第29卷 第4期 厦门大学学报(自然科学版) Vol.29 No.4
1990年7月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Jul. 1990

两类区间算法的收敛性①

林 群

(统计系)

摘要 对于非线性方程组,本文中推广了 Alefeld 的两种区间 Newton 法,由此可导出各种不同的算法,以便在特定的应用中做出合适的选择.另外,对 Alefeld 提出的问题给出肯定的回答.

关键词 收敛性, 区间算法, 非线性方程组

1 算法

本文中以英文小写字母 i,k,n 表示自然数,以希腊小写字母 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 表示实区间,以上方加"^"的希腊小写字母表示实数,以英文小写字母(i,k,n 除外)$a,b,c,\cdots$ 表示区间向量,以英文大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示区间矩阵,分别以上方加"^"的英文小写和大写字母表示点向量和点矩阵.另外,今后仍沿用[1]中的距离 q,宽度 d 和绝对值 $|\cdot|$ 等记号.

设 $f: x^0 \subseteq R^n \to R^n$,我们的目的是寻求 f 在 x^0 中的零点.

今假定 f 满足区间Lipschitz条件,即

$$f(\hat{x}) - f(\hat{y}) \in L(x)(\hat{x} - \hat{y}),\text{任意}\hat{x},\hat{y} \in x \subseteq x^0 \tag{1}$$

其中算子 $L: Ix^0 \to IR^{n\times n}$ 满足

1) L 在 Ix^0 上连续; 2) L 是包含单调的,即 $x \subseteq y \Rightarrow L(x) \subseteq L(y)$.

在实际计算中,L 可选择 $f(x)$ 的自然区间扩展,也可选择其各种中心形式.

为了描述算法,我们需要考虑线性方程组解集的包含问题.设 $A \in IR^{n\times n}$,$b \in IR^n$,且任意 $\hat{A} \in A$,$\hat{A}^{-1}$ 均存在.以 LES(A,b) 表示线性方程组解集的任一包含,即

LES$(A,b) \supseteq \{\hat{x} | \hat{A}\hat{x} = \hat{b}, \hat{A} \in A, \hat{b} \in b\}$

令 LES$(A) = [$LES$(A,\hat{e}_1)$,LES$(A,\hat{e}_2),\cdots,$LES$(A,\hat{e}_n)]$, 其中 $\hat{e}_i$ 表示第 i 个单位向量.

本文仅限于考虑具有下列性质的LES:

(1) 若 LES(B) 存在,则对 $A \subseteq B$,LES(A) 和 LES$(A,\hat{b})$ 均存在; (2) 若 LES$(\hat{A})$ 存在,则 $\hat{A}^{-1}$ 存在,且 LES$(\hat{A},\hat{b}) = \hat{A}^{-1}\hat{b}$; (3) 若 LES$(A)$ 存在,则 LES$(A,\hat{b}) \subseteq$ LES$(A)\cdot\hat{b}$; (4) 若 LES(B) 存在且 $A \subseteq B$,则 LES$(A,\hat{b}) \subseteq$ LES$(B,\hat{b})$.

[1]中按区间Gauss法得到的包含 $IGA(A,b)$ 就具有这些性质.

由上述性质(2)和(4)可以推出

1) LES$(\hat{A}) = \hat{A}^{-1}$; 2) LES是包含单调的,即 $A \subseteq B \Rightarrow$ LES$(A) \subseteq$ LES(B)

① 1989-06-12收到

至此，我们的两类区间算法表为

$$\begin{cases} \text{选择}\hat{m}^k \in x^k \subseteq R^n \\ SQ(x^k) = \hat{m}^k - \mathrm{LES}(L(x^0), f(\hat{m}^k)) \\ x^{k+1} = SQ(x^k) \cap x^k, \quad k = 0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \text{选择}\hat{m}^k \in x^k \subseteq R^n \\ Q(x^k) = \hat{m}^k - \mathrm{LES}(L(x^k), f(\hat{m}^k)) \\ x^{k+1} = Q(x^k) \cap x^k, \quad k = 0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{3}$$

