不计算导数值的高阶迭代类

林 群

（厦门大学）

I

在[1]中按迭代函数（简记I.F.）所需要的信息对I.F.做了分类。并给出了I.F.阶的定义。

但[1]中所讨论的高阶迭代过程，除了需要使用函数的信息外，还需要函数导数信息的支持，这在应用上有时是不方便的（例如，导数的表达式较复杂），因此有必要研究仅依赖于函数信息而保持高阶收敛的I.F.。

若$f(x)$为实变量的单值实函数，且在某区间$[a,b]$上具有唯一实零点α，设x_n，$x_{n-1},\cdots,x_{n-k}$是α的$k+1$个近似值。再设x_{n+1}由$x_n,x_{n-1},\cdots,x_{n-k}$及$\omega_i(x_n,\cdots,x_{n-k})$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$上的f值所确定。这里ω_i是在$x_n,x_{n-1},\cdots,x_{n-k}$点上仅依赖于$f$的函数。于是，我们称

$$x_{n+1}=\varphi\{x_n,x_{n-1},\cdots,x_{n-k},\ \omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{m-1}\} \tag{1}$$

为A型的有记忆多点I.F.（简称A型I.F）。[2]文提出的平行弦I.F.及[3]文的相交弦I.F.均属这一类型。

本文利用[4]中的构造思想，给出两类计算m个f信息而不低于2^{m-1}阶的A型I.F.，它们包含了不计算导数值的有记忆单点I.F.类[1]。另外，将上述A型I.F.的构造方法转移到无记忆的多点I.F.类上，得到若干生成高阶I.F.的公式及两类使用$m+1$个f信息的2^m阶I.F.。

II

设$f\in C^{m+k}[a,b]$且f'不等于零，f把$[a,b]$变换到$[c,d]$，则f在$[c,d]$上存在反函数$\mathbf{F}(f)$，且$\mathbf{F}\in C^{m+k}[c,d]$。

若点集$X=\{x_n,x_{n-1},\cdots,x_{n-k}\}$中各元互不相同，则可定义$\omega_1(x_n,\cdots,x_{n-k})$，它仅由$X$上的$f$值确定。类似地，假定对$j=1,\cdots,i$已逐个定义了$\omega_j$，且为确定$\omega_j$只需计算$\{x_n,\omega_1,\cdots,\omega_{j-1}\}$点上的$f$值。则定义一个新的$\omega_{i+1}$依赖于插值理论。

首先，可应用反插值方法来定义ω_{i+1}：

记$x_{n-s}=\omega_{-s}(s=0,1,\cdots,k)$，设$\mathbf{P}_{i,k}(t)$是$\mathbf{F}$在点集$Y=\{f(\omega_i),f(\omega_{i-1}),\cdots,f(\omega_1),f(\omega_0),\cdots,f(\omega_{-k})\}$上次数不超过$i+k$的Lagrange插值多项式，它满足如下插值条件：

1983年9月15日收到。

$$\mathbf{P}_{i,k}(f(\omega_j))=\mathbf{F}(f(\omega_j)) \qquad j=-k,-k+1,\cdots,i \tag{2}$$

若Y中各元互不相同，则计算$\mathbf{P}_{i,k}(t)$只用到f值，而不计算f的导数值，这样

$$\omega_{i+1}=\mathbf{P}_{i,k}(0) \qquad i=0,1,\cdots,m-1 \tag{3}$$

因此，每次从ω_i求出ω_{i+1}只多增加一个信息$f(\omega_i)$，若出现某个ω_j使$f(\omega_j)=0$，则迭代终止。否则由(3)式递推可得$\omega_m(x_n,\cdots,x_{n-k})$，令$x_{n+1}=\varphi_\lambda(m,k)=\omega_m(x_n,\cdots,x_{n-k})$，于是从$X$求出$x_{n+1}$只需计算$m$个$f$值，而其余使用的信息都是已知的函数值。记$\Phi_\lambda==\{\varphi_\lambda(m,k);\ m,k=1,2,\cdots\}$。

