&\omega\Big(\Big\{x\in\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*:|I_{\gamma,b}h(x)|>\frac{\lambda}{2}\Big\}\Big)\\ &\le C\int_{\mathcal{X}}\frac{|f(x)|}{\lambda}\log(\mathrm{e}+\frac{|f(x)|}{\lambda})M_{\gamma\delta}(M^2\omega)(x)\,\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}\tag{2.6}$$

先证 (2.5) 式，由于 μ 是正则的且连续函数在 $L^p(\mathcal{X})$ $p\in[1,\infty)$ 中稠密. 引理 2.1 及 Lebesgue 微分原理可推得 $\|g\|_{L^\infty(\mathcal{X})}\le C\lambda$. 选取 $1<p<1/\gamma$ 使得 $[2p]=2$, 由定理 A, 有

$$\begin{aligned}&\omega\Big(\Big\{x\in\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*:\ |I_{\gamma,b}g(x)|>\frac{\lambda}{2}\Big\}\Big)\\ &\le C\int_{\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*}\frac{|I_{\gamma,b}g(x)|^p}{\lambda^p}\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C\lambda^{-p}\int_{\mathcal{X}} |I_{\gamma,b}g(x)|^p \omega(x)\chi_{\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&\le C\lambda^{-p}\int_{\mathcal{X}} |g(x)|^p M_{\gamma p}(M^2\omega\chi_{\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*})(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&\le C\lambda^{-1}\int_{\mathcal{X}} |g(x)| M_{\gamma p}\left(M^2\omega\chi_{\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*}\right)(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&\le C\lambda^{-1}\Big(\int_{\mathcal{X}\setminus\bigcup_j V_j} |f(x)| M_{\gamma p}(M^2\omega)(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&\quad +\sum_j\int_{V_j} m_{V_j}(f)(x) M_{\gamma p}(M^2\omega\chi_{\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*})(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big),
\end{aligned}
$$

与文献 [3] 在欧氏空间中的讨论类似, 我们可以证明存在只与空间 $\mathcal{X}$ 有关的常数 C 使得对任意 $x\in V_j$, 有

$$
M_{\gamma p}(M^2\omega\chi_{\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*})(x)\le C\inf_{y\in V_j} M_{\gamma p}(M^2\omega\chi_{\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*})(y).
$$

这样

$$
\begin{aligned}
&\int_{V_j} m_{V_j}(f)(x) M_{\gamma p}(M^2\omega\chi_{\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*})(x)\mathrm{d}\mu(x)\\
&\le \inf_{y\in V_j} M_{\gamma p}(M^2\omega\chi_{\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*})(y)\int_{V_j} m_{V_j}(f)(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&\le \inf_{y\in V_j} M_{\gamma p}(M^2\omega\chi_{\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*})(y)\int_{V_j} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&\le \int_{V_j} |f(x)| M_{\gamma p}(M^2\omega)(x)\,\mathrm{d}\mu(x).
\end{aligned}
$$

不等式 (2.5) 得证. 接下来证明 (2.6) 式. 记 $b_j=\mu(B_j)^{-1}\int_{B_j} b(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$, 直接计算可得

$$
I_{\gamma,b}h(x)=\sum_j (b(x)-b_j)I_\gamma(h_j)(x)-I_\gamma\Big(\sum_j (b-b_j)h_j\Big)(x).
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\omega\Big(\Big\{x\in\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*:\ |I_{\gamma,b}h(x)|>\frac{\lambda}{2}\Big\}\Big)\\
&\le \omega\Big(\Big\{x\in\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*:\ \Big|I_\gamma\Big(\sum_j (b-b_j)h_j\Big)(x)\Big|>\frac{\lambda}{4}\Big\}\Big)\\
&\quad +\omega\Big(\Big\{x\in\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*:\sum_j |b(x)-b_j||I_\gamma h_j(x)|>\frac{\lambda}{4}\Big\}\Big)\\
&:=\mathrm{I}+\mathrm{II}.
\end{aligned}
$$

为估计第一项, 我们将运用广义 Hölder 不等式 (2.1), 根据引理 2.2 及 (2.2) 式, 可知, 对于任意权 ω, 有

$$
\|I_\gamma(f)\|_{L^{1,\infty}(\omega)}\le C\int_{\mathcal{X}} |f(x)| M_\gamma(M^2\omega)(x)\,\mathrm{d}\mu(x).
$$

