第 41 卷第 21 期　　数学的实践与认识　　Vol.41, No. 21
2011年 11 月　　MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY　　Nov., 2011

对流扩散方程三角形有限元解的一致估计

林 群[1], 王 宏[2], 周俊明[3], 张书华[4], 陈竑焘[5]

(1. 中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100190)
(2. 南卡罗莱纳大学 数学系, 南卡罗莱纳州 29208)
(3. 河北工业大学 理学院, 天津 300160)
(4. 天津财经大学 数学经济研究中心, 天津 300222)
(5. 厦门大学 数学科学学院, 厦门 361005)

摘　要: 利用三角形线性元的积分恒等式, 给出了二维非定常对流扩散方程的半离散有限元解和真解的一致最优误差估计, 即误差与 ε 无关, 而仅与右端 f 和初值 u_0 有关.

关键词: 三角形线性元; 积分恒等式; 一致误差估计; 半离散 Galerkin 方法

1 引言

本文考虑对流扩散方程

$$\begin{cases} u_t+\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla u-\varepsilon\nabla\cdot(\alpha(\mathbf{x},t)\nabla u)=f(\mathbf{x},t), & (\mathbf{x},t)\in\Omega\times(0,T] \\ u(\cdot,0)=u_0, \quad \text{in } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$, $\Gamma=\partial\Omega$ 为 Ω 的边界, 空间变量 $\mathbf{x}=(x_1,x_2),\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2)$ 为速度场, $\alpha(x,t)$ 表示扩散系数, 并且满足 $0<\alpha_{\min}\le\alpha(x,t)\le\alpha_{\max}<+\infty$, $(x,t)\in\Omega\times[0,T]$, 参数 $0<\varepsilon\ll 1$. 定解条件取为周期边界条件, 这就要求方程 (1) 的系数函数也是空间的周期函数.

该种类型方程有广泛的应用背景 [1-3], 同时也是一种比较典型的数学问题. 本文旨在探讨半离散的有限元逼近与真解的误差. 所谓的一致最优估计, 即指误差与 ε 无关, 而仅与右端项 f 及初值 u_0 有关.

文中所用的空间及范数, 均指标准的形式 [4], 使用时不一一做说明.

2 半离散 Galerkin 有限元方法

假定将区域 Ω 做均匀一致三角形剖分 (如图 1).

小直角三角形直角边长度为 $2h_1$ 和 $2h_2$. $H_E^1(\Omega)\subset H^1(\Omega)$ 是由 Ω 上的周期函数构成的空间. $V_h\subset H_E^1$ 表示在该剖分下的连续分片线性函数空间, 且满足周期边界条件. 并设 P_k 是 k 次多项式的集合.

收稿日期: 2009-11-17
资助项目: "973 创新计算"(2005CB321700, 2005CB321701); 国家重点基础研究发展项目 (2007CB814906); 国国家自然科学基金 (10471103, 10771158)

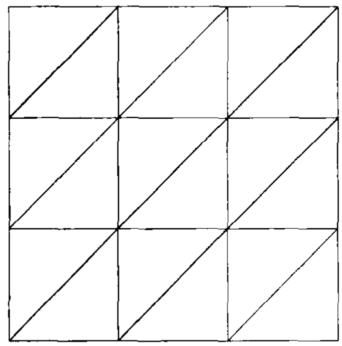

图 1 剖分示意图

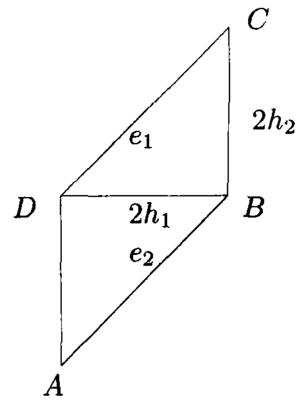

图 2 公共边单元

方程 (1) 所对应的变分方程：求函数 $u \in H_E^1$, 使得

$$(u_t, v) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u, v) + \varepsilon(\alpha \nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\ t > 0 \tag{2}$$

相应半离散有限元逼近就是换到子空间 V_h 中, 求解 $u_h(t) := u_h(\cdot, t) \in V_h$:

$$(u_{h,t}, v) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla u_h, v) + \varepsilon(\alpha \nabla u_h, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in V_h,\ t > 0 \tag{3}$$