其次，亦可用直接插值法构造ω_{i+1}：

设$P_{i,k}(x)$是f在$\Omega=X\cup\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_i\}$上次数不超过$i+k$的Lagrange插值多项式，它满足如下插值条件：

$$P_{i,k}(\omega_j)=f(\omega_j) \qquad j=-k,-k+1,\cdots,i \tag{4}$$

若Ω中各元互不相同，则$P_{i,k}(x)$仅由Ω上的f值确定，这样

$$\omega_{i+1}=\omega_i-\frac{f(\omega_i)}{P'_{i,k}(\omega_i)} \qquad i=0,1,\cdots,m-1 \tag{5}$$

因此又可定义一A型I.F.，$x_{n+1}=\varphi_\mu(m,k)=\omega_m(x_n,\cdots,x_{n-k})$。它每步迭代计算$m$个$f$值。记$\Phi_\mu=\{\varphi_\mu(m,k);\ m,k=1,2,\cdots\}$。

最后，我们指出Φ_λ与Φ_μ的几个特例：

$\varphi_\lambda(1,k)$是[1]中给出的采用反插值构造的一类有记忆单点I.F.，它包含了弦截I.F.

$$\varphi_\lambda(1,1)=x_n-\frac{f(x_n)}{f[x_n,x_{n-1}]}.$$

$\varphi_\mu(1,k)$是导数估计I.F.的有记忆单点I.F.，[1]中给出了它的一个特例：

$$\varphi_\mu(1,2)=x_n-\frac{f(x_n)}{f[x_n,x_{n-1}]+f[x_n,x_{n-2}]-f[x_{n-1},x_{n-2}]}$$

另外，我们指出Φ_μ的一个例子

$$\begin{cases}\omega_1=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f[x_n,x_{n-1}]}\\ \varphi_\mu(2,1)=\omega_1-\dfrac{f(\omega_1)}{f[\omega_1,x_n]+f[\omega_1,x_{n-1}]-f[x_n,x_{n-1}]}\end{cases} \tag{6}$$

它每步迭代计算两个f值，其余使用的都是原有信息，但我们将证明其阶是$1+\sqrt{3}$，高于相交弦I.F.及平行弦I.F.。

Ⅲ

为方便计，将[1]中引进的收敛阶定义做如下变形：

命$\rho_n=\log|x_n-\alpha|$，序列$\{x_n\}$称为p阶的，如果

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{n+1}/\rho_n=p. \tag{7}$$

下面给出Φ_λ及Φ_μ的收敛阶：

定理 1 设$f(x)\in C^{m+k}[a,],bf'\mathbf{F}^{(i+k)}$在$[a,b]$上非零$(i=1,2,\cdots,m)$；则$\varphi_\lambda(m,k)$的阶$\lambda_{m,k}$为方程

$$p^{k+1}-2^{m-1}\sum_{s=0}^{k}p^{s}=0 \tag{8}$$

的唯一正实根。

证明　对 m 施行归纳法，证明如下误差递推关系：

$$(x_{n+1}-\alpha)=K_m(f',\cdots,f^{(m+k)})\prod_{s=0}^{k}(x_{n-s}-\alpha)^{2^{m-1}} \tag{9}$$

其中 $K_m(f',\cdots,f^{(m+k)})$ 为以 $f',\cdots,f^{(m+k)}$ 有关的误差系数。

当 $m=1$ 时，由上述，$\varphi_k(1,k)$ 是[1]中给出的有记忆单点I.F.，故(9)式显然。

现设当 $m\leq l$ 时，(9)式为真，而证当 $m=l+1$ 时亦真。

由插值法，有：

$$\mathrm{F}(t)=\mathrm{P}_{l,k}(t)+\frac{\mathrm{F}^{(l+k+1)}(\theta_{l+1}(t))}{(l+k+1)!}\prod_{j=0}^{l+k}[t-f(\omega_{l-j})] \tag{10}$$