于是

$$\mathrm{I} \le C\lambda^{-1} \int_{\mathcal{X}} \sum_j |b(x) - b_j||h_j(x)| M_\gamma(M^2\omega\chi_{\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*})(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

$$\le C\lambda^{-1} \sum_j \mu(V_j)\|h_j\|_{L\log L, V_j}\|b - b_j\|_{\exp L, V_j} \inf_{y\in V_j} M_\gamma(M^2\omega\chi_{\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*})(y).$$

由以下事实

$$\|h_j(x)\|_{L\log L, V_j} \le C\inf\left\{t + \frac{t}{\mu(V_j)}\int_{V_j} \frac{|f(x)|}{t}\log\left(\mathrm{e} + \frac{|f(x)|}{t}\right)\mathrm{d}\mu(x)\right\}$$

$$\le C\lambda + \frac{C}{\mu(V_j)}\int_{V_j} |f(x)|\log\left(\mathrm{e} + \frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\mathrm{d}\mu(x)$$

可得

$$\mathrm{I} \le C\lambda^{-1}\sum_j \inf_{x\in V_j} M_\gamma(M^2\omega\chi_{\mathcal{X}\setminus\bigcup_j B_j^*})(y)\left(\lambda\mu(V_j) + \int_{V_j}|f(x)|\log\left(\mathrm{e} + \frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\mathrm{d}\mu(x)\right)$$

$$\le C\int_{\mathcal{X}} \frac{|f(x)|}{\lambda}\log\left(\mathrm{e} + \frac{|f(x)|}{\lambda}\right) M_\gamma(M^2\omega)(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

此处利用了 John-Nirenberg 不等式的一个推论

$$\|b - b_j\|_{\exp L, V_j} \le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}.$$

为估计第二项 II, 首先注意到 [2]

$$|Q_\gamma(x,y) - Q_\gamma(x,x_j)| \le C\frac{\mu(B_j)^\theta}{\mu(B(z, d(z,x)))^{1-\gamma+\theta}}$$

对于所有 $y, x_j \in B_j$, $x \in \mathcal{X}\setminus B_j^*$ 都成立，其中 z 是球 B_j 的中心， C 与 B_j 无关. 如果我们能证明如下事实

$$\int_{\mathcal{X}\setminus B_j^*} |b(x) - b_j|\frac{\mu(B_j)^\theta}{\mu(B(z, d(z,x)))^{1-\gamma+\theta}}\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \le C\inf_{y\in B_j} M_{L\log L,\gamma}\omega(y), \tag{2.7}$$

那么

$$\int_{\mathcal{X}\setminus B_j^*} |(b(x) - b_j)I_\gamma h_j(x)\omega(x)|\,\mathrm{d}\mu(x)$$

$$= \int_{\mathcal{X}\setminus B_j^*} |b(x) - b_j|\left|\int_{B_j} Q_\gamma(x,y)h_j(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right|\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

$$\le \int_{\mathcal{X}\setminus B_j^*} |b(x) - b_j|\int_{B_j} |Q_\gamma(x,y) - Q_\gamma(x,x_j)||h_j(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\,\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

$$\le \int_{B_j} |h_j(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\int_{\mathcal{X}\setminus B_j^*} |b(x) - b_j||Q_\gamma(x,y) - Q_\gamma(x,x_j)|\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

$$\le \int_{B_j} |h_j(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\inf_{y\in B_j} M_{L\log L,\gamma}\omega(y)$$

$$\le C\int_{V_j} |f(y)|M_{L\log L,\gamma}\omega(y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

所以

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &\leq \sum_j \frac{C}{\lambda} \int_{\mathcal{X}\setminus B_j^*} |(b(x)-b_j) I_\gamma h_j(x)| \omega(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &\leq \sum_j \frac{C}{\lambda} \int_{V_j} |f(y)| M_{L\log L,\gamma}\omega(y)\, \mathrm{d}\mu(y) \\ &\leq C\lambda^{-1} \int_{\mathcal{X}} |f(x)| M_{L\log L,\gamma}\omega(x)\, \mathrm{d}\mu(x). \end{aligned}$$