3 误差分析

本节我们将讨论半离散有限元逼近与真解的误差：

$$e = u_h - u$$

由 (3) 减去 (2), 可得误差方程

$$(e_t, v) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla e, v) + \varepsilon(\alpha \nabla e, \nabla v) = 0 \qquad v \in V_h \tag{4}$$

为估计误差 e, 需要做分解

$$e = (u_h - u_I) - (u - u_I) := \theta - \rho$$

并取 $v = \theta \in V_h$:

$$\begin{aligned}
&(\theta_t, \theta) + \varepsilon(\alpha \nabla \theta, \nabla \theta) \\
=& \int_\Omega (u_t - u_{I,t})\theta + \varepsilon \int_\Omega \alpha \nabla(u - u_I)\nabla\theta + \int_\Omega \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla(u - u_I)\theta - \int_\Omega (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla\theta)\theta \\
=& I_1 + I_2 + I_3 + I_4
\end{aligned} \tag{5}$$

由插值的性质知

$$|I_1| \le Ch^2 ||u_t||_2 ||\theta|| \le ||\theta||^2 + Ch^4 ||u_t||_2^2 \tag{6}$$

而 $I_4 = \frac{1}{2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\beta}, \theta^2)$ 被 $||\theta||^2$ 估计, 剩下的 I_2 和 I_3 需要用到积分恒等式 [6].

4 积分恒等式

引理 1 如果 $u \in H^3(\Omega), v \in V_h$, 则

$$\left| \int_\Omega \nabla(u - u_I) \cdot \nabla v \right| \le Ch^2 |u|_3 |v|_1 \tag{7}$$

证明 $C^3(\bar{\Omega})$ 在 $H^3(\Omega)$ 中是稠密的, 因此只需要考虑 $u\in C^3(\bar{\Omega})$ 即可. 注意到分片函数 $\frac{\partial v}{\partial x_1}$ 在一对单元 $e=e_1\cup e_2$ 上相等 (如图 2), 因而积分不等式是建立在单元对上的. 为表达方便, 不妨设 BD 的中点为坐标系原点, 则

$$\int_{e_2}\frac{\partial(u(x_1,x_2)-u_I(x_1,x_2))}{\partial x_1}=-\int_{e_1}\frac{\partial(u(-x_1,-x_2)-u_I(-x_1,-x_2))}{\partial x_1} \tag{8}$$

若记

$$w(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)-u(-x_1,-x_2)$$

此时

$$w_I(x_1,x_2)=u_I(x_1,x_2)-u_I(-x_1,-x_2)$$

那么有

$$\begin{aligned}\left|\int_e\frac{\partial(u-u_I)}{\partial x_1}\right|&=\left|\int_{e_1}\frac{\partial(u-u_I)}{\partial x_1}+\int_{e_2}\frac{\partial(u-u_I)}{\partial x_1}\right|\\&=\left|\int_{e_1}\frac{\partial(u-u_I)}{\partial x_1}-\int_{e_1}\frac{\partial(u(-x_1,-x_2)-u_I(-x_1,-x_2))}{\partial x_1}\right|\\&=\left|\int_{e_1}\frac{\partial\{[u(x_1,x_2)-u(-x_1,-x_2)]-[u_I(x_1,x_2)-u_I(-x_1,-x_2)]\}}{\partial x_1}\right|\\&=\left|\int_{e_1}\frac{\partial(w-w_I)}{\partial x_1}\right|\\&\le Ch\mid w\mid_{2,\infty,e_1}\operatorname{meas}(e_1)\\&\le Ch^2\mid u\mid_{3,\infty,e}\operatorname{meas}(e_1)\end{aligned} \tag{9}$$

和

$$\left|\int_e\frac{\partial(u-u_I)}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}\right|\le Ch^2\mid u\mid_{3,\infty,e}|v|_{1,1,e} \tag{10}$$

从 (10) 可以看出

$$\int_e\frac{\partial(u-u_I)}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}dx=0,\ \forall u\in P_2(e),\forall\frac{\partial v}{\partial x_1}\in P_0(e) \tag{11}$$

所以从 Bramble-Hilbert 引理得到

$$\left|\int_e\frac{\partial(u-u_I)}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}\right|\le Ch^2\mid u\mid_{3,e}|v|_{1,1,e} \tag{12}$$

那么, 对单元求和可知

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega\frac{\partial(u-u_I)}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}\right|&\le\sum_e\left|\int_e\frac{\partial(u-u_I)}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}\right|\\&\le Ch^2|u|_3|v|_{1,1}\\&\le Ch^2|u|_3|v|_1\end{aligned} \tag{13}$$

这里由周期边界条件可知与边界相交的三角形网格恰好能两两组合成图 2 所示的平行四边形. 类似可得

$$\left|\int_\Omega\frac{\partial(u-u_I)}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right|\le Ch^2|u|_3|v|_1 \tag{14}$$

联立 (13)(14), 引理 1 得证.