其中 $\theta_{l+1}(t)$ 位于 $\{f(\omega_l),f(\omega_{l-1}),\cdots,f(\omega_{-k}),t\}$ 所确定的区间内。

在(10)式中置 $t=0$，由于(3)式且 $\alpha=\mathrm{F}(0)$，有：

$$(x_{n+1}-\alpha)=(\omega_{l+1}-\alpha)=\frac{(-1)^{l+k}}{(l+k+1)!}\mathrm{F}^{(l+k+1)}(\theta_{l+1}(0))\prod_{j=0}^{l+k}f(\omega_{l-j})$$

$$=\frac{(-1)^{l+k}}{(l+k+1)!}\mathrm{F}^{(l+k+1)}(\theta_{l+1})\prod_{j=0}^{l+k}f'(\eta_{l-j})\cdot\prod_{j=0}^{l+k}(\omega_{l-j}-\alpha)$$

其中 η_{l-j} 位于 $\{\omega_{l-j},\alpha\}$ 所确定的区间内。

再依归纳假设，有：

$$(x_{n+1}-\alpha)=\frac{(-1)^{l+k}}{(l+k+1)!}\mathrm{F}^{(l+k+1)}(\theta_{l+1})\prod_{r=1}^{l}K_r(f',\cdots,f^{(r+k)})\cdot$$

$$\prod_{j=0}^{l+k}f'(\eta_{l-j})\cdot\prod_{s=0}^{k}(x_{n-s}-\alpha)^{2^l}$$

只要取

$$K_{l+1}(f',\cdots,f^{(l+k+1)})=\frac{(-1)^{l+k}}{(l+k+1)!}\mathrm{F}^{(l+k+1)}(\theta_{l+1})\cdot$$

$$\prod_{r=1}^{l}K_r(f',\cdots,f^{(r+k)})\cdot\prod_{j=0}^{l+k}f'(\eta_{l-j})$$

则(9)式获证。

其次，将(9)式两边取对数，得

$$\rho_{n+1}=\log|K_m(f',\cdots,f^{(m+k)})|+2^{m-1}\cdot\sum_{s=0}^{k}\rho_{n-s}$$

或

$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}=\frac{1}{\rho_n}\log|K_m(f',\cdots,f^{(m+k)})|+2^{m-1}\sum_{\nu=1}^{k}\left(\prod_{l=1}^{\nu}\frac{\rho_{n-l}}{\rho_{n-l+1}}\right)+2^{m-1} \tag{11}$$

注意到 $\log|K_m(f',\cdots,f^{(m+k)})|$ 有界，且 $\rho_n\to-\infty$，依定义(7)，对(11)式两边取极限，得：

$$p=2^{m-1}+2^{m-1}\sum_{\nu=1}^{k}p^{-\nu}$$

此即(8)式，定理证毕。

类似地，对 $\varphi_u(m,k)$ 的阶 $\mu_{m,k}$ 在一定条件下亦有同样的结论，在此就不赘述。

应该指出，对较大的 k，除增加程序复杂性外，敛速却不增加很多。因此 k 不宜取得过大。对于小的 k 和 m，表1给出了 $\lambda_{m,k}$（或 $\mu_{m,k}$）的值。最有意义的情况是 $k=1$，这时可精确地求得：$\lambda_{m,1}(\mu_{m,1})=2^{m-2}+(2^{2m-4}+2^{m-1})^{\frac{1}{2}}$。