结合第一项 I 和第二项 II 的估计，以及 (2.2) 式，得到不等式 (2.6). 于是定理 1.1 得证. 最后我们来证明 (2.7) 式，我们使用的方法来自于文献 [2, 引理 5.1] 的证明. 对于每个取定的 $x \in \mathcal{X}$ 及 $\gamma > 0$, 令

$$E(x, r) = \{y \in \mathcal{X} : \mu(\bar{B}(x, d(x, y))) \leq r\},$$

以及

$$R_r^x = \sup_{y \in E(x, r)} d(x, y),$$

其中

$$\bar{B}(x, R) = \{y \in \mathcal{X} : d(x, y) \leq R\}.$$

考虑如下两种情形

情形 I $\mu(B_j^* \setminus B_j) \neq 0$. 设

$$R_0 = \mu(B_j),\ E_i(z) = E(z, 2^i R_0),\ B_i = B(z, R^z_{2^{i+1}R_0}).$$

文献 [2] 中指出

$$\mu(B_i) \leq C 2^{i+1} R_0,\ \mu(B(z, d(z, x))) \geq C 2^i R_0 \geq C\mu(2B_i),\ 若\ x \notin E_i(z).$$

于是

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{X}\setminus B_j^*} |b(x)-b_j| \frac{\mu(B_j)^\theta}{\mu(B(z, d(z, x)))^{1-\gamma+\theta}} \omega(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &\leq C\mu(B_j)^\theta \int_{\mathcal{X}\setminus E_0(z)} \frac{|b(x)-b_j|\omega(x)}{\mu(B(z, d(z, x)))^{1-\gamma+\theta}}\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &\leq C\mu(B_j)^\theta \sum_{i=0}^\infty \int_{E_{i+1}(z)\setminus E_i(z)} \frac{|b(x)-b_j|\omega(x)}{\mu(B(z, d(z, x)))^{1-\gamma+\theta}}\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &\leq C\mu(B_j)^\theta \sum_{i=0}^\infty \frac{(2^i R_0)^{-\theta}}{\mu(2B_i)^{1-\gamma}} \int_{2B_i} |b(x)-b_j|\omega(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= C \sum_{i=0}^\infty 2^{-i\theta} \frac{\mu(2B_i)^\gamma}{\mu(2B_i)} \int_{2B_i} |b(x)-b_j|\omega(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &\leq C \sum_{i=0}^\infty 2^{-i\theta} \frac{\mu(2B_i)^\gamma}{\mu(2B_i)} \int_{2B_i} |b(x)-m_{2B_i}|\omega(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &\quad + C \sum_{i=0}^\infty 2^{-i\theta} \frac{\mu(2B_i)^\gamma}{\mu(2B_i)} |m_{2B_i}-b_j| \int_{2B_i} \omega(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\sum_{i=0}^{\infty}2^{-i\theta}\mu(2B_i)^{\gamma}\|b-m_{2B_i}\|_{\exp L,2B_i}\|\omega\|_{L\log L,2B_i}+C\sum_{i=0}^{\infty}2^{-i\theta}|m_{2B_i}-b_j|M_{\gamma}\omega(y)\\
&\leq C\sum_{i=0}^{\infty}2^{-i\theta}\Big(M_{L\log L,\gamma}\omega(y)+M_{\gamma}\omega(y)\Big)\\
&\leq C\inf_{y\in 2B_i}M_{L\log L,\gamma}\omega(y),
\end{aligned}
$$

其中在倒数第二个不等式，利用了文献 [2] 中的 (5.13) 式及 (5.14) 式，最后一个不等式由 (2.2) 式得到.

情形 II $\mu(B_j^*\setminus B_j)=0$. 假设 $\mu(\mathcal{X}\setminus B_j^*)\neq 0$, 否则无须证明. 设 n 是使得以下不等式成立的最小正整数

