

对流扩散方程特征线三角元法的一致估计

陈竑焘¹, 林群², 周俊明³

- (1. 厦门大学 数学科学学院, 厦门 361005)
- (2. 中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100190)
- (3. 河北工业大学 理学院, 天津 300160)

摘要: 利用三角形线性元的积分恒等式, 给出了二维非定常对流占优扩散方程的特征线有限元解和真解的一致最优估计, 并利用插值后处理算子, 得到了有限元解梯度的一致超收敛估计, 即只与初值和右端项有关, 而与 ε 无关.

关键词: 三角形线性元; 积分恒等式; 一致误差估计; 修正特征线法; 插值后处理算子

1 引言

对流占优扩散方程来源于很多物理问题^[1-3], 此类问题的分析和求解往往具有许多困难^[3]. 近年来出现了很多求解此类方程的数值方法, 特征线有限元法就是其中比较有效的一种, 它将对流项和时间导数合并, 将控制方程改写为不含对流项的抛物方程(对称化), 再对其应用有限元方法求解, 并允许使用较大的时间步长^[4]. 相应的最优阶误差估计也已经得到^[5-6]. 然而这些估计中的常数都依赖于小参数 ε , 当 ε 趋于 0 时, 这些估计就失效了. 于是, 这些估计尝试被改进为常数与 ε 无关的一致估计^[3,7-8]. 本文利用积分恒等式, 给出了特征线三角有限元解的 ε 一致最优估计, 并利用插值后处理算子^[9], 得到了有限元解梯度的 ε 一致超收敛估计.

我们考虑如下模型问题:

$$\begin{aligned} u_t + \mathbf{V} \cdot \nabla u - \varepsilon \nabla \cdot (\alpha \nabla u) &= f, & \text{in } \Omega \times (0, T] \\ u(\cdot, 0) &= u_0, & \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\Omega = (a, b) \times (c, d)$, $\Gamma = \partial\Omega$ 为 Ω 的边界, $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ 为速度场, α 表示扩散系数, 并且满足 $0 < \alpha_{\min} \leq \alpha(x, y, t) \leq \alpha_{\max} < +\infty$, $(x, y, t) \in \Omega \times [0, T]$, 参数 $0 < \varepsilon \ll 1$. 问题 (1) 满足周期边界条件, 这要求其系数也具有周期性.

2 预备知识

本节我们主要介绍特征线法和修正特征线法, 并给出将要用到的索伯列夫空间及其范数, 最后给出一种插值后处理算子.

收稿日期: 2010-11-17

资助项目: “973 创新计算”(2005CB321700, 2005CB321701); 国家重点基础研究发展项目 (2007CB814906); 中国国家自然科学基金 (10471103, 10771158)

2.1 特征线法和修正特征线法

首先, 对时空 $\Omega \times [0, T]$ 做一致三角形剖分 (如图 1), 空间上每个三角单元直角边长分别是 $2h_1$ 和 $2h_2$, 时间步长为 $\Delta t := T/N$. 并假设 h_1/h_2 有一致的上下界, 记 $h := \max(h_1, h_2)$. 由于特征线法使用时间步格式, 因此我们只需要在当前时间区间 $[t_{n-1}, t_n]$ 上定义该方法. 这样当时间层 t_{n-1} 已知时, 就可以计算 t_n 上的解.

在特征线法中, 方程 (1) 中的时间导数和对流项被合并, 形成的特征线方向记作 $\gamma = \gamma(x, y, t)$, 这里

$$\psi = (1 + |V|)^{1/2}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{V_1}{\psi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{V_2}{\psi} \frac{\partial}{\partial y}$$

由于近似求解时间层 $t_n = n\Delta t$ 上的解, 从而考虑用沿近似特征线 $\gamma_n(t; x, y, t_n)$ 的向后差商来近似, 这就是修正特征线法, 如下:

$$\begin{aligned} & u_t(x, y, t_n) + \mathbf{V}(x, y, t_n) \cdot \nabla u(x, y, t_n) \\ &= \psi(x, y, t_n) \frac{du}{d\gamma}(x, y, t_n) \\ &= \frac{u(x, y, t_n) - u(x^*, y^*, t_{n-1})}{\Delta t} + \\ & \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{(x^*, y^*, t_{n-1})}^{(x, y, t_n)} \sqrt{(\gamma_{n1}(t) - x^*)^2 + (\gamma_{n2}(t) - y^*)^2 + (t - t_{n-1})^2} \frac{d^2 u}{d\gamma^2} d\gamma \end{aligned} \quad (2)$$

这里 $\gamma_n(t)$ 和 x^*, y^* (见下图 2) 被定义如下:

$$\begin{aligned} \gamma_{n1}(t) &= x - V_1(x, y, t_n)(t_n - t) \\ \gamma_{n2}(t) &= y - V_2(x, y, t_n)(t_n - t) \\ x^* &= \gamma_{n1}(t_{n-1}) = x - V_1(x, y, t_n)\Delta t \\ y^* &= \gamma_{n2}(t_{n-1}) = y - V_2(x, y, t_n)\Delta t \end{aligned} \quad (3)$$