引理 2 设 $\alpha(\cdot,t)\in W^{1,\infty}(\Omega),u\in H^3(\Omega)$. 如果 $v\in V_h$, 那么

$$\left|\int_\Omega\alpha\nabla(u-u_I)\cdot\nabla v\right|\le Ch^2\|u\|_3|v|_1 \tag{15}$$

证明 令 $\bar{\alpha}|_e := \frac{1}{4h_1h_2}\int_e \alpha(x,t)\mathrm{d}x$ 是 α 在单元对上的平均, 这里 $e = e_1 \cup e_2$(如图 2). 那么, 由 (13) 可知

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \alpha \frac{\partial(u-u_I)}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}\right| \\
\leq &\left|\sum_e \int_e \bar{\alpha}\frac{\partial(u-u_I)}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}\right| + \left|\sum_e \int_e (\alpha-\bar{\alpha})\frac{\partial(u-u_I)}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}\right| \\
\leq &Ch^2(|u|_3 + ||u||_2)|v|_1 \\
\leq &Ch^2||u||_3|v|_1
\end{aligned} \tag{16}$$

这里同样用到周期边界条件. 类似地有

$$\left|\int_\Omega \alpha \frac{\partial(u-u_I)}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right| \leq Ch^2||u||_3|v|_1 \tag{17}$$

联立 (16)(17), 引理 2 得证.

引理 3 设 $u \in H^3(\Omega)$, 如果 $v \in V_h$, 那么

$$\int_\Omega (u-u_I)\frac{\partial v}{\partial x_1} = O(h^2)|u|_3||v||_0 \tag{18}$$

证明 $C^3(\bar{\Omega})$ 在 $H^3(\Omega)$ 中是稠密的, 因此只需要考虑 $u \in C^3(\bar{\Omega})$ 即可. 由泰勒公式, 如果 $(x_1, x_2) \in e$, 这里 $e = e_1 \cup e_2$(如图 2). 简便起见, 设 BD 中点是原点, 那么

$$u = u(0) + \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}(0)x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_ix_j + O(h^3)|u|_{3,\infty,e} \tag{19}$$

经计算, 可得

$$\int_e u = 4h_1h_2u(0) + \frac{2}{3}h_1^3h_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(0) + \frac{4}{3}h_1^2h_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(0) + \frac{4}{3}h_1h_2^3\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(0) + O(h^5)|u|_{3,\infty,e} \tag{20}$$

又由于

$$\begin{aligned}
\int_e u_I =&\{\frac{1}{3}[u(A)+u(C)] + \frac{2}{3}[u(B)+u(D)]\}|e_1| \\
=&4h_1h_2u(0) + 2h_1^3h_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(0) + \frac{8}{3}h_1^2h_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(0) + \\
&\frac{8}{3}h_1h_2^3\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(0) + O(h^5)|u|_{3,\infty,e}
\end{aligned} \tag{21}$$

这里 A, B, C, D 如图 2 所示. 因此

$$\int_e (u-u_I) = -\frac{1}{3}\int_e (h_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + h_1h_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + h_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}) + O(h^5)|u|_{3,\infty,e} \tag{22}$$

和

$$\left|\int_e (u-u_I)\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{1}{3}\int_e (h_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + h_1h_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + h_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2})\frac{\partial v}{\partial x_1}\right| \leq Ch^3|u|_{3,\infty,e}|v|_{1,1,e} \tag{23}$$

从 (23) 立刻看出

$$\begin{aligned}
&\int_e (u-u_I)\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{1}{3}\int_e (h_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + h_1h_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + h_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2})\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \\
&\forall u \in P_2(e), \forall \frac{\partial v}{\partial x_1} \in P_0(e)
\end{aligned} \tag{24}$$