$$\mu((C_*)^nB_j\setminus(C_*)^{n-1}B_j)\neq 0.$$

注意到 $\mu(B_j)=\mu(C_*B_j)=\cdots=\mu((C_*)^{n-1}B_j)$ 所以

$$|b_j-m_{(C_*)^nB_j}(b)|\leq C\|b\|_{\mathrm{BMO},(\mathcal{X})}.$$

这样我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_{C_*B'\setminus B_j^*}|b(x)-b_j|\frac{\mu(B_j)^{\theta}}{\mu(B(z,d(z,x)))^{1-\gamma-\theta}}\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&\leq C\frac{\mu(B_j)^{\theta}}{\mu(B_j^*)^{1-\gamma-\theta}}\left(\int_{C_*B'}|b(x)-m_{C_*B'}(b)|\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)+\mu(C_*B')|m_{C_*B'}(b)-b_j|\right)\\
&\leq C\mu(C_*B')^{\gamma}\|b-m_{C_*B'}(b)\|_{\exp L,\,C_*B'}\|\omega\|_{L\log L,\,C_*B'}\\
&\leq C\inf_{C_*B'}M_{L\log L,\,\gamma}\omega(x),
\end{aligned}
$$

其中 $B'=C_*^{n-1}B_j$, 于是有 $\mu(C_*B'\setminus B')=0$. 由情形 I 的结论，有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{X}\setminus B_j^*}|b(x)-b_j||Q_{\gamma}(x,y)-Q_{\gamma}(x,x_j)|\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&\leq\int_{C_*B'\setminus B_j^*}|b(x)-b_j||Q_{\gamma}(x,y)-Q_{\gamma}(x,x_j)|\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&\quad+\int_{\mathcal{X}\setminus C_*B'}|b(x)-b_j||Q_{\gamma}(x,y)-Q_{\gamma}(x,x_j)|\omega(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\
&\leq C\inf_{y\in B_j}M_{L\log L,\,\gamma}\omega(y).
\end{aligned}
$$

(2.7) 式得证. ∎

3 定理 1.2 的证明

这一节我们将给出定理 1.2 的证明. 先叙述两个引理. 对于每个固定的 $p\in(1,\infty)$, 及 $\eta>0$, 令 $\Phi(t)=t\log^2(\mathrm{e}+t)$, 则

$$
\begin{aligned}
\Phi^{-1}(t)&\approx\frac{t}{\log^2(\mathrm{e}+t)}=\frac{t^{1/p}}{\log^{2+(p-1+\eta)/p}(\mathrm{e}+t)}t^{1/p'}\log^{(p-1+\eta)/p}(\mathrm{e}+t)\\
&=\Psi^{-1}(t)\Theta^{-1}(t),
\end{aligned}
$$

其中

$$\Psi(t) \approx t^p \log^{3p-1+\eta}(\mathrm{e}+t), \qquad \Theta(t) \approx t^{p'} \log^{-1-(p'-1)\eta}(\mathrm{e}+t).$$

引理 3.1[8] 设 $0 \le \gamma < 1$, $\delta > 0$. 存在常数 $C > 0$, 使得对于满足 $M_{L(\log L)^\delta} f$ 局部可积的非负函数 f 及任意 $x \in \mathcal{X}$, 有

$$M_\gamma(M_{L(\log L)^\delta} f)(x) \le C M_{\gamma,\, L(\log L)^{\delta+1}} f(x). \tag{3.1}$$

引理 3.2[8] 给定 $1 < p \le q < \infty$ 及 $0 \le \gamma < 1$. 设 $\Psi^{-1}(t)\Theta^{-1}(t) \le \Phi^{-1}(t)$ 对任意的 $t > 0$ 成立，其中 Φ, Ψ 和 Θ 为 Young 函数，且 Θ 为双倍函数满足 B_p 条件. 双权 (u, v) 满足对任意球 B,

$$[\mu(B)]^{\gamma+1/q-1/p}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B u(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}\|v^{-1/q}\|_{\Psi,\,B} \le C < \infty,$$

则对于函数 $f \in L^p(\mathcal{X}, v)$,

$$\left(\int_{\mathcal{X}} (M_{\gamma,\,\Phi} f(x))^q u(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q} \le C\left(\int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p v(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}. \tag{3.2}$$

定理 1.2 的证明 对于取定的 p 和 q, $1 < p \le q$,

$$\int_{\{x\in\mathcal{X}:\,|I_{\gamma,b}f(x)|>\lambda\}} u(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathcal{X}} \left(u(x)^{1/q}\chi_{\{x\in\mathcal{X}:\,|I_{\gamma,b}f(x)|>\lambda\}}(x)\right)^q \mathrm{d}\mu(x).$$