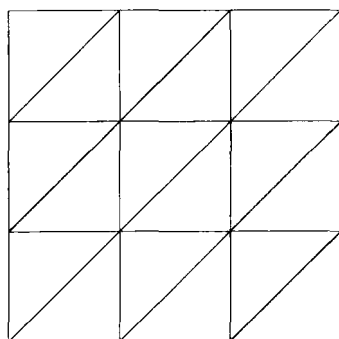


图 1 空间剖分 Γ_h

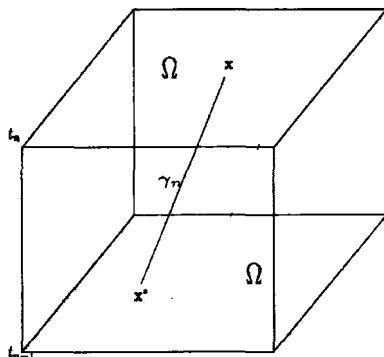


图 2 近似特征线 γ_n

令 $H_E^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ 中的函数均满足周期边界条件. 我们将 (2) 带入 (1), 两边乘以试探

函数 $w(x, y) \in H_E^1(\Omega)$, 再在 Ω 上积分得到 (1) 的特征线参考方程:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{u(x, y, t_n) - u(x^*, y^*, t_{n-1})}{\Delta t} w(x, y) dx dy + \\ & \varepsilon \int_{\Omega} \alpha(x, y, t) \nabla u(x, y, t_n) \nabla w(x, y) dx dy \\ & = \int_{\Omega} f(x, y, t_n) w(x, y) dx dy - \frac{1}{\Delta t} E(u, w) \end{aligned} \quad (4)$$

由 (2) 易知局部截断误差为:

$$\begin{aligned} E(u, w) &= \int_{\Omega} w(x, y) \int_{(x^*, y^*, t_{n-1})}^{(x, y, t_n)} \\ & \quad \cdot \sqrt{(\gamma_{n1}(t) - x^*)^2 + (\gamma_{n2}(t) - y^*)^2 + (t - t_{n-1})^2} \frac{d^2 u}{d\gamma^2} d\gamma dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

然后, 在空间剖分 Γ_h 上可以构造三角形线性元空间:

$$S_h(\Omega) = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v|_e \in P_1 \forall e \in \Gamma_h, v \text{ 满足周期边界条件}\}$$

这里 P_k 表示 k 次多项式的集合. 因此, 特征线法的离散形式为: 找 $u_h(\cdot, \cdot, t_n) \in S_h(\Omega)$, 对于 $n = 1, \dots, N$, 使得: 对任意 $w_h(x, y) \in S_h(\Omega)$ 满足

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{u_h(x, y, t_n) - u_h(x^*, y^*, t_{n-1})}{\Delta t} w_h(x, y) dx dy + \\ & \varepsilon \int_{\Omega} \alpha(x, y, t_n) \nabla u_h(x, y, t_n) \nabla w_h(x, y) dx dy \\ & = \int_{\Omega} f(x, y, t_n) w_h(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (6)$$

2.2 时空范数

定义空间范数为

$$\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left[\sum_{0 \leq m \leq k} \int_{\Omega} |D^m v|^p dx dy \right]^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < +\infty \\ \max_{0 \leq m \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{(x,y) \in \Omega} |D^m v|, & p = +\infty \end{cases}$$

那么 $W^{k,p}(\Omega) = \{v : \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} < +\infty\}$, 并简记 $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$; $H^0(\Omega) := L^2(\Omega)$.

对于上述定义的 Sobolev 空间 X , 引入带时间的 Sobolev 空间 [10]:

$$W^{k,p}(t_1, t_2; X) = \{v : \|\frac{\partial^m v}{\partial t^m}(\cdot, t)\|_X \in L^p(t_1, t_2), 0 \leq m \leq k, 1 \leq p \leq \infty\}$$

有范数如下:

$$\|v\|_{W^{k,p}(t_1, t_2; X)} = \begin{cases} \left[\sum_{m=0}^k \int_{t_1}^{t_2} \|\frac{\partial^m v}{\partial t^m}\|_X^p dt \right]^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < +\infty \\ \max_{0 \leq m \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{t \in [t_1, t_2]} \|\frac{\partial^m v}{\partial t^m}(\cdot, t)\|_X, & p = \infty. \end{cases}$$

如果函数 $v(x, t)$ 只在时间层 t_n 上有定义, 我们理解该函数 v 已经被常数扩展到时间区间 $[t_{n-1}, t_n]$, 即对于 $t \in (t_{n-1}, t_n)$, $v(x, t) = v(x, t_n)$. 于是我们可以引入离散范数:

$$\|v\|_{\hat{L}^q(0,T;X)} := \begin{cases} \left[\sum_{n=0}^N \|v(\cdot, t_n)\|_X^q \Delta t \right]^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < +\infty \\ \max_{0 \leq n \leq N} \|v(\cdot, t_n)\|_X, & q = +\infty \end{cases}$$

最后令 $v_I \in S_h(\Omega)$ 是 $v \in C(\Omega)$ 的分片线性插值, 有如下的估计 [10]

$$\begin{aligned} \|v_I - v\|_{H^k(\Omega)} &\leq Ch^{2-k}\|v\|_{H^2(\Omega)}, \forall v \in H^2(\Omega), k = 0, 1 \\ \|v_h\|_{H^1(\Omega)} + \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq Ch^{-1}\|v_h\|_{L^2(\Omega)}, \forall v_h \in S_h(\Omega) \end{aligned} \quad (7)$$

这里以及后面的 C 都是常数, 只是在不同的地方可以代表不同的常数.