由表1可见，$\lambda_{m,k}$（或 $\mu_{m,k}$）以极快的速度接近 $2^{m-1}+1$。一般地，仿[1]可得：

定理 2 若 $m,k\geqslant1$，则方程(8)存在一个正的实单根

$$\lambda_{m,k}(\mu_{m,k})=2^{m-1}+1-\frac{\xi\cdot2^{m-1}}{(2^{m-1}+1)^{k+1}}$$

其中 $1<\xi\leqslant2(3-\sqrt{5})$。

表1 $\lambda_{m,k}$（或 $\mu_{m,k}$）**值**

k \ m	1	2	3	4
1	1.61803	2.73205	4.82843	8.89898
2	1.83928	2.91964	4.96737	8.98898
3	1.92756	2.97445	4.99357	8.99879
4	1.96595	2.99165	4.99872	8.99987

Ⅳ

有记忆I.F.的构造思想常可转移到无记忆的多点I.F.上去，本节基于Ⅱ节的方法，考虑仅依赖于 f 信息的无记忆多点I.F.类。

给定无记忆的 p 阶I.F.$\varphi(x)$，记 $\omega_0=x$，设对 $j=0,1,\cdots,i$ 已逐个定义了 ω_j，且其中只用到 f 在 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{j-1}$ 的值，则增加一个信息 $f(\omega_i)$ 以定义 ω_{i+1} 依赖于插值理论。

首先，可用反插值方法来定义 ω_{i+1}：

设 $\mathbf{R}_i(t)$ 是 $\mathbf{F}$ 在点集 $Y_\varphi=\{f(\omega_i),\ f(\omega_{i-1}),\cdots,\ f(\omega_0),\ f(\varphi)\}$ 上次数不超过 $i+1$ 的Lagrange插值多项式，满足如下插值条件：

$$\mathbf{R}_i(f(\varphi))=\mathbf{F}(f(\varphi))$$

$$\mathbf{R}_i(f(\omega_j))=\mathbf{F}(f(\omega_j))\qquad j=0,1,\cdots,i \tag{12}$$

若 Y_φ 中各元互不相同，则计算 $\mathbf{R}_i(t)$ 只用到 f 值，于是

$$\omega_{i+1}=\mathbf{R}_i(0)\qquad i=0,1,\cdots,m-1 \tag{13}$$

由(13)式递推可得I.F.：$\phi_\lambda(m,\varphi)=\omega_m(x,\varphi(x))$，记 $\Psi_\lambda=\{\phi_\lambda(m,\varphi);\ m=1,2,\cdots\}$。

其次，亦可应用直接插值法来构造 ω_{i+1}：

设 $R_i(t)$ 是 f 在 $\Omega_\varphi=\{\omega_i,\omega_{i-1},\cdots,\omega_0,\varphi(x)\}$ 上次数不超过 $i+1$ 的 Lagrange 插值多项式，满足如下插值条件：

$$\begin{aligned}&R_i(\varphi)=f(\varphi)\\&R_i(\omega_j)=f(\omega_j)\qquad j=0,1,\cdots,i\end{aligned}\tag{14}$$

若 Ω_φ 中各元互不相同，则 $R_i(t)$ 仅由 f 值确定。于是由

$$\omega_{i+1}=\omega_i-\frac{f(\omega_i)}{R_i'(\omega_i)}\qquad i=0,1,\cdots,m-1\tag{15}$$

可定义 I.F.：$\phi_\mu(m,\varphi)=\omega_m(x,\varphi(x))$。记 $\Psi_\mu=\{\phi_\mu(m,\varphi);m=1,2,\cdots\}$。

下面来讨论 Ψ_λ 及 Ψ_μ 的收敛阶：

定理 3　设 $f(x)\in C^{m+1}[a,b]$，f' $\mathbf{F}^{(i+1)}$ 在 $[a,b]$ 上非零 $(i=1,\cdots,m)$；若 $\varphi(x)$ 为 p 阶的，则 $\phi_\lambda(m,\varphi)$ 为 $2^{m-1}(p+1)$ 阶的。

证明　只要对 m 施行归纳法证明[1]：存在渐近误差常数 C_m，使

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\phi_\lambda(m,\varphi)-\alpha}{(x-\alpha)^{2^{m-1}(p+1)}}=C_m\tag{16}$$

