第21卷 第2期 厦门大学学报自然科学版 Vol.21 No. 2
1982年5月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS AMOIENSIS May 1982

•简报•

求解超越方程的相交弦方法*

林 群
(数学系学生)

文[1]给出了求解超越方程的多种方法，其中Newton-Raphson法、弦截法和Muller法为最常用，它们在实用上各有优缺点。为获得更好方法，[2]中提出了称为平行弦法的改进程序，它不必计算导数值而具有2阶速率，因此优于其它方法。

本文在平行弦法的基础上提出一种相交弦方法，不仅在程序上较平行弦法为简，而且收敛速率增加为$1+\sqrt{2}$。

设$f(x)$为实变量的实值函数且具有实零点α，用$f(u,v)$表示$f(x)$的一阶差商，即

$$f(u,v)=\frac{f(u)-f(v)}{u-v}$$

若x_n,x_{n-1}为α的近似值，令

$$\begin{cases} y_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f(x_n,x_{n-1})} \\ x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f(x_n,y_{n+1})} \end{cases} \tag{1}$$

以确定α的新的近似值，这样(1)式便定义了相交弦程序。可见，程序(1)较平行弦法简单些。但下述定理说明，(1)式定义的迭代序列在一定条件下是收敛的，且收敛速率为$1+\sqrt{2}\approx2.414$。由于此法不必计算导数值，因而尤适用于导数值不便使用的情形。

以下给出相交弦法的收敛性定理及数值实例。

定理 记$E=\{x|\ |x-\alpha|<\delta\}$，且设函数$f(x)$满足下述条件：

(i) 对任意$u,v\in E$，有$|f(u,v)|\geqslant m$；

(ii) 对任意$u,v,w\in E$，有$|f(u,v)-f(u,w)|\leqslant M|u-w|$；

(iii) 存在常数$0<q<1$，使$M\delta<mq$。

则对任意选定的初始值$x_0,x_{-1}\in E$，(1)式定义的所有$x_n,y_n\in E(n=1,2,\cdots)$且迭代序列$\{x_n\}$收敛于$\alpha$，并有偏差估计：

* 本文承李文清、陈传淡和陈文忠等老师热情指导，特致衷心的谢意。

$$|x_n-\alpha|<(m/M)q^{\alpha_n} \tag{2}$$

式中 $\{\alpha_n\}(n=-1,0,1,\cdots)$由下式确定：

$$\alpha_n=\frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^{n+1}+(1-\sqrt{2})^{n+1}] \tag{3}$$

证明：由（1）式可得如下的误差递推关系：

$$|y_n-\alpha|=\left|\frac{f(x_{n-1},x_{n-2})-f(x_{n-1},\alpha)}{f(x_{n-1},x_{n-2})}(x_{n-1}-\alpha)\right|\leqslant\frac{M}{m}|x_{n-1}-\alpha|\cdot|x_{n-2}-\alpha| \tag{4}$$

$$|x_n-\alpha|=\left|\frac{f(x_{n-1},y_n)-f(x_{n-1},\alpha)}{f(x_{n-1},y_n)}(x_{n-1}-\alpha)\right|\leqslant\frac{M}{m}|y_n-\alpha|\cdot|x_{n-1}-\alpha| \tag{5}$$

首先以归纳法证明不等式：

$$|y_n-\alpha|<\delta \quad 及 \quad |x_n-\alpha|<\delta \tag{6}$$

从而所有的 $x_n,y_n\in E$ $(n=1,2,\cdots)$。

当$n=1$时，由(4),(5)及(iii)式易证(6)式成立，设(6)式当$n\leqslant l$时成立，而当$n=l+1$时依归纳假设有：

$$|y_{l+1}-\alpha|<\frac{M}{m}\delta^2<\delta$$

$$|x_{l+1}-\alpha|<\frac{M}{m}\delta\,|y_{l+1}-\alpha|<q\delta<\delta$$

从而对所有的n，(6)式成立。

其次，命$\{\alpha_n\}$ $(n=0,1,\cdots)$满足差分方程：

$$\begin{cases}\alpha_{n+1}=2\alpha_n+\alpha_{n-1}\\ \alpha_{-1}=\alpha_0=1\end{cases} \tag{7}$$