2.3 插值后处理算子

现在将四个相邻的三角形合并成一个大三角形 $\tau = \cup_{i=1}^4 e_i$ (见图 3), 在这个大三角形上我们构造如下的插值后处理算子 $\Pi_{2h}^2 : C(\tau) \rightarrow P_2(\tau)$ [9].

$$\Pi_{2h}^2 v(Z_i) = v(Z_i), \quad i = 1, \dots, 6$$

其中 Z_i 是四个小三角形的所有顶点 (见图 3).

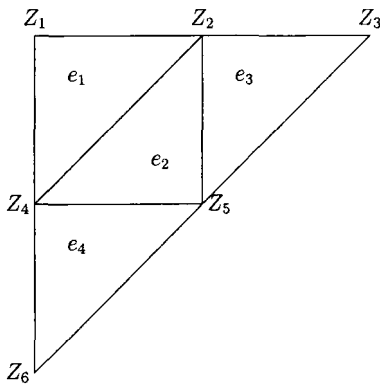


图 3 大单元

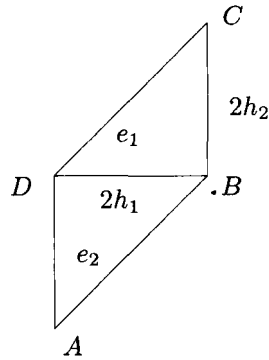


图 4 公共边单元

τ 容易证明该插值算子 Π_{2h}^2 有如下性质:

(a)
$$\|\Pi_{2h}^2 v - v\|_{l,\tau} \leq Ch^{3-l}\|v\|_{3,\tau}, \quad \forall v \in H^3(\tau), \quad l = 0, 1 \quad (8)$$

(b)
$$\|\Pi_{2h}^2 v\|_{l,\tau} \leq C\|v\|_{l,\tau}, \quad l = 0, 1, 2, \quad \forall v \in S_h \quad (9)$$

(c)
$$\Pi_{2h}^2 v_I = \Pi_{2h}^2 v \quad (10)$$

其中 $v_I \in S_h$ 是 v 在小三角形上的分片线性插值函数.

3 误差分析

下面我们就来分析特征线有限元解和真解的误差. 令

$$e_h := u_h - u = u_h - u_I + u_I - u = \theta - \rho \quad (11)$$

其中 $\theta = u_h - u_I, \rho = u - u_I$.

在 (4) 中, 令 $w(x, y) = w_h(x, y) \in S_h(\Omega)$, 再将 (6) 减去 (4), 得到误差方程:

$$\int_{\Omega} e_h(x, y, t_n) w_h(x, y) dx dy +$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \Delta t \int_{\Omega} \alpha(x, y, t_n) \nabla e_h(x, y, t_n) \nabla w_h(x, y) dx dy \\ &= \int_{\Omega} e_h(x^*, y^*, t_{n-1}) w_h(x, y) dx dy + E(u, w_h) \end{aligned} \quad (12)$$

我们将 (11) 代入上式, 且令 $w_h(x, y) = \theta(x, y, t_n)$, 然后将左边与 ρ 有关的项移至右边, 重写 (12) 如下:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \theta^2(x, y, t_n) dx dy + \\ & \varepsilon \Delta t \int_{\Omega} \alpha(x, y, t_n) |\nabla \theta(x, y, t_n)|^2 dx dy \\ &= \int_{\Omega} \theta(x^*, y^*, t_{n-1}) \theta(x, y, t_n) dx dy + \\ & \varepsilon \Delta t \int_{\Omega} \alpha(x, y, t_n) \nabla \rho(x, y, t_n) \nabla \theta(x, y, t_n) dx dy - \\ & \int_{\Omega} \rho(x^*, y^*, t_{n-1}) \theta(x, y, t_n) dx dy + \\ & \int_{\Omega} \rho(x, y, t_n) \theta(x, y, t_n) dx dy + E(u, \theta) \end{aligned} \quad (13)$$

下面考虑 (13) 右端的第三、四项. 由于

$$\begin{aligned} & \rho(x, y, t_n) - \rho(x^*, y^*, t_{n-1}) \\ &= \rho(x, y, t_n) - \rho(x, y, t_{n-1}) + \rho(x, y, t_{n-1}) - \rho(x^*, y^*, t_{n-1}) \end{aligned} \quad (14)$$

因此第三、四项可以重写成如下两项

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \rho(x^*, y^*, t_{n-1}) \theta(x, y, t_n) dx dy + \\ & \int_{\Omega} \rho(x, y, t_n) \theta(x, y, t_n) dx dy \\ &= \int_{\Omega} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \rho_t(x, y, t) dt \theta(x, y, t_n) dx dy + \\ & \int_{\Omega} (\rho(x, y, t_{n-1}) - \rho(x^*, y^*, t_{n-1})) \theta(x, y, t_n) dx dy \end{aligned} \quad (15)$$