所以从 Bramble-Hilbert 引理得到

$$\left|\int_e (u-u_I)\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{1}{3}\int_e (h_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + h_1h_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + h_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2})\frac{\partial v}{\partial x_1}\right| \leq Ch^3|u|_{3,e}|v|_{1,1,e} \tag{25}$$

即

$$\int_e (u-u_I)\frac{\partial v}{\partial x_1} = -\frac{1}{3}\int_e (h_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + h_1h_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2} + h_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2})\frac{\partial v}{\partial x_1} + O(h^3)|u|_{3,e}|v|_{1,1,e} \tag{26}$$

将 (26) 对单元求和, 并分部积分得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u-u_I)\frac{\partial v}{\partial x_1} &= \sum_e \int_e (u-u_I)\frac{\partial v}{\partial x_1}\\ &=\frac{1}{3}\int_\Omega (h_1^2\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} + h_1h_2\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2\partial x_2} + h_2^2\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2^2})v + O(h^3)|u|_3|v|_1\\ &=O(h^2)|u|_3||v||\end{aligned} \tag{27}$$

这里用到周期边界条件和逆不等式. 引理 3 得证.

与引理 2 类似, 引理 3 可推广为

引理 4 设 $\boldsymbol{\beta}(\cdot,t)\in\left(W^{1,\infty}(\Omega)\right)^2, u\in H^3(\Omega)$. 如果 $v\in V_h$, 那么

$$\int_\Omega \boldsymbol{\beta}(u-u_I)\cdot\nabla v = O(h^2)||u||_3||v|| \tag{28}$$

5 稳定性估计

下面在不同的正则性假设下, 给出问题 (1) 的一致先验稳定性估计, 即与 ε 无关 [1].

引理 5 设 $\alpha\in L^\infty(0,T;W^{k+1,\infty}(\Omega))$, $\boldsymbol{\beta}\in\left(L^\infty(0,T;W^{k+1,\infty}(\Omega))\right)^2$, $u_0\in H^k(\Omega)$ 和 $f\in L^2(0,T;H^k(\Omega))$, 那么有

$$\|u(\cdot,t)\|_k \le C\left(\|u_0\|_k + \left(\int_0^t \|f\|_k^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\right),\ 0\le t\le T \tag{29}$$

又如果 $\alpha\in L^\infty(0,T;W^{4,\infty}(\Omega))$, $\boldsymbol{\beta}\in\left(L^\infty(0,T;W^{4,\infty}(\Omega))\right)^2$, $u_0\in H^3(\Omega)$ 和 $f\in L^2(0,T;H^3(\Omega))$, 那么

$$\int_0^t \|u_t\|_2^2\mathrm{d}s \le C\left(\|u_0\|_3^2 + \int_0^t \|f\|_3^2\mathrm{d}t\right),\ 0\le t\le T \tag{30}$$

上述估计中的 C 都只依赖于 $\alpha,\boldsymbol{\beta}$, 而与 ε 无关.

6 主要结果

定理 设 $\alpha\in L^\infty(0,T;W^{4,\infty}(\Omega))$, $\boldsymbol{\beta}\in\left(L^\infty(0,T;W^{4,\infty}(\Omega))\right)^2$, $u_0\in H^3(\Omega)$ 和 $f\in L^2(0,T;H^3(\Omega))$, 如果 $u(t)$ 和 $u_h(t)$ 分别是 (2) 和 (3) 的解, 那么

$$||u(t)-u_h(t)|| \le Ch^2\left(\|u_0\|_3 + \left(\int_0^t \|f\|_3^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\right),\ 0\le t\le T \tag{31}$$

这里常数 C 与 u,ε,h 均无关.

证明 由于

$$||\rho(t)|| \le Ch^2||u(t)||_2 = Ch^2||u_0 + \int_0^t u_t\mathrm{d}s||_2 \le Ch^2\left\{||u_0||_2 + \left(\int_0^t ||u_t||_2^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{32}$$

因此关键问题是估计 $\theta(t)$.