由定义（7）及归纳法证明不等式（2）：

当$n=1$时，应用(4),(5),(6)及(iii)得：

$$|x_1-\alpha|<\left(\frac{M}{m}\delta\right)^2\delta<\frac{m}{M}q^3$$

故（2）式成立。现设（2）式当$n\leqslant l$时成立，而证明当$n=l+1$时也成立。由归纳假设和(4),(5),(7),(iii)式，有：

$$\begin{aligned}|x_{l+1}-\alpha|&\leqslant\left(\frac{M}{m}\right)^2|x_l-\alpha|^2|x_{l-1}-\alpha|\\&=\frac{m}{M}\left(\frac{M}{m}|x_l-\alpha|\right)^2\left(\frac{M}{m}|x_{l-1}-\alpha|\right)\\&<\frac{m}{M}q^{2\alpha_l+\alpha_{l-1}}=\frac{m}{M}q^{\alpha_{l+1}}\end{aligned}$$

（2）式证毕。

再次求出 α_n 的值(3)。设差分方程（7）的解为 $\alpha_n=\lambda^{n+1}(n=-1,0,1,\cdots)$ 则 λ 满足二次方程：

$$\lambda^2-2\lambda-1=0$$

其两相异根为：

$$\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$$

于是，差分方程（7）的通解

$$\alpha_n=C_1(1+\sqrt{2})^{n+1}+C_2(1-\sqrt{2})^{n+1} \tag{8}$$

其中常数 C_1，C_2 由（7）式的初始条件确定，它们满足方程组：

$$\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ (1+\sqrt{2})C_1+(1-\sqrt{2})C_1=1 \end{cases}$$

解得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$，且代入（8）式得 α_n 的值，从而证明了偏差估计式（2）。

由（8）式知，当 $n\to\infty$ 时，$\alpha_n\to\infty$ 且（2）式右端趋于零，故序列 $\{x_n\}$ 收敛于 α。定理证毕。

最后仍举[2]中述及的数值例子，比较诸方法的收敛速率。

求 $f(x)=x^3-2x-5=0$ 在 $x_0=2$ 附近的实根[3]。

为与平行弦法对比，取 $x_{-1}=2.2$. 由[2]知方程的解 $\alpha\in(2,\ 2.2)$。易证，$f(x)$ 满足上述定理的条件。故由相交弦法算出迭代序列

$$x_1=2.094861;$$

$$x_2=2.09455148$$

而由[2]知，用平行弦法算出序列

$$x_1=2.094495;$$

$$x_2=2.09455131$$

此外，由 Newton—Raphson 法算出序列

$$x_2=2.0945681$$

又 Muller 法算出序列

$$x_2=2.0944925$$

而准确结果[3]是：

$$\alpha=2.094551481542326591482387\cdots$$

由上可见，用相交弦法算出的 x_2 准确到小数点后8位，平行弦法则是6位，而 Muller 法与 Newton—Raphson 法仅分别为4位和3位。因此认为相交弦法有较高敛速。

参考文献

[1] Ralston, A., Wilf, H. S., *Mathematical methods for digital computers*, V. II, John Wiley & sons, Inc., 1968.

[2] 陈为雄，解超越方程的平行弦方法，计算数学，3 (1981), 2.

[3] Ostrowski, A. M., *Solution of Equations and Systems of Equations*, 1960.

The Intersecting Chord Method for Solving Transcendental Equations

Lin Qun

(Math. Depart.)

Abstract

This paper proposes a iteration (1) called intersecting chord method, which can be used to solve the transcendental equations. In using this formula, it is not necessary to compute the values of derivative for each step, and $1+\sqrt{2}$ is the convergence rate. The method(1) therefore is better than the Newton-Raphson method, the Muller method and the parallel secant method presented in [2].