当 $m=1$ 时

$$\phi_\lambda(1,\varphi)=x-\frac{f(x)}{f[\varphi(x),x]}\tag{17}$$

可以证明它是 $p+1$ 阶的且 $C_1=f''(\alpha)/2f'(\alpha)$。

归纳假设当 $m\leqslant l$ 时结论为真，而证当 $m=l+1$ 时亦真。

由 Lagrange 插值法，有

$$\mathbf{F}(t)=\mathbf{R}_l(t)+\frac{\mathbf{F}^{(l+2)}(\sigma_{l+1}(t))}{(l+2)!}[t-f(\varphi)]\prod_{j=0}^{l}[t-f(\omega_{l-j})]\tag{18}$$

其中 $\sigma_{l+1}(t)$ 位于 $\{f(\omega_l),f(\omega_{l-1}),\cdots,f(\omega_0),f(\varphi),t\}$ 所确定的区间内。

在 (18) 式中令 $t=0$，并利用 (13) 式，有

$$\begin{aligned}\phi_\lambda(l+1,\varphi)-\alpha&=(\omega_{l+1}-\alpha)=\frac{(-1)^{l+1}}{(l+2)!}\mathbf{F}^{(l+2)}(\sigma_{l+1})f(\varphi)\prod_{j=0}^{l}f(\omega_{l-j})\\&=\frac{(-1)^{l+1}}{(l+2)!}\mathbf{F}^{(l+2)}(\sigma_{l+1})\cdot f'(\delta)\cdot\prod_{j=0}^{l}f'(\eta_{l-j})\cdot(\varphi-\alpha)\cdot\prod_{j=0}^{l}(\omega_{l-j}-\alpha)\end{aligned}$$

其中 δ 及 η_{l-j} 分别位于 $\{\varphi,\alpha\}$ 及 $\{\omega_{l-j},\alpha\}$ 所确定的区间内。

于是按归纳假设

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\phi_\lambda(l+1,\varphi)-\alpha}{(x-\alpha)^{2^l(p+1)}}=\frac{(-1)^{l+1}}{(l+2)!}\mathbf{F}^{(l+2)}(0)[f'(\alpha)]^{l+2}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to\alpha}\frac{(\varphi-\alpha)(\omega_0-\alpha)}{(x-\alpha)^{p+1}}\cdot\lim_{x\to\alpha}\prod_{j=1}^{l}\frac{\omega_j-\alpha}{(x-\alpha)^{2^{j-1}(p+1)}}$$

$$= \frac{(-1)^{l+1}}{(l+2)2!} F^{(l+2)}(0)[f'(\alpha)]^{l+2} \cdot C \cdot C_1 \cdots C_l = C_{l+1}.$$

其中 C 为 $\varphi(x)$ 的渐近误差常数。因此 (16) 式得证。

对于 $\phi^{\mu}(m,\varphi)$ 在一定条件下亦有相同的结论，证明从略。

由上可知，给定 p 阶 $\varphi(x)$，$\phi_\lambda(1,\varphi)=\omega_1(x)$（即(17)式），增加一个 f 值而使收敛阶提高到 $p+1$*。

$$\phi_\mu(2,\varphi)=\omega_1(x)-\frac{f(\omega_1(x))}{f[\omega^1(x),x]+f[\omega_1(x),\varphi(x)]-f[x,\varphi(x)]}$$

增加 2 个 f 值而使收敛阶提高到 $2p+2$。

另外，由相交弦 I.F.演变而来的公式

$$\phi(x,\varphi)=\varphi(x)-\frac{f(\varphi(x))}{f[\omega_1(x),\varphi(x)]}$$

增加 2 个 f 值而使收敛阶提高到 $2p+1$。

特别，将 $\varphi(x)$ 取为简单的一阶 I.F.，例如 $\varphi(x)=x+\beta f(x)$（β 为常数），这时，$\phi_\lambda(m,\varphi)$ 及 $\phi_\mu(m,\varphi)$ 均只使用 $m+1$ 个 f 值，而收敛阶为 2^m。这一结果与[4]中类似，所不同的是，在此构造的 I.F.不计算 f 的导数值。

