第26卷 第6期
1987年11月
厦门大学学报自然科学版
JOURNAL OF XIAMEN UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)
ISSN 0438-047
Vol.26 No.6
Nov. 1987

平面有理Bézier曲线的凸性

林 群
（经济学院数学教研室）

摘 要

本文给出平面n次有理Bézier曲线凸性定理的证明及有关三次有理Bézier曲线凸性的充要条件。

一、引 言

在射影平面的齐次坐标系下，给定特征多边形的顶点$\{\mathbf{R}_i\}$，这里$\mathbf{R}_i=(\omega_i x_i, \omega_i y_i, \omega_i)^T$（$i=0, 1,\cdots,n$），则n次有理参数曲线段

$$\mathbf{R}_n(t)=\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\mathbf{R}_i \qquad t\in[0,1] \tag{1}$$

为平面n次有理Bézier曲线。式中

$$\begin{cases} B_{i,n}(t)=C_n^i t^i(1-t)^{n-i} \\ C_n^i=\dfrac{n!}{i!(n-i)!} \end{cases} \quad (i=0,1,\cdots,n) \tag{2}$$

是Bernstein基函数族。另外，应假定$\omega_i>0$（$i=0,1,\cdots,n$），以避免出现渐近方向。且特别当$\omega_i=1(i=0,1,\cdots,n)$时，式(1)就是通常的Bézier曲线[1]。

下面我们证明曲线(1)关于其特征多边形的保凸性，并研究有关三次有理Bézier曲线凸性的充要条件。

二、凸性定理

在对应的仿射平面坐标系下，特征多边形顶点写成$\mathbf{P}_i=(x_i,y_i)^T(i=0,1,\cdots,n)$。这样，

定理1 若有序互异点列$\{\mathbf{P}_i\}(i=0,1,\cdots,n)$在仿射平面上所构成的特征多边形是凸的，则对应的有理Bézier曲线（1）也是凸的。

证明 引入参数变换

$$x=t(1-t)^{-1} \qquad x\in[0,+\infty) \tag{3}$$

则式(1)变为

$$\mathbf{R}_n(x)=(1+x)^{-n}\mathbf{Q}_n(x) \tag{4}$$

式中

$$\mathbf{Q}_n(x)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^i \mathbf{R}_i \tag{5}$$

首先，我们讨论曲线(1)上的拐点。注意到式(4)，此时归结为曲线(5)的相对曲率$Kn(x)$，按文[2]，$Kn(x)$与混合积$(\mathbf{Q}_n(x),\mathbf{Q}_n'(x),\mathbf{Q}_n''(x))$同号，由于

$$\mathbf{Q}_n'(x)=\sum_{j=1}^{n}jC_n^j x^{j-1}\mathbf{R}_j, \qquad \mathbf{Q}_n''(x)=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^k x^{k-2}\mathbf{R}_k$$

于是

$$(\mathbf{Q}_n(x),\ \mathbf{Q}_n'(x),\ \mathbf{Q}_n''(x))=\sum_{i\neq j\neq k}jk(k-1)C_n^iC_n^jC_n^k x^{i+j+k-3}(\mathbf{R}_i,\mathbf{R}_j,\mathbf{R}_k) \tag{6}$$

其中记号$(\mathbf{R}_i,\mathbf{R}_j,\mathbf{R}_k)$表示点$\mathbf{R}_i$，$\mathbf{R}_j$和$\mathbf{R}_k$的混合积，从对应的仿射平面上看，它是点$\mathbf{P}_i$，$\mathbf{P}_j$和$\mathbf{P}_k$所构成的三角形有向面积的两倍。由式(6)，有

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{Q}_n(x),\ \mathbf{Q}_n'(x),\ \mathbf{Q}_n''(x))\\
&=\sum_{i<j<k}[jk(k-1)+ki(i-1)+ij(j-1)-kj(j-1)-ik(k-1)-ji(i-1)]\cdot\\
&\quad\cdot C_n^iC_n^jC_n^k x^{i+j+k-3}(\mathbf{R}_i,\mathbf{R}_j,\mathbf{R}_k)\\
&=\sum_{i<j<k}(j-i)(k-j)(k-i)C_n^iC_n^jC_n^k x^{i+j+k-3}(\mathbf{R}_i,\mathbf{R}_j,\mathbf{R}_k)
\end{aligned} \tag{7}$$

不妨设点列$\{\mathbf{P}_i\}(i=0,1,\cdots,n)$在仿射平面上构成逆时针回路，则

$$(\mathbf{R}_i,\mathbf{R}_j,\mathbf{R}_k)\geqslant 0 \qquad i<j<k \tag{8}$$

且不全为零。依式(7)，有

$$(\mathbf{Q}_n(x),\ \mathbf{Q}_n'(x),\ \mathbf{Q}_n''(x))>0 \qquad x\in(0,+\infty) \tag{9}$$