将 (15) 代入 (13), 得到

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \theta^2(x, y, t_n) dx dy + \varepsilon \Delta t \int_{\Omega} \alpha(x, y, t_n) |\nabla \theta(x, y, t_n)|^2 dx dy \\ &= \int_{\Omega} \theta(x^*, y^*, t_{n-1}) \theta(x, y, t_n) dx dy + \varepsilon \Delta t \int_{\Omega} \alpha(x, y, t_n) \nabla \rho(x, y, t_n) \nabla \theta(x, y, t_n) dx dy + \\ & \int_{\Omega} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \rho_t(x, y, t) dt \theta(x, y, t_n) dx dy + \\ & \int_{\Omega} (\rho(x, y, t_{n-1}) - \rho(x^*, y^*, t_{n-1})) \theta(x, y, t_n) dx dy + E(u, \theta) \\ &:= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \end{aligned} \quad (16)$$

下面我们就来逐个估计 (16) 右端的五项:

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_{\Omega} \theta(x^*, y^*, t_{n-1}) \theta(x, y, t_n) dx dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|\theta(\cdot, t_n)\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta^2(x^*, y^*, t_{n-1}) dx dy \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} \|\theta(\cdot, t_n)\|^2 + \frac{1 + C\Delta t}{2} \|\theta(\cdot, t_{n-1})\|^2 \tag{17}$$

其中利用 x^*, y^* 的定义 (3), 以及变量替换的 Jacobi 行列式为 $1 + O(\Delta t)$. 这里常数 C 依赖于 $\|\mathbf{V}\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega)^2)}$.

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left| \int_{\Omega} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \rho_t(x, y, t) dt \theta(x, y, t_n) dx dy \right| \\ &\leq C\Delta t \|\theta(\cdot, t_n)\|^2 + C \|\rho\|_{H^1(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega))}^2 \\ &\leq C\Delta t \|\theta(\cdot, t_n)\|^2 + Ch^4 \|u\|_{H^1(t_{n-1}, t_n; H^2(\Omega))}^2 \end{aligned} \tag{18}$$

又由 E 的表达式 (5):

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq C(\Delta t)^{\frac{3}{2}} \|\theta(\cdot, t_n)\|_{L^2} \left\| \frac{d^2 u}{d\gamma^2} \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2)} \\ &\leq C\Delta t \|\theta(\cdot, t_n)\|_{L^2}^2 + C(\Delta t)^2 \left\| \frac{d^2 u}{d\gamma^2} \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2)}^2 \end{aligned} \tag{19}$$

在估计剩下的两项 I_2, I_4 之前, 先给出所需的引理.

4 一些引理

引理 1 如果 $u \in H^3(\Omega), v \in V_h$, 则

$$\left| \int_{\Omega} \nabla(u - u_I) \cdot \nabla v \right| \leq Ch^2 |u|_3 |v|_1 \tag{20}$$

证明 $C^3(\bar{\Omega})$ 在 $H^3(\Omega)$ 中是稠密的, 因此只需要考虑 $u \in C^3(\bar{\Omega})$ 即可. 注意到分片函数 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 在一对单元 $e = e_1 \cup e_2$ 上相等 (如图 4), 因而积分不等式是建立在单元对上的. 为表达方便, 不妨设 BD 的中点为坐标系原点, 则

$$\int_{e_2} \frac{\partial(u(x, y) - u_I(x, y))}{\partial x} = - \int_{e_1} \frac{\partial(u(-x, -y) - u_I(-x, -y))}{\partial x} \tag{21}$$

若记

$$w(x, y) = u(x, y) - u(-x, -y)$$

此时

$$w_I(x, y) = u_I(x, y) - u_I(-x, -y)$$

那么有

$$\begin{aligned} &\left| \int_e \frac{\partial(u - u_I)}{\partial x} \right| = \left| \int_{e_1} \frac{\partial(u - u_I)}{\partial x} + \int_{e_2} \frac{\partial(u - u_I)}{\partial x} \right| \\ &= \left| \int_{e_1} \frac{\partial(u - u_I)}{\partial x} - \int_{e_1} \frac{\partial(u(-x, -y) - u_I(-x, -y))}{\partial x} \right| \\ &= \left| \int_{e_1} \frac{\partial\{[u(x, y) - u(-x, -y)] - [u_I(x, x_2) - u_I(-x, -y)]\}}{\partial x} \right| \\ &= \left| \int_{e_1} \frac{\partial(w - w_I)}{\partial x} \right| \\ &\leq Ch |w|_{2, \infty, e_1} \text{meas}(e_1) \\ &\leq Ch^2 |u|_{3, \infty, e} \text{meas}(e_1) \end{aligned} \tag{22}$$

和

$$\left| \int_e \frac{\partial(u - u_I)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right| \leq Ch^2 |u|_{3, \infty, e} |v|_{1, 1, e} \tag{23}$$

从 (23) 可以看出

$$\int_e \frac{\partial(u - u_I)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = 0, \quad \forall u \in P_2(e), \forall \frac{\partial v}{\partial x} \in P_0(e) \quad (24)$$

所以从 Bramble-Hilbert 引理得到

$$\left| \int_e \frac{\partial(u - u_I)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right| \leq Ch^2 |u|_{3,e} |v|_{1,1,e} \quad (25)$$

那么, 对单元求和可知

$$\left| \int_{\Omega} \frac{\partial(u - u_I)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right| \leq \sum_e \left| \int_e \frac{\partial(u - u_I)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right| \leq Ch^2 |u|_3 |v|_{1,1} \leq Ch^2 |u|_3 |v|_1 \quad (26)$$

这里由周期边界条件可知与边界相交的三角形网格恰好能两两组合成图 4 所示的平行四边形. 类似可得

$$\left| \int_{\Omega} \frac{\partial(u - u_I)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right| \leq Ch^2 |u|_3 |v|_1 \quad (27)$$

联立 (26)(27), 引理 1 得证.