$\Psi_\mu(m,x+\beta f)$ 的两个例子是

$$\phi_\mu(1,x+\beta f)=\omega_1=x-\frac{f}{f[x+\beta f,x]}$$

$$\phi_\mu(2,x+\beta f)=\omega_1-\frac{f(\omega_1)}{f[\omega_1,x]+f[\omega_1,x+\beta f]-f[x,x+\beta f]}$$

它们分别使用 2 个和 3 个 f 值，而收敛阶是 2 阶的和 4 阶的。

V

一般来说，解超越方程的迭代过程所花的机器时间主要取决于计算 f 及 $f^{(j)}$ 所花的时间。因此，对一高阶 I.F.而言，如果一次迭代所计算的信息量太大，便不能具备较好的实用价值。[1] 中提出 I.F.效能的一种度量是"计算效能"。若计算 f 值的代价是一个单位，而计算 $f^{(j)}$ 的代价是 θ_j 个单位，则计算效能指标的意义是

$$E(\varphi,f)=p^{1/\theta} \tag{19}$$

其中 p 是 φ 的阶，$\theta=n_0+\sum_j n_j\theta_j$，$n_0$ 和 n_j 分别是一次迭代所计算的 f 及 $f^{(j)}$ 值的数目。对于 Φ_λ 及 Φ_μ，有：

$$E(\varphi_\lambda(m,k),f)=E(\varphi_\mu(m,k),f)=2^{1-\frac{1}{m}}\left[1+\frac{1}{2^{m-1}}-\frac{\xi}{(2^{m-1}+1)^{k+1}}\right]^{\frac{1}{m}}.$$

对于 Ψ_λ 及 Ψ_μ，有

---

*) 可与[1]的结果 $\psi=\varphi-\frac{f(\varphi)}{f'}$ 做比较。

$$E(\phi_\lambda(m,x+\beta f),f)=E(\phi_\mu(m,x+\beta f),f)=2^{\frac{m}{m+1}}.$$

当m充分大后，上述诸$E(\varphi,f)$均趋向于2．因此，Φ_λ,Φ_μ，Ψ_λ和Ψ_μ的计算效能优于常用的I.F.．另外，当计算$f^{(j)}$的代价愈高，它们的优越性便愈突出．表2列出了诸I.F.的计算效能．

表2 诸I.F.计算效能的比较

代价θ_1 / I.F.名称	1	1.5	2
Newton-Raphson I.F.	1.4142	1.3195	1.2599
平行弦I.F.	1.4142	1.4142	1.4142
相交弦I.F.	1.5538	1.5538	1.5538
$\psi(x)$**)	1.5874	1.4860	1.4142
$\varphi_\lambda(2,1)$	1.6529	1.6529	1.6529
$\varphi_\mu(4,4)$	1.7320	1.7320	1.7320

注意到(19)式定义的计算效能尚未考虑到机器处理信息的工作量．因此，若I.F.的计算效能较高，但处理信息的工作量亦很大，则仍然不够实用．

设工作量以执行一次乘（除）法和一次加（减）法所需的平均时间为时间单位，则〔1〕中提到I.F.效能的另一种度量是"渐近计算效能"：

$$E_{ff}(\varphi,f)=C\frac{\log p}{A+B(M)} \tag{20}$$

其中p是I.F.的阶，A是处理信息的工作量，$B(M)$是计算新信息的工作量，C为适宜的正规化系数．

超越函数的计算时间依赖于具体的计算机，但可以按上述时间单位来换算，因此不妨设计算一个f值所需的时间为M，则$B(M)=mM$．A的值与I.F.在程序中的书写形式有关，通常应尽量简化I.F.的表达式，以获得小的A．