2 收 敛 性

定理 设 $f: x^0 \subseteq R^n \to R^n$ 满足式 (1) 所述的区间 Lipschitz 条件，又设 $\mathrm{LES}(L(x^0))$ 存在，并记 $\hat{A} = |\hat{E} - \mathrm{LES}(L(x^0)) \cdot L(x^0)|$, $\hat{B} = d(\mathrm{LES}(L(x^0))) \cdot |L(x^0)|$, 于是

a) 若 $Q(x^0) = SQ(x^0) \subseteq x^0$，则 f 在 x^0 中有一零点 $\hat{x}^*$，又若 $x^0 \cap Q(x^0) = \varnothing$，则 f 在 x^0 中无零点．

b) 若 $\rho(\hat{A}) < 1$（ρ 为谱半径）或 $\rho(\hat{B}) < 1$，且 f 在 x^0 中有一零点 $\hat{x}^*$，则算法 (2),(3) 均收敛，即 $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = \hat{x}^*$．若 $\hat{m}^k$ 取为 x^k 的中心，则 $\rho(\hat{B}) < 1$ 可改为 $\rho(\hat{B}) < 2$.

c) 若 $\rho(\hat{A}) < 1$ 或 $\rho(\hat{B}) < 1$，且 f 在 x^0 中无零点，则算法 (2),(3) 经有限步终止，即存在 $k_0 \geqslant 0$，使得

$$SQ(x^{k_0}) \cap x^{k_0} = Q(x^{k_0}) \cap x^{k_0} = \varnothing$$

证 a) 由Brouwer不动点定理，并注意到当 f 零点 $\hat{x}^* \in x^0$ 时，有 $\hat{x}^* \in Q(x^0)$，即得.

b) 注意到对算法有：$\hat{x}^* \in x^k, k = 0,1,2,\cdots$．下面仅就 $\rho(\hat{A}) < 1$ 证明算法(2)的收敛性.

由式(1)及LES的性质，得

$$\begin{aligned} SQ(x^k) - \hat{x}^* &= \hat{m}^k - \hat{x}^* - \mathrm{LES}(L(x^0), f(\hat{m}^k)) \subseteq \hat{m}^k - \hat{x}^* - \mathrm{LES}(L(x^0)) \cdot f(\hat{m}^k) \\ &\subseteq \hat{m}^k - \hat{x}^* - \mathrm{LES}(L(x^0))\{L(x^0)(\hat{m}^k - \hat{x}^*)\} \subseteq [\hat{E} - \mathrm{LES}(L(x^0))L(x^0)](\hat{m}^k \\ &\quad - \hat{x}^*) \end{aligned} \tag{4}$$

因 $x^{k+1} = SQ(x^k) \cap x^k \subseteq SQ(x^k)$，故有 $x^{k+1} - \hat{x}^* \subseteq SQ(x^k) - \hat{x}^*$，再由式(4)得

$$|x^{k+1} - \hat{x}^*| \leqslant \hat{A}|x^k - \hat{x}^*| \tag{5}$$

应用 $q(x^k, \hat{x}^*) = |x^k - \hat{x}^*|$，则式(3)成为

$$q(x^{k+1}, \hat{x}^*) \leqslant \hat{A} q(x^k, \hat{x}^*) \leqslant \hat{A}^{k+1} q(x^0, \hat{x}^*)$$

从而 $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = \hat{x}^*$

c) 我们首先证明：在 $\rho(\hat{A}) < 1$ 或 $\rho(\hat{B}) < 1$ 下，任意 $\hat{X} \in \mathrm{LES}(L(x^0))$，$\hat{X}$ 均非奇异．在 $\rho(\hat{A}) < 1$ 下，取 $\hat{Y} \in L(x^0)$，则有

$$|\hat{E}-\hat{X}\hat{Y}| \leqslant |\hat{E}-\mathrm{LES}(L(x^0))\cdot L(x^0)| = \hat{A}$$

应用Perron－Frobenius定理得:

$$\rho(\hat{E}-\hat{X}\hat{Y}) \leqslant \rho(|\hat{E}-\hat{X}\hat{Y}|) \leqslant \rho(\hat{A}) < 1$$

因此$\hat{X}\hat{Y}=\hat{E}-(\hat{E}-\hat{X}\hat{Y})$非奇异,即有$\hat{X}$非奇异.