引理 2 设 $\alpha(\cdot, t) \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $u \in H^3(\Omega)$. 如果 $v \in V_h$, 那么

$$\left| \int_{\Omega} \alpha \nabla(u - u_I) \cdot \nabla v \right| \leq Ch^2 \|u\|_3 |v|_1 \quad (28)$$

证明 令 $\bar{\alpha}|_e := \frac{1}{4h_1 h_2} \int_e \alpha(x, t) dx$ 是 α 在单元对上的平均, 这里 $e = e_1 \cup e_2$ (如图 4). 那么, 由 (26) 可知

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial(u - u_I)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right| &\leq \left| \sum_e \int_e \bar{\alpha} \frac{\partial(u - u_I)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right| + \left| \sum_e \int_e (\alpha - \bar{\alpha}) \frac{\partial(u - u_I)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right| \\ &\leq Ch^2 (|u|_3 + \|u\|_2) |v|_1 \\ &\leq Ch^2 \|u\|_3 |v|_1 \end{aligned} \quad (29)$$

这里同样用到周期边界条件. 类似地有

$$\left| \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial(u - u_I)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right| \leq Ch^2 \|u\|_3 |v|_1 \quad (30)$$

联立 (29)(30), 引理 2 得证.

引理 3 设 $u \in H^3(\Omega)$, 如果 $v \in V_h$, 那么

$$\int_{\Omega} (u - u_I) \frac{\partial v}{\partial x} = O(h^2) |u|_3 |v|_0 \quad (31)$$

证明. $C^3(\bar{\Omega})$ 在 $H^3(\Omega)$ 中是稠密的, 因此只需要考虑 $u \in C^3(\bar{\Omega})$ 即可. 由泰勒公式, 如果 $(x, y) \in e$, 这里 $e = e_1 \cup e_2$ (如图 4). 简便起见, 设 BD 中点是原点, 那么

$$u = u(0) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}(0) x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(0) x_i x_j + O(h^3) |u|_{3,\infty,e} \quad (32)$$

经计算, 可得

$$\begin{aligned} \int_e u &= 4h_1 h_2 u(0) + \frac{2}{3} h_1^3 h_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0) + \\ &\quad \frac{4}{3} h_1^2 h_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x_2}(0) + \frac{4}{3} h_1 h_2^3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0) + O(h^5) |u|_{3,\infty,e} \end{aligned} \quad (33)$$

又由于

$$\int_e u_I = \left\{ \frac{1}{3} [u(A) + u(C)] + \frac{2}{3} [u(B) + u(D)] \right\} |e_1|$$

$$\begin{aligned}
 &= 4h_1h_2u(0) + 2h_1^3h_2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}(0) + \frac{8}{3}h_1^2h_2^2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}(0) + \\
 &\quad \frac{8}{3}h_1h_2^3\frac{\partial^2u}{\partial y^2}(0) + O(h^5)|u|_{3,\infty,e}
 \end{aligned} \tag{34}$$

这里 A, B, C, D 如图 2 所示. 因此

$$\int_e(u - u_I) = -\frac{1}{3} \int_e (h_1^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + h_1h_2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} + h_2^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2}) + O(h^5)|u|_{3,\infty,e} \tag{35}$$

和

$$\left| \int_e(u - u_I)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{3} \int_e (h_1^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + h_1h_2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} + h_2^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2})\frac{\partial v}{\partial x} \right| \leq Ch^3|u|_{3,\infty,e}|v|_{1,1,e} \tag{36}$$

从 (36) 立刻看出

$$\int_e(u - u_I)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{3} \int_e (h_1^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + h_1h_2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} + h_2^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2})\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \forall u \in P_2(e), \forall \frac{\partial v}{\partial x} \in P_0(e) \tag{37}$$

所以从 Bramble-Hilbert 引理得到

$$\left| \int_e(u - u_I)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{3} \int_e (h_1^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + h_1h_2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} + h_2^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2})\frac{\partial v}{\partial x} \right| \leq Ch^3|u|_{3,e}|v|_{1,1,e} \tag{38}$$

即

$$\int_e(u - u_I)\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{3} \int_e (h_1^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + h_1h_2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} + h_2^2\frac{\partial^2u}{\partial y^2})\frac{\partial v}{\partial x} + O(h^3)|u|_{3,e}|v|_{1,1,e} \tag{39}$$

将 (39) 对单元求和, 并分部积分得到

$$\begin{aligned}
 \int_\Omega(u - u_I)\frac{\partial v}{\partial x} &= \sum_e \int_e(u - u_I)\frac{\partial v}{\partial x} \\
 &= \frac{1}{3} \int_\Omega (h_1^2\frac{\partial^3u}{\partial x^3} + h_1h_2\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial y} + h_2^2\frac{\partial^3u}{\partial x\partial y^2})v + O(h^3)|u|_3|v|_1 \\
 &= O(h^2)|u|_3|v|
 \end{aligned} \tag{40}$$

这里用到周期边界条件和逆不等式. 引理 3 得证.

