View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Xiamen University Institutional Repository

总 37 卷 第 1 期
2004 年 3 月
数 学 研 究
Journal of Mathematical Study
Vol. 37 No. 1
Mar. 2004

基圈数为 5 的 2-连通平图的构造*

杨维玲 金贤安
(厦门大学数学系, 福建 厦门 361005)

摘 要 所有的 2-连通平图可通过收缩 2 度点变换成无 2 度点的、基圈数不变的 2-连通平图. 本文给出了基圈数为 5 的、无 2 度点的所有 2-连通平图.

关键词 2-连通, 平图, 收缩, 基圈数
中图分类号 O 157.5 文献标识码 A

1 介绍与记号

任一个 2-连通平图 G, 若含 2 度点, 设为 A, 并设 AB、AC 是与 A 关联的边, 去掉点 A 及边 AB、边 AC, 并加上边 BC, 称为收缩点 A, 通过不断收缩 2 度点可得到一个与原图基圈数相同的、无 2 度点的 2-连通平图, 记为 $R(G)$, 并称之为 G 的约化(简称为 R 图). 这样 2-连通平图可依其约化图进行分类. 这种分类方式在纽结理论、统计物理中都有应用. 纽结的投影图与符号平图一一对应, 若将符号平图按上述方法分类, 即得到纽结投影图的一个分类, 且同一类纽结的 Kauffman 括号多项式可由代表该类的 R 图的链多项式统一表示[1]. 在统计物理中, 某些模型的配分函数等于对它们的 R 图的赋权的求和. 基圈数不大于 5 的 R 图在[3] 中已用计算机搜索过, 但正如人们一直在寻求四色定理的可以理解的证明一样, 人们仍然期望对[3] 中的结果给出一个可以理解的证明, 其中基圈数小于 5 的情况容易验证其正确性, 本文仅给出基圈数为 5 的 R 图的一种不借助计算机的可以理解的数学构造法.

本文记 $p = |V(G)|$, $q = |E(G)|$, $k(G) = G$ 的分支数, $n(G) = p - q + k(G)$

2 定义与引理

先说明 $n(G) = 5$ 的 R 图可从 $n(G) = 4$ 的 R 图得来. 首先我们需要几个概念与引理:

定义 1 2-连通图 G 中的一条边 α 称为必要的, 如果 $G - \alpha$ 不是 2-连通的.

定义 2 2-连通图 G 称为极小的, 如果 G 中的每条边都是必要的.

引理 1[2] 若 G 是极小的 2-连通图, 且 $|V(G)| = p$, 则 G 中至少有 $(p + 4)/3$ 个 2 度顶点.

任一个 $n = 5$ 的 R 图 H, 由定义可知 H 无 2 度点, 根据引理 1, H 不是极小的, 设 α 是 H 的

* 收稿日期: 2003- 12- 21
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371102)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://w

非必要边, 则 $H-\alpha$ 仍是 2-连通的, 且 $n(H-\alpha)=4$. 由于收缩 2 度点的过程不改变 2-连通性及基圈数, 故 $R(H-\alpha)$ 是 $n=4$ 的 2-连通平图. 该过程可理解为任一 $n=5$ 的 R 图都可由 $n=4$ 的 R 图通过加一个 ear 得到. 加 ear 的方式有三种:

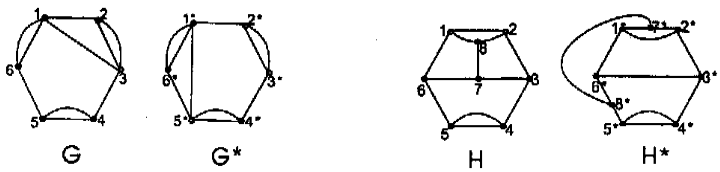
(1) 取两条边(i)、(j), 在边上分别插入一个新顶点, 并用一边连接两新顶点. 记为 $G+ear((i),(j))$

(2) 取一边(i)、一顶点 j, 在边上插入一新顶点, 并用一边连接新顶点与 j. 记为 $G+ear((i),j)$

(3) 取两个顶点 i、j, 并用一边连接 i, j. 记为 $G+ear(i,j)$

引理 2[2] 设 G 是 2-连通图, 则边 $\alpha=xy$ 是 G 的一条必要的边, 当且仅当 $G-\alpha$ 没有同时包含 x 和 y 的圈, 即 α 不是 G 中任何圈的弦.

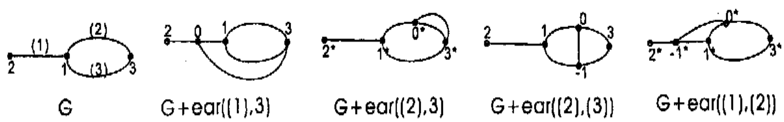
引理 3 G 与 G^* 同构, H 与 H^* 同构.