即曲线(1)上无拐点。

其次，考虑曲线(1)上的奇点。我们将其分为尖点和重点来讨论。由式(9)易知$\mathbf{Q}_n(x)\times\mathbf{Q}_n'(x)\neq 0$，$x\in(0,+\infty)$因此曲线(1)上无尖点。

另外，欲证曲线(1)上无重点，只要证对任意的$x_1, x_2\in(0,+\infty)$（不妨设$x_1>x_2$）以及$\mu\neq 0$，都有：$\mathbf{Q}_n(x_1)\neq\mu\mathbf{Q}_n(x_2)$，亦即

$$\mathbf{F}(\mu)=\mathbf{Q}_n(x_1)-\mu\mathbf{Q}_n(x_2)\neq 0 \tag{10}$$

因为当$\mu<0$ 和 $0<\mu<(x_1/x_2)^2$时

$$(\mathbf{R}_0,\mathbf{R}_1,\mathbf{F}(\mu))=\sum_{i=2}^{n}C_n^i(x_1^i-\mu x_2^i)(\mathbf{R}_0,\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_i)>0$$

当$(x_1/x_2)^j\leqslant\mu<(x_1/x_2)^{j+1}(j=2,3,\cdots,n-1)$时

$$(\mathbf{R}_0,\mathbf{R}_j,\mathbf{F}(\mu))=\sum_{i=1}^{n}C_n^i(x_1^i-\mu x_2^i)(\mathbf{R}_0,\mathbf{R}_j,\mathbf{R}_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{j-1}C_n^i(x_1^i-\mu x_2^i)(\mathbf{R}_0,\mathbf{R}_j,\mathbf{R}_i)+\sum_{i=j+1}^{n}C_n^i(x_1^i-\mu x_2^i)(\mathbf{R}_0,\mathbf{R}_j,\mathbf{R}_i)$$

$$=-\sum_{i=1}^{j-1}C_n^i(x_1^i-\mu x_2^i)(\mathbf{R}_0,\mathbf{R}_i,\mathbf{R}_j)+\sum_{i=j+1}^{n}C_n^i(x_1^i-\mu x_2^i)(\mathbf{R}_0,\mathbf{R}_j,\mathbf{R}_i)>0$$

又当$\mu\geqslant(x_1/x_2)^n$时

$$(\mathbf{R}_0,\mathbf{R}_n,\mathbf{F}(\mu))=-\sum_{i=1}^{n-1}C_n^i(x_1^i-\mu x_2^i)(\mathbf{R}_0,\mathbf{R}_i,\mathbf{R}_n)>0$$

从而式(10)成立，即曲线(1)上无重点。证毕。

三、三次有理Bézier曲线凸性的充要条件

三次有理Bézier曲线表为

$$\mathbf{R}_3(t)=(1-t)^3\mathbf{R}_0+3t(1-t)^2\mathbf{R}_1+3t^2(1-t)\mathbf{R}_2+t^3\mathbf{R}_3,\quad t\in[0,1] \tag{11}$$

文[3]得到了三次Bézier曲线为凸的充要条件，本节将考虑有理Bézier曲线的情况。首先给出下列两个引理：

引理1 实系数方程$A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3=0\ (A_0\neq0)$在$(0,+\infty)$内无奇数重根的充要条件是下列条件之一成立：

1) $A_0A_3>0$，$A_1^2A_2^2-4A_0A_2^3-4A_1^3A_3-27A_0^2A_3^2+18A_0A_1A_2A_3<0$，

2) A_0，A_1，A_2，A_3同号，

3) $A_3=0$，$A_0A_1\geqslant0$，$A_0A_2\geqslant0$，

4) $A_3=0$，$A_1^2-4A_0A_2\leqslant0$。

引理2 实系数方程$x^2-E_1x+E_2=0$至少有一实根不在$(0,+\infty)$内的充要条件是下列条件之一成立：

1) $E_1^2-4E_2<0$，　2) $E_1\leqslant0$，　3) $E_2\leqslant0$。

上述引理按判别式及根与系数关系立得。

下面分别就拐点和奇点进行讨论：

1. 拐点

曲线(11)在$t\in(0,1)$上出现实拐点的充要条件等价于方程

$$A_0t^3+A_1t^2(1-t)+A_2t(1-t)^2+A_3(1-t)^3=0 \tag{12}$$

在该区间上存在奇数重实根。在参数变换(3)下式(12)变为

$$A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3=0 \qquad x\in(0,+\infty) \tag{13}$$