引理 4 设 (x^*, y^*) 定义如 (3). 如果 $V \in W^{1,\infty}(\Omega)^2$, 那么

$$\left| \int_\Omega [\rho(x, y) - \rho(x^*, y^*)]v(x, y)dx dy \right| \leq C\Delta th\|u\|_2\|v\|_0 \tag{41}$$

证明 令 $\rho_i(\cdot, \cdot), i = 1, 2$ 分别表示对第 i 个变元求偏导数, 有

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_\Omega [\rho(x, y) - \rho(x^*, y^*)]v(x, y)dx dy \right| \\
 &\leq \left| \int_\Omega [\rho(x, y) - \rho(x^*, y)]v(x, y)dx dy \right| + \left| \int_\Omega [\rho(x^*, y) - \rho(x^*, y^*)]v(x, y)dx dy \right| \\
 &= \left| \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \rho(x^* + s(x - x^*), y) ds v(x, y)dx dy \right| + \\
 &\quad \left| \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \rho(x^*, y^* + s(y - y^*)) ds v(x, y)dx dy \right| \\
 &= \left| \int_0^1 \int_\Omega \rho_1(x^* + s(x - x^*), y)(x - x^*)v(x, y)dx dy ds \right| + \\
 &\quad \left| \int_0^1 \int_\Omega \rho_2(x^*, y^* + s(y - y^*))(y - y^*)v(x, y)dx dy ds \right| \\
 &\leq C\Delta t|\rho|_1\|v\|_0 \leq C\Delta th\|u\|_2\|v\|_0
 \end{aligned} \tag{42}$$

其中由变量替换有如下不等式

$$\int_{\Omega} \rho_1^2(x^* + s(x - x^*), y) dx dy \leq C \int_{\Omega} \rho_x^2(x, y) dx dy \leq C|\rho|_1^2$$

及

$$\int_{\Omega} \rho_2^2(x^*, y^* + s(y - y^*)) dx dy \leq C \int_{\Omega} \rho_y^2(x, y) dx dy \leq C|\rho|_1^2$$

在本节最后, 我们给出问题 (1) 的稳定性估计 [7].

引理 5 设 $\alpha \in L^\infty(0, T; W^{k+1, \infty}(\Omega))$, $V \in (L^\infty(0, T; W^{k+1, \infty}(\Omega)))^2$, $u_0 \in H^k(\Omega)$ 和 $f \in L^2(0, T; H^k(\Omega))$, 那么

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; H^k)} + \sqrt{\varepsilon} \|u\|_{L^2(0, T; H^{k+1})} \leq C(\|u_0\|_{H^k} + \|f\|_{L^2(0, T; H^k)}) \quad (43)$$

又如果 $\alpha \in L^\infty(0, T; W^{4, \infty}(\Omega))$, $V \in (L^\infty(0, T; W^{4, \infty}(\Omega)))^2$, $u_0 \in H^3(\Omega)$ 和 $f \in L^2(0, T; H^3(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2)$, 那么

$$\|u\|_{H^1(0, T; H^2)} \leq C(\|u_0\|_{H^3} + \|f\|_{L^2(0, T; H^3)}) \quad (44)$$

和

$$\left\| \frac{d^2 u}{d\gamma^2} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C(\|u_0\|_{H^3} + \|f\|_{L^2(0, T; H^2)}) + \left\| \frac{df}{d\gamma} \right\|_{L^2(0, T; L^2)} \quad (45)$$

上述估计中的常数 C 只与 α, V 有关, 而与 ε 无关.

5 主要结论

有了上述引理, 我们就可以得到本文的主要结果.

定理 1 假设 $\alpha \in L^\infty(0, T; W^{4, \infty}(\Omega))$, $V \in (L^\infty(0, T; W^{4, \infty}(\Omega)))^2$, $u_0 \in H^3(\Omega)$ 和 $f \in L^2(0, T; H^3(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2)$, 如果 u 和 u_h 分别是 (4) 和 (6) 的解, 那么有如下最优估计

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t_n \leq T} \|(u - u_h)(\cdot, t_n)\|_{L^2} \\ & \leq C\Delta t (\|u_0\|_3 + \|f\|_{L^2(0, T; H^2)}) + \left\| \frac{df}{d\gamma} \right\|_{L^2(0, T; L^2)} + \\ & \quad Ch^2 (\|u_0\|_3 + \|f\|_{L^2(0, T; H^3)}) \end{aligned} \quad (46)$$

这里常数 C 与 $u, \varepsilon, h, \Delta t$ 无关.