取 $v=\theta$, 应用分部积分, 可知

$$|I_3| \le |\int_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{\beta}\rho\theta| + |\int_\Omega \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla\theta\rho|$$

$$=|\int_\Omega \mathrm{div}\beta\rho\theta| + |\int_\Omega \beta_1\rho\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \beta_2\rho\frac{\partial\theta}{\partial x_2}| \tag{33}$$

直接应用插值误差估计和引理 4, 立即可知

$$|I_3| \le C||\rho||||\theta|| + O(h^2)||u||_3||\theta|| \le C||\theta||^2 + Ch^4||u||_3^2 \tag{34}$$

由引理 2, 知

$$\begin{aligned}|I_2| \le& C\varepsilon h^2||u||_3|\theta|_1 \le \frac{1}{2}\varepsilon\alpha_{min}|\theta|_1^2 + C\delta\varepsilon h^4||u||_3^2\\ \le&\frac{1}{2}\varepsilon(\alpha\nabla\theta,\nabla\theta) + Ch^4||u||_3^2\end{aligned} \tag{35}$$

注意到 $\frac{1}{2}\varepsilon(\alpha\nabla\theta,\nabla\theta)$ 被 (5) 左端吸收, 且吸收后剩余的 $\frac{1}{2}\varepsilon(\alpha\nabla\theta,\nabla\theta)\ge 0$, 所以由 (5)、(6)、(34) 及 (35) 式, 得到

$$(\theta_t,\theta) \le C||\theta||^2 + Ch^4(||u_t||_2^2 + ||u||_3^2) \tag{36}$$

两端积分, 注意到 $||\theta(0)|| = ||u_h(0) - u_I(0)|| = 0$, 可知

$$||\theta(t)||^2 \le Ch^4\int_0^t(||u_t||_2^2 + ||u||_3^2)\mathrm{d}s + C\int_0^t||\theta||^2\mathrm{d}s,\quad 0\le t\le T \tag{37}$$

应用 Gronwall 不等式, 得到

$$||\theta(t)|| \le Ch^2\left(\int_0^t(||u_t||_2^2 + ||u||_3^2)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \tag{38}$$

联立 (32)(38) 和引理 5, 有

$$\begin{aligned}||u(t)-u_h(t)|| \le& Ch^2\left\{||u_0||_2 + \left(\int_0^t(||u_t||_2^2 + ||u||_3^2)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\\ \le& Ch^2\left(||u_0||_3 + \left(\int_0^t||f||_3^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\right)\end{aligned} \tag{39}$$

这里 $0\le t\le T$.

参考文献

[1] Wang H and WangK. Uniform estimates for Eulerian-Lagrangian methods for singularly perturbed time-dependent problems[J]. SIAM J Numer Anal, 2007(45): 1305-1329.

[2] Wang K, Wang H and Al-Lawatia M. An Eulerian-Lagrangian discontinuous Galerkin method for transient advection-diffusion equations[J]. Numerical Methods for PDEs, 2007(23): 1343-1367.

[3] Wang H. An optimal-order error estimate for an ELLAM scheme for two-dimensional linear advection-diffusion equations[J]. SIAM J Numer Anal, 2000(37): 1338-1368.

[4] Adams R A. Sobolev Spaces[M]. Amsterdam Academic Pr./An imprint of Elsevier Science, 2003.

[5] Larsson S and Thomée V. Partial Differential Equations with Numerical Methods(影印版)[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[6] 林群, 周俊明, 陈竑焘. 椭圆问题四面体线性元的超逼近与外推 [J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(15): 200-208.

[7] 林群, 严宁宁. 高效有限元构造与分析 [M]. 保定: 河北大学出版社, 1996.

[8] Lin Q and Lin J f. Finite Element Methods:Accuracy and Improvement[M]. Beijing: Science Press, 2006.

[9] 朱起定, 林群. 有限元超收敛理论 [M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1989.

A Uniform Error Estimate for Triangular Finite Element Solution of Advection-diffusion Equations

LIN Qun [1], WANG Hong [2], ZHOU Jun-ming [3], ZHANG Shu-hua [4], CHEN Hong-tao [5]

(1. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Science, Beijing 100190, China)
(2. Department of Mathematics, University of South Carolina, South Carolina 29208, USA)
(3. School of Sciences, Hebei University of Technology, Tianjin 300160, China)
(4. Research Center of Mathematical Economics, Tianjin University of Finance and Economics, Tianjin 300222, China)
(5. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: In this paper, the authors use the integral identities of triangular linear elements to prove a uniform optimal-order error estimate for the semi-discrete triangular finite element solution of the two-dimensional time-dependent advection-diffusion equations, which depends only on the initial and right data but not on the scaling parameter ε.

Keywords: triangular linear element; integral identities; uniform error estimate; semi-discrete Galerkin method