为计算表3，我们选定典型的

i) 弦截I.F.：$A=2$，$B(M)=M$，$C=1000$，$p=(1+\sqrt{5})/2$．

ii) $\phi_\lambda(1,x+\beta f)$：$A=2$，$B(M)=2M$，$C=1000$，$p=2$．

iii) 相交弦I.F.：$A=4$，$B(M)=2M$，$C=1000$，$p=1+\sqrt{2}$．

iv) $\varphi_\mu(2,1)$：$A=5$，$B(M)=2M$，$C=1000$，$p=1+\sqrt{3}$．

v) $\varphi_\mu(3,1)$：$A=11$，$B(M)=3M$，$C=1000$，$p=2^{\prime}1+\sqrt{2})$．

**) $\Psi(x)=x-\frac{f}{f'}\left\{\frac{f[x-f/f']-f}{2f[x-f/f'-]f}\right\}$，它由〔1〕中给出，更完整的论述见〔4〕．

表 3 诸 I.F. 渐近性态比较

(a) 渐近效能比较

M值	弦截I.F.	$\phi_\lambda(1,x+\beta f)$	相交弦I.F.	$\varphi_\mu(2,1)$	$\varphi_\mu(3,1)$
8	20.90	16.72	19.14	20.79	19.54
9	19.00	15.05	17.40	18.98	17.99
10	17.42	13.68	15.95	17.46	16.68
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
23	8.3595	6.2715	7.6555	8.5586	8.5476
24	8.0380	6.0206	7.3611	8.2356	8.2386
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
84	2.4301	1.7708	2.2254	2.5231	2.6000
85	2.4022	1.7502	2.1999	2.4942	2.5707

(b) 最高渐近效能区域

	弦截I.F.	$\phi_\lambda(1,x+\beta f)$	相交弦I.F.	$\varphi_\mu(2,1)$	$\varphi_\mu(3,1)$
收敛阶	1.618	2	2.414	2.732	4.828
最佳渐近区域	$M\leqslant 9$	╲	╲	$10\leqslant M\leqslant 23$	$24\leqslant M\leqslant 85$

最后，我们来考虑如下简单的数值实例：即求函数[5]

$$f(x)=x^3-2x-5$$

在 $x_0=2$ 附近的实零点。其准确结果是

$$\alpha=2.0945514815423265 91\cdots$$

取 $x_{-1}=2.2$，选择上述几种I.F.进行试算：

由 Newton-Raphson I.F. 得出

$$x_2\doteq 2.0945681$$

由相交弦I.F.得出

$$x_2\doteq 2.0945514785559280$$

由 $\varphi_\mu(2,1)$ 得出

$$x_2\doteq 2.0945514815425233$$

由 $\phi_\mu(1,x-\frac{1}{10}f)$ 得出

$$x_2\doteq 2.094551475636102$$

由 $\phi_\mu(2,x-\frac{1}{10}f)$ 得出

$$x_2\doteq 2.0945514815423265.$$

参　考　文　献

〔1〕 Ralston, A., Wilf, H.S., Mathematical Methods for Digital Computers, V. II, John Wiley & Sons, Inc., 1968.
〔2〕 陈为雄，计算数学，3(1981)，2.
〔3〕 林　群，厦门大学学报(自然科学版)，21(1982)，2.
〔4〕 张景中，计算数学，2(1980)，4.
〔5〕 Ostrowski, A.M., Solution of Equations and Systems of Equations, 1960.

A CLASS OF ITERATIVE METHODS OF HIGH ORDER WITHOUT COMPUTING DERIVATIVES

Lin Qun
(Xiamen University)

Abstract

In this paper, some classes of multipoint I. F. (iterative function) are constructed. To find out the real zeropoint α of transcendental function $f(x)$, only m new informations of f value are needed to compute for each step while the order of its convergence is not lower than 2^{m-1}. These classes are superior to usual I.F., particularly to the case in which the calculation of the value of derivative is inconvenient. In addition, some construction formulas of I.F. are presented.