式中

$$A_0=(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\mathbf{R}_3), \qquad A_1=(\mathbf{R}_2,\mathbf{R}_3,\mathbf{R}_0) \tag{14}$$

$$A_2=(\mathbf{R}_3,\mathbf{R}_0,\mathbf{R}_1), \qquad A_3=(\mathbf{R}_0,\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2)$$

令 $\quad \mathbf{a}_m=\mathbf{P}_m-\mathbf{P}_{m-1} \qquad (m=1,2,3)$

代表仿射平面上特征多边形的边向量，并设

$$\beta_1=[\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3],\quad \beta_2=[\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_1],\quad \beta_3=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2]$$

这里$[\mathbf{a}_m,\mathbf{a}_l]$代表向量$\mathbf{a}_m$和$\mathbf{a}_l$的外积。这样，可将式(14)改写为

$$A_0=\omega_1\omega_2\omega_3\beta_1, \qquad A_1=\omega_0\omega_2\omega_3(\beta_1-\beta_2)$$

$$A_2=\omega_0\omega_1\omega_3(\beta_3-\beta_2), \qquad A_3=\omega_0\omega_1\omega_2\beta_3 \tag{15}$$

于是，为保证曲线(11)在(0,1)中无拐点，即只要方程(13)在$(0,+\infty)$中无奇数重实根，若$A_0=A_3=0$，则曲线(11)退化为直线，故由对称性可设$A_0\neq0$，按引理1得

定理2 设$\beta_1\neq0$，则曲线(11)在(0,1)中无拐点的充要条件是下述条件之一成立：

1) $\beta_1\beta_3>0$，且$\omega_0^2\omega_1\omega_2\omega_3^2(\beta_1-\beta_2)^2(\beta_3-\beta_2)^2-4\omega_0\omega_1^3\omega_3^2\beta_1\cdot$
$\cdot(\beta_3-\beta_2)^3-4\omega_0^2\omega_2^3\omega_3\beta_3(\beta_1-\beta_2)^3-27\omega_1^3\omega_2^3\beta_1^2\beta_3^2+18\omega_0\omega_1^2\cdot$
$\cdot\omega_2^2\omega_3\beta_1\beta_3(\beta_1-\beta_2)(\beta_3-\beta_2)\leqslant0$。

2) β_1，$\beta_1-\beta_2$，$\beta_3-\beta_2$，β_3同号。

3) $\beta_3=0$，$\beta_1\beta_2\leqslant0$。

2. 奇点

曲线(11)在参数变换(3)下的齐次坐标式是

$$\mathbf{R}_3(x)=(1+x)^{-3}[\mathbf{R}_0+3x\mathbf{R}_1+3x^2\mathbf{R}_2+x^3\mathbf{R}_3] \tag{16}$$

这样，曲线段上出现二重点的充要条件是：存在$x_1\neq x_2\in(0,+\infty)$，以及比例因子$\mu\neq0$，使得：

$$\mathbf{R}_0+3x_1\mathbf{R}_1+3x_1^2\mathbf{R}_2+x_1^3\mathbf{R}_3=\mu(\mathbf{R}_0+3x_2\mathbf{R}_1+3x_2^2\mathbf{R}_2+x_2^3\mathbf{R}_3)$$

上式两端分别点乘向量$\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2$，$\mathbf{R}_2\times\mathbf{R}_3$，$\mathbf{R}_3\times\mathbf{R}_1$，得

$$\begin{cases}A_3+A_0x_1^3=\mu(A_3+A_0x_2^3)\\ A_1+3A_0x_1=\mu(A_1+3A_0x_2)\\ -A_2+3A_0x_1^2=\mu(-A_2+3A_0x_2^2)\end{cases} \tag{17}$$

令$E_1=x_1+x_2$，$E_2=x_1x_2$，则方程组(17)等价于

$$\begin{cases} A_2E_1+A_1E_2=-3A_3 \\ A_1E_1+3A_0E_2=-A_2. \end{cases} \tag{18}$$

另外，曲线(16)的尖点取决于方程

$$\mathbf{R}_3(x)\times\mathbf{R}_3'(x)=0$$

亦即

$$(\mathbf{R}_0\times\mathbf{R}_1)+2(\mathbf{R}_0\times\mathbf{R}_2)x+(\mathbf{R}_0\times\mathbf{R}_3+3\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)x^2+2(\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_3)x^3+ \\ +(\mathbf{R}_2\times\mathbf{R}_3)x^4=0 \tag{19}$$