由对偶原理，存在非负函数 $G \in L^{q'}$, $\|G\|_{q'} = 1$ 使得

$$\begin{aligned}\|u^{1/q}\chi_{\{x\in\mathcal{X}:\,|I_{\gamma,b}f(x)|>\lambda\}}\|_q &= \int_{\mathcal{X}} u(x)^{1/q}\chi_{\{x\in\mathcal{X}:\,|\mathrm{I}_{\gamma,b}f(x)|>\lambda\}}(x)G(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_{\{x\in\mathcal{X}:\,|I_{\gamma,b}f(x)|>\lambda\}} u(x)^{1/q}G(x)\,\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

根据 (2.2) 式及引理 3.1, 有

$$M_{\gamma\delta}(M^2 f)(x) \approx M_{\gamma\delta}(M_{L\log L} f)(x) \le C M_{\gamma\delta,\,L(\log L)^2} f(x).$$

因此，由引理 3.2, 我们得到

$$\|M_{\gamma\delta,\,L(\log L)^2} f\|_{L^{p'}(v^{1-p'})} \le C\|f\|_{L^{q'}(u^{1-q'})}. \tag{3.3}$$

运用定理 1.1, 可得

$$\begin{aligned}&\int_{\{x\in\mathcal{X}:\,|I_{\gamma,b}f(x)|>\lambda\}} (u(x))^{1/q}G(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &\le C\int_{\mathcal{X}} \frac{|f(x)|}{\lambda}\log(\mathrm{e}+\frac{|f(x)|}{\lambda}) M_{\gamma\delta}(M^2(u^{1/q}G))(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= C\int_{\mathcal{X}} \frac{|f(x)|}{\lambda}\log(\mathrm{e}+\frac{|f(x)|}{\lambda}) M_{\gamma\delta,\,L(\log L)^2}(u^{1/q}G)(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &\le C\left(\int_{\mathcal{X}} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\log(\mathrm{e}+\frac{|f(x)|}{\lambda})\right)^p v(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \left(\int_{\mathcal{X}} \left(M_{\gamma\delta,\, L(\log L)^2}(u^{1/q}G)(x)\right)^{p'} v^{-p'/p}\, \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p'}\\
&\le C\left(\int_{\mathcal{X}} \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\log(\mathrm{e}+\frac{|f(x)|}{\lambda})\Big)^{p} v(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} \|G\|_{q'}\\
&= C\left(\int_{\mathcal{X}} \Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\log(\mathrm{e}+\frac{|f(x)|}{\lambda})\Big)^{p} v(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

定理 1.2 证毕. ∎

参 考 文 献

[1] Aimar H. Singular integrals and approximate identities on spaces of homogeneous type. Trans Amer Math Soc, 1985, **292**: 135–153

[2] Bernardis A, Hartzstein S, Pradolini G. Weighted inequalities for commutators of fractional integrals on spaces of homogeneous type. J Math Anal Appl, 2006, **322**: 825–846

[3] Garcia-Cuerva J, Rubio de Francia J L. Weighted Norm Inequalities and Related Topics. North-Holland Math Stud 116. Amsterdam: North-Holland, 1985

[4] Macías R, Segovia C. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type. Adv Math, 1979, **33**: 257–270

[5] O'Neil R. Fractional integration in Orlicz spaces. Trans Amer Math Soc, 1965, **115**: 300–328

[6] Pradolini G, Salinas O. Maximal operators on spaces of homogeneous type. Proc Amer Math Soc, 1995, **71**: 135–157

[7] Pérez C, Wheeden R. Uncertainty principle estimates for vector fields. J Funct Anal, 2001, **181**: 146–188

[8] Hu G, Zhang Q. A weighted weak type estimate for the fractional integral operator on spaces of homogeneous type. Preprint

Weighted Weak Type Estimates for Commutators of Fractional Integrals on Spaces of Homogeneous Type

[1,2]Wang Weihong [1]Wu Huoxiong**

([1]*School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Fujian Xiamen 361005;*
[2]*Department of Mathematics, Shantou University, Guangdong Shantou 515063*)

Abstract: A weighted weak type endpoint estimate is established for the maximal operator associated with the commutator generated by fractional integral operator and BMO function on spaces of homogeneous type. As an application, a two-weight weak type norm inequality for the commutator is obtained.

Key words: Spaces of homogeneous type; Fractional integral; Commutator; Weighted weak type estimate.

MR(2000) Subject Classification: 42B20; 42B25; 42B99