证明 只须令 1 与 5^*, 2 与 6^*, 3 与 1^*, 4 与 2^*, 5 与 3^*, 6 与 4^* 对应即可得 G 与 G^* 同构.

只须令 1 与 7^*, 2 与 2^*, 3 与 3^*, 4 与 4^*, 5 与 5^*, 6 与 8^*, 7 与 6^*, 8 与 1^* 对应即可得 H 与 H^* 同构.

引理 4 若图 G 含与一两重边关联的 3 度点, 设该点为 1, 与之关联的边(1), (2), (3), 与之相邻的点为 2, 3, 如下面第一个图所示, 则(1) $G+ear((1),3)$ 与 $G+ear((2),3)$ 同构, (2) $G+ear((2),(3))$ 与 $G+ear((1),(2))$ 同构.

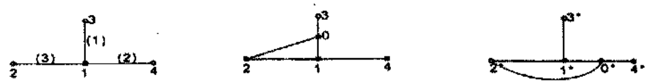


证明 (1) 分别给 $G+ear((1),3)$ 和 $G+ear((2),3)$ 各顶点一个标号: 原有点的标号在 $G+ear((1),3)$ 中保持不变, (1) 边上的新点标为 0, 原有点的标号在 $G+ear((2),3)$ 加 *, (2) 边上的新点标为 0^*. 则只须令 0 与 1^*, 1 与 0^*, i 与 i^*, 任意的 $i\geq 2$ 对应即可得 $G+ear((1),3)$ 与 $G+ear((2),3)$ 同构.

(2) 给 $G+ear((2),(3))$ (resp: $G+ear((1),(2))$) 各顶点一个标号: 原有点的标号在 $G+ear((2),(3))$ 不变(resp: $G+ear((1),(2))$ 中加 *), (2) 边上的新点在 $G+ear((2),(3))$ 标为 0(resp: $G+ear((1),(2))$ 中标为 0^*), (3) 边上的新点在 $G+ear((2),(3))$ 标为 -1(resp: $G+ear((1),(2))$ 中(1) 边上的新点标为 -1^*), 则只须令 1 与 -1^*, 0 与 0^*, -1 与 1^*, i 与 i^*, 任意的 $i\geq 2$ 对应, 即可得 $G+ear((2),(3))$ 与 $G+ear((1),(2))$ 同构.

引理 5 若图 G 含 3 度点, 且三个不同的点与之相邻, 设该点为 1, 与之关联的边(1), (2), (3), 与之相邻的点为 3, 4, 2, 如下面第一个图所示, 则 $G+ear((1),2)$ 与 $G+ear((2),2)$ 同构.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://w



G　　G + ear((1), 2)　　G + ear((2), 2)

证明　给 $G+\ ear((1),\ 2)$ (resp: $G+\ ear((2),\ 2)$) 各顶点一个标号: 原有点的标号在 $G+\ ear((1),\ 2)$ 不变(resp: $G+\ ear((2),\ 2)$ 中加 $*$), 新点在 $G+\ ear((1),\ 2)$ 标为 0 (resp: $G+\ ear((2),\ 2)$ 中 0^*), 只须令 0 与 1^*, 1 与 0^*, i 与 i^*, 任意的 $i\geq 2$ 对应, 即可得 $G+\ ear((1),\ 2)$ 与 $G+\ ear((2),\ 2)$ 同构.

引理 6　若图 G 含一个两端都是 3 度点的二重边, 如下面第一个图所示, 则 $G+\ ear((1),\ (1))$ 与 $G+\ ear((3),\ (4))$ 同构.

G　　G + ear((1), (1))　　G + ear((3), (4))

证明　给 $G+\ ear((1),\ (1))$ (resp: $G+\ ear((3),\ (4))$) 各顶点一个标号: 原有点的标号在 $G+\ ear((1),\ (1))$ 不变(resp: $G+\ ear((3),\ (4))$ 中加 $*$), 新点标号如图所示. 只须令 1 与 0^*, 0 与 1^*, -1 与 2^*, 2 与 -1^*, i 与 i^*, 任意的 $i\geq 3$ 对应, 即可得 $G+\ ear((1),\ (1))$ 与 $G+\ ear((3),\ (4))$ 同构.