证明 首先, 由引理 2 得到第二项的估计:

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \varepsilon \Delta t \int_{\Omega} \alpha(x, y, t_n) \nabla \rho(x, y, t_n) \nabla \theta(x, y, t_n) dx dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \varepsilon \Delta t \|\theta(\cdot, t_n)\|_1^2 + C \varepsilon \Delta t h^4 \|u\|_{L^\infty(0, T; H^3(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (47)$$

然后给出第四项的估计. 利用引理 4 我们只能得到 $O(h)$ 的精度, 为得到最优估计 $O(h^2)$, 对 (42) 做分部积分:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{\Omega} \rho_1(x^* + s(x - x^*), y, t_{n-1}) \theta(x, y, t_n) dx dy ds \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega} (1-s) \rho_1(x^* + s(x - x^*), y, t_{n-1}) V_{1x}(x, y, t_n) \Delta t \theta(x, y, t_n) dx dy ds - \\ & \quad \int_0^1 \int_{\Omega} \rho(x^* + s(x - x^*), y, t_{n-1}) \theta_x(x, y, t_n) dx dy ds \\ & \leq C \Delta t h \|u\|_{L^\infty(0, T; H^2)} \|\theta(\cdot, t_n)\|_0 - \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \int_{\Omega} \rho(x^* + s(x - x^*), y, t_{n-1}) \theta_x(x, y, t_n) dx dy ds \quad (48)$$

其中由周期边界条件可知上述分部积分产生的边界项是 0.

由于引理 3, 有

$$\int_0^1 \int_{\Omega} \rho(x, y, t_{n-1}) \theta_x(x, y, t_n) dx dy ds \leq Ch^2 \|u\|_{L^\infty(0,T;H^3)} \|\theta(\cdot, t_n)\|_0 \quad (49)$$

又由于引理 4, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{\Omega} [\rho(x^* + s(x - x^*), y, t_{n-1}) - \rho(x, y, t_{n-1})] \theta_x(x, y, t_n) dx dy ds \\ & \leq C\Delta t h \|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \|\theta(\cdot, t_n)\|_1 \\ & \leq C\Delta t \|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \|\theta(\cdot, t_n)\|_0 \end{aligned} \quad (50)$$

联立 (48-50) 就得到第四项的估计:

$$\begin{aligned} |I_4| & \leq \left| \int_0^1 \int_{\Omega} \rho_1(x^* + s(x - x^*), y, t_{n-1}) (x - x^*) \theta(x, y, t_n) dx dy ds \right| + \\ & \quad \left| \int_0^1 \int_{\Omega} \rho_2(x^*, y^* + s(y - y^*), t_{n-1}) (y - y^*) \theta(x, y, t_n) dx dy ds \right| \\ & \leq C\Delta t^2 h \|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \|\theta(\cdot, t_n)\|_0 + C\Delta t h^2 \|u\|_{L^\infty(0,T;H^3)} \|\theta(\cdot, t_n)\|_0 + \\ & \quad C\Delta t^2 \|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \|\theta(\cdot, t_n)\|_0 \\ & \leq C\Delta t \|\theta(\cdot, t_n)\|_0^2 + C\Delta t h^4 \|u\|_{L^\infty(0,T;H^3)}^2 + C\Delta t^3 \|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)}^2 \end{aligned} \quad (51)$$

这样, 联合 (16-19)(47) 和 (51) 就得到

$$\begin{aligned} & \|\theta(\cdot, t_n)\|^2 + \varepsilon \Delta t \|\theta(\cdot, t_n)\|_1^2 \\ & \leq \frac{1 + C\Delta t}{2} (\|\theta(\cdot, t_n)\|^2 + \|\theta(\cdot, t_{n-1})\|^2) + \frac{1}{2} \varepsilon \Delta t \|\theta(\cdot, t_n)\|_1^2 + \\ & \quad C\Delta t h^4 \|u\|_{L^\infty(0,T;H^3)}^2 + C(\Delta t)^2 \left\| \frac{d^2 u}{d\gamma^2} \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega))}^2 + \\ & \quad C\Delta t^3 \|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)}^2 + Ch^4 \|u\|_{H^1(t_{n-1}, t_n; H^2(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (52)$$

将上式对 $n = 1, \dots, N_1 (\leq N)$ 叠加, 消去相同的项, 得到

$$\begin{aligned} & \|\theta(\cdot, t_{N_1})\|^2 + \varepsilon \Delta t \sum_{n=1}^{N_1} \|\theta(\cdot, t_n)\|_1^2 \\ & \leq C\Delta t \sum_{n=0}^{N_1-1} \|\theta(\cdot, t_n)\|^2 + C(\Delta t)^2 \left\| \frac{d^2 u}{d\gamma^2} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \\ & \quad C\Delta t^2 \|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)}^2 + Ch^4 \|u\|_{L^\infty(0,T;H^3)}^2 + \\ & \quad Ch^4 \|u\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (53)$$

应用 Gronwall 不等式即可得到

$$\begin{aligned} & \|\theta\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \sqrt{\varepsilon} \|\theta\|_{L^2(0,T;H^1)} \\ & \leq C\Delta t \left\{ \left\| \frac{d^2 u}{d\gamma^2} \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \right\} + \\ & \quad Ch^2 \left\{ \|u\|_{H^1(0,T;H^2(\Omega))} + \|u\|_{L^\infty(0,T;H^3)} \right\} \\ & \leq C\Delta t (\|u_0\|_3 + \|f\|_{L^2(0,T;H^2)} + \left\| \frac{df}{d\gamma} \right\|_{L^2(0,T;L^2)}) + \end{aligned}$$

$$Ch^2(\|u_0\|_3 + \|f\|_{L^2(0,T;H^3)}) \quad (54)$$

再联合 ρ 的估计 (7), 从而完成了定理的证明.