又若$\rho(\hat{B})<1$,则取一可逆阵$\hat{Z}\in\mathrm{LES}(L(x^0))$,使得 $\hat{Z}^{-1}\in L(x^0)$,$\mathrm{LES}(\hat{Z}^{-1})=\hat{Z}$, 于是

$$|\hat{E}-\hat{X}\hat{Z}^{-1}| \leqslant |\hat{Z}-\hat{X}|\cdot|\hat{Z}^{-1}| \leqslant d(\mathrm{LES}(L(x^0)))\cdot|L(x^0)| = \hat{B}$$ 这样

$$\rho(\hat{E}-\hat{X}\hat{Z}^{-1}) \leqslant \rho(|\hat{E}-\hat{X}\hat{Z}^{-1}|) \leqslant \rho(\hat{B}) < 1$$

因此 $\hat{X}\hat{Z}^{-1}=\hat{E}-(\hat{E}-\hat{X}\hat{Z}^{-1})$非奇异,即$\hat{X}$非奇异.

下面我们仅对算法 (2) 用反证法证明定理的结论，对算法 (3) 的证明是类似的．若算法 (2) 非有限步终止，则有 $x^k \supseteq x^{k+1}, k=0,1,2,\cdots$ 且区间列 $\{x^k\}$ 收敛于 z^*．对序列 $\{\hat{m}^k\}(\hat{m}^k \in x^k)$，它含于紧集 x^0 之中，故由 Bolzano－Weierstrass 定理知：存在一收敛子列 $\{\hat{m}^{k_i}\}$，即 $\lim\limits_{i\to\infty}\hat{m}^{k_i}=\hat{z}^*$．于是，$\hat{m}^{k_i}\in x^{k_i}$，$\lim\limits_{i\to\infty}x^{k_i}=z^*$，$\hat{z}^*\in z^*$．这样，由

$$SQ(x^{k_i}) = \hat{m}^{k_i} - \mathrm{LES}(L(x^0), f(\hat{m}^{k_i}))$$

$$x^{k_i+1} = SQ(x^{k_i}) \cap x^{k_i}$$

可得 $$SQ(z^*) = \hat{z}^* - \mathrm{LES}(L(x^0), f(\hat{z}^*))$$

$$z^* = SQ(z^*) \cap z^*$$

因 $z^* \subseteq SQ(z^*)$，故$\hat{z}^* \in SQ(z^*)$，于是 $\hat{z}^* \in \hat{z}^* - \mathrm{LES}(L(x^0), f(\hat{z}^*))$, 即有

$$0 \in \mathrm{LES}(L(x^0), f(\hat{z}^*)) \subseteq \mathrm{LES}(L(x^0))\cdot f(\hat{z}^*)$$

从而，存在点阵$\hat{X}\in\mathrm{LES}(L(x^0))$ 使得$\hat{X}f(\hat{z}^*)=0$. 在 $\rho(\hat{A})<1$ 或 $\rho(\hat{B})<1$ 下$\hat{X}$ 非奇异，于是我们推出矛盾 $f(\hat{z}^*)=0$.

定理的结论c) 回答了[1]中提出的问题.

参考文献

1　Alefeld G. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1984, 21: 363～372

The Convergence of Two Classes of Interval Algorithms

Lin Qun

(Dept. of Stat.)

Abstract　For a nonlinear system of equations, a generalization of two interval Newton-algorithms presented by Alefeld is discussed, from which different algorithms can be derived and it is possible to choose the appropriate one for a particular application. This paper also gives an affirmative answer to the question put by Alefeld.

Key words　Convergence, Interval algorithm, Nonlinear system