式(19)两端依次点乘$\mathbf{R}_3$，$\mathbf{R}_2$，$\mathbf{R}_1$，$\mathbf{R}_0$，导出

$$\begin{cases} A_2+2A_1x+3A_0x^2=0 \\ A_3-A_1x^2-2A_0x^3=0 \\ -2A_3-A_2x+A_0x^3=0 \\ 3A_3+2A_2x+A_1x^2=0 \end{cases} \tag{20}$$

即

$$\begin{cases} 2A_2x+A_1x^2=-3A_3 \\ 2A_1x+3A_0x^2=-A_2 \end{cases}$$

这恰为方程组(18)中当$x_1=x_2$时的情形。因此，曲线(11)在(0,1)中出现实奇点的充要条件归结为：存在$x_1,x_2\in(0,+\infty)$满足方程组(18)。

可以假定，$A_1^2-3A_0A_2\neq0$。于是有

$$E_1=(9A_0A_3-A_1A_2)/(A_1^2-3A_0A_2)$$
$$=\frac{\omega_1}{\omega_3}\cdot\frac{9\omega_1\omega_2\beta_1\beta_3-\omega_0\omega_3(\beta_1-\beta_2)(\beta_3-\beta_2)}{\omega_0\omega_2(\beta_1-\beta_2)^2-3\omega_1^2\beta_1(\beta_3-\beta_2)}$$

和

$$E_2=(A_2^2-3A_1A_3)/(A_1^2-3A_0A_2)$$
$$=\frac{\omega_0\omega_1}{\omega_2\omega_3}\cdot\frac{\omega_1\omega_3(\beta_3-\beta_2)^2-3\omega_2^2\beta_3(\beta_1-\beta_2)}{\omega_0\omega_2(\beta_1-\beta_2)^2-3\omega_1^2\beta_1(\beta_3-\beta_2)}$$

按引理2，得到

定理3　设$\beta_1\beta_3\geqslant0$，则曲线(11)在(0,1)中不出现实奇点的充要条件是下列条件之一成立：

1)　$\omega_0^2\omega_1\omega_2\omega_3^2(\beta_1-\beta_2)^2(\beta_3-\beta_2)^2-4\omega_0\omega_1^3\omega_2^2\beta_1(\beta_3-\beta_2)^3-4\omega_0^2\omega_2^3\cdot$
$\cdot\omega_3\beta_3(\beta_1-\beta_2)^3-27\omega_1^3\omega_2^3\beta_1^2\beta_3^2+18\omega_0\omega_1^2\omega_2^2\omega_3\beta_1\beta_3(\beta_1-\beta_2)\cdot$
$\cdot(\beta_3-\beta_2)>0$。

2)　$\omega_0\omega_1\omega_2\omega_3(\beta_1-\beta_2)^2(\beta_3-\beta_2)^2-3\omega_0\omega_2^3\beta_3(\beta_1-\beta_2)^3-3\omega_1^3\omega_3\beta_1\cdot$
$\cdot(\beta_3-\beta_2)^3+9\omega_1^2\omega_2^2\beta_1\beta_3(\beta_1-\beta_2)(\beta_3-\beta_2)\leqslant0$。

3)　$9\omega_0\omega_1\omega_2^2\beta_1\beta_3(\beta_1-\beta_2)^2-\omega_0^2\omega_2\omega_3(\beta_1-\beta_2)^3(\beta_3-\beta_2)-27\omega_1^3\omega_2\cdot$

$$\cdot \beta_1^2\beta_3(\beta_3-\beta_2)+3\omega_0\omega_1^2\omega_3\beta_1(\beta_1-\beta_2)(\beta_3-\beta_2)^2\leqslant 0.$$

这样，只要三次有理Bézier曲线满足定理2的条件之一，且同时也满足定理3的条件之一，则该曲线就是凸的。从而，结合定理2、3即得曲线(11)凸的充要条件。

参 考 文 献

〔1〕 Bèzier, P. E., *Numerical Control-Mathematics and Applications*, John Wiley and Sons, 1972.

〔2〕 刘鼎元，1982年计算几何讨论会论文集，133—149.

〔3〕 华宣积，计算数学，3(1981)，377—380.

〔4〕 Faux, I. D. and Pratt, M. J., *Computational Geometry for Design and Manufacture* John Wiley and Sons, 1979.

On the Convexity of Planar Rational Bézier Curves

Lin Qun

(*Math. Sec. of Econ. Col.*)

Abstract

This paper proves the convexity theorem of planar rational Bézier curves of nth order, and obtains the necessary and sufficient conditions for the convexity of cubic rational Bézier curves.

Key words　Convexity, Rational Bèzier curve