定理 2 在定理 1 的条件下, 有如下超收敛估计

$$\begin{aligned} & \sqrt{\varepsilon}|u - \Pi_{2h}^2 u_h|_{\tilde{L}^2(0,T;H^1)} \\ & \leq C\Delta t(\|u_0\|_3 + \|f\|_{L^2(0,T;H^2)} + \|\frac{df}{d\gamma}\|_{L^2(0,T;L^2)}) + \\ & Ch^2(\|u_0\|_3 + \|f\|_{L^2(0,T;H^3)}) \end{aligned} \quad (55)$$

这里常数 C 与 $u, \varepsilon, h, \Delta t$ 无关, Π_{2h}^2 是 §2.3 所定义的插值后处理算子.

证明 由 (10) 可知

$$\Pi_{2h}^2 u_h - u = \Pi_{2h}^2(u_h - u_I) + (\Pi_{2h}^2 u - u) \quad (56)$$

由 (9) (54) 有,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\varepsilon}|\Pi_{2h}^2(u_h - u_I)|_{\tilde{L}^2(0,T;H^1)} \\ & \leq C\sqrt{\varepsilon}|u_h - u_I|_{\tilde{L}^2(0,T;H^1)} \\ & \leq C\Delta t(\|u_0\|_3 + \|f\|_{L^2(0,T;H^2)} + \|\frac{df}{d\gamma}\|_{L^2(0,T;L^2)}) + \\ & Ch^2(\|u_0\|_3 + \|f\|_{L^2(0,T;H^3)}) \end{aligned} \quad (57)$$

又由 (8) 有

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon}|\Pi_{2h}^2 u - u|_{\tilde{L}^2(0,T;H^1)} & \leq C\sqrt{\varepsilon}h^2 \left\{ \Delta t \sum_{n=0}^N \|u(\cdot, t_n)\|_{H^3}^2 \right\}^{1/2} \\ & \leq Ch^2 \|u\|_{\tilde{L}^2(0,T;H^3)} \\ & \leq Ch^2(\|u_0\|_3 + \|f\|_{L^2(0,T;H^3)}) \end{aligned} \quad (58)$$

上面的常数 C 均不依赖于 $u, h, \Delta t$ 和 ε .

联合 (56-58) 就得到定理 2 的证明.

参考文献

- [1] Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Materials[M]. American Elsevier, New York, 1972.
- [2] Peaceman D W. Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation[M]. Elsevier, Amsterdam, 1977.
- [3] Roos H G, Stynes M and Tobiska L. Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations, second edition[M]. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [4] Douglas J Jr and Russell T F. Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures[J]. SIAM Numer Anal, 1982(19): 871-885.
- [5] Wang H. An optimal-order error estimate for an ELLAM scheme for two-dimensional linear advection-diffusion equations[J]. SIAM J Numer Anal, 2000(37): 1338-1368.
- [6] Wang H, Ewing R E and Russell T R. Eulerian-Lagrangian localized methods for convection-diffusion equations and their convergence analysis[J]. IMA J. Numer. Anal., 1995(15): 405-459.
- [7] Wang H and Wang K. Uniform estimates for Eulerian-Lagrangian methods for singularly perturbed time-dependent problems[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2007(45): 1305-1329.
- [8] Wang K and Wang H. A uniform estimate for the MMOC for two-dimensional advection-diffusion equations[J]. Numer. Methods for PDEs, Published Online: May 27 2009 10:25AM DOI: 10.1002/num.20474.

- [9] Lin Q, Yan N, and Zhou A. A rectangle test for interpolated finite elements[J]. in Proc. Sys. Sci and Sys. Engrg.. Great Wall Culture Publ. Co., Hong Kong, 217-229, 1991.
- [10] Evans L C. Partial Differential Equations[M]. Graduate Studies in Mathematics, V 19, American Mathematical Society, Rhode Island, 1998.
- [11] Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems[M]. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [12] 林群, 周俊明, 陈邯焘. 椭圆问题四面体线性元的超逼近与外推 [J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(15): 200-208.
- [13] Lin Q and Lin J F. Finite Element Methods: Accuracy and Improvement[M]. Science Press, Beijing, 2006.

A Uniform Estimate for the Characteristics Triangular Linear Element Method for Advection-Diffusion Equations

CHEN Hong-tao¹, LIN Qun², ZHOU Jun-ming³

- (1. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)
(2. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Science, Beijing 100190, China)
(3. School of Sciences, Hebei University of Technology, Tianjin 300160, China)

Abstract: In this paper, the authors use the integral identities of triangular linear elements to prove a uniform optimal-order error estimate for the characteristics finite element solution of two-dimensional time-dependent advection-diffusion equations. Also the authors introduce an interpolation postprocessing operator to get the superconvergence estimate of ϵ weighted energy norm. The estimates above depend only on certain Sobolev norms of the initial and right-hand side data, but not on the scaling parameter ϵ .

Keywords: triangular linear finite element; integral identity; uniform error estimates; the modified method of characteristics; interpolation postprocessing operator