3　定理与证明

定理 1　$n=5$ 的 R 图在同构的意义下只有以下 111 种: $R^1_{(0)}\cdots R^{10}_{(0)}$; $R^1_{(1)}\cdots R^{24}_{(1)}$; $R^1_{(2)}\cdots R^{41}_{(2)}$; $R^1_{(3)}\cdots R^{30}_{(3)}$; $R^1_{(4)}\cdots R^6_{(4)}$. 其中 $R^j_{(i)}$, i 表示该图有 i 个重边, j 表示该图在本组中的编号. (这 111 个图附在文末)

证明　前面已说明 $n=5$ 的 R 图可由 $n=4$ 的 R 图加 ear 得到. 这里利用[3] 中得到的 $n=4$ 的 R 图(如下图所示) 构造 $n=5$ 的 R 图. 由 R 图的定义知 $q\geq 3p/2$, $p=q+1-n\geq 3p/2+1-5$, 故 $p\leq 8$. 当两个图的顶点数或者重边的个数或者重边的重数不同时, 两图显然不同构, 故在证明这 111 个图不同构时只须说明同下标、同顶点数、同样的重数时两个图不同构即可. 以下说到的图中圈的个数特指底图的圈的个数.

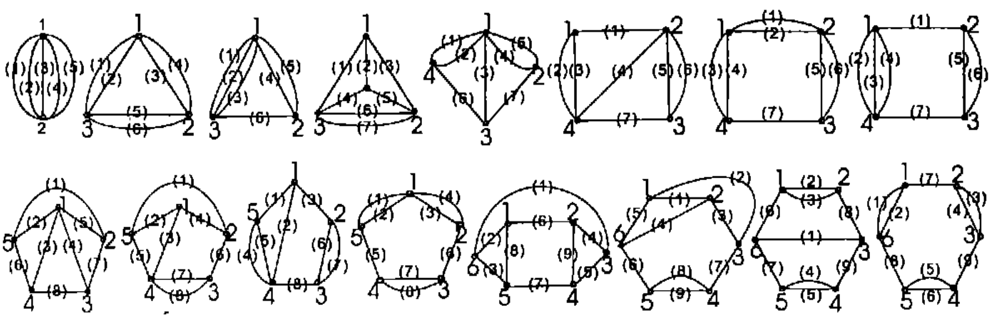


Figure 1　$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}, R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}, R_{15}, R_{16}$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://w

1: $p = 1$ 时, $q = 5$: 这样的图有割点, 不满足 R 图定义.

2: $p = 2$ 时, $q = 6$: 由 R_1 按第三种加 ear 方式得到, 即 $R_1 + ear(1, 2) = R^1_{(1)}$

3: $p = 3$ 时, $q = 7$:

(1) 由 R_1 按第二种加 ear 方式得到, 由于五条边对称, 两个点也对称, 所以只需考虑 $R_1 + ear((5), 1) = R^1_{(2)}$

(2) 由 R_2 按第三种加 ear 方式得到, 由于三个点对称, 所以只需考虑 $R_2 + ear(1, 2) = R^1_{(3)}$

由 R_3 按第三种加 ear 方式得到, 只需考虑 $R_3 + ear(1, 2) = R^2_{(2)}$, $R_3 + ear(1, 3)$, $R_3 + ear(2, 3)$, 后两图如下图所示, 由引理 2 可知图中标 * 号的边非必要, 去掉 * 边后得到 R_1 和 R_2, 从而 $R_3 + ear(1, 3)$ 同构于 $R_1 + ear((5, 1) = R^1_{(2)}$, $R_3 + ear(2, 3)$ 同构于 $R_2 + ear(1, 2) = R^1_{(2)}$.

Firure 2 $R_3 + ear(1, 3)$, $R_3 + ear(2, 3)$

注 以下证明某一新得到的图与某一已考虑过的图同构时, 与此类似, 不再详细阐述, 只用 * 号标出非必要边.

故 $p = 3$, $n = 5$ 的 R 图有: $R^1_{(2)}$, $R^2_{(2)}$, $R^1_{(3)}$

4: $p = 4$ 时, $q = 8$.

(1) 由 R_8 按第三种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_8 + ear(1, 4) = R^3_{(2)}$, $R_8 + ear(1, 2) = R^2_{(3)}$, $R_8 + ear(1, 3) = R^4_{(2)}$, $R_8 + ear(2, 3) = R^5_{(2)}$.

由 R_7 按第三种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_7 + ear(1, 2) = R^3_{(3)}$, $R_7 + ear(1, 4)$, $R_7 + ear(1, 3) = R^4_{(3)}$, $R_7 + ear(3, 4) = R^1_{(4)}$.

由 R_6 按第三种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_6 + ear(1, 3) = R^6_{(2)}$, $R_6 + ear(1, 4)$, $R_6 + ear(1, 2)$, $R_6 + ear(2, 4) = R^5_{(3)}$.

由 R_5 按第三种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_5 + ear(1, 4) = R^7_{(2)}$, $R_5 + ear(1, 3) = R^6_{(3)}$, $R_5 + ear(2,4) = R^8_{(2)}$, $R_5 + ear(3, 4)$.

由 R_4 按第三种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_4 + ear(1, 4)$, $R_4 + ear(1, 3)$, $R_4 + ear(3, 4)$, $R_4 + ear(2, 3) = R^2_{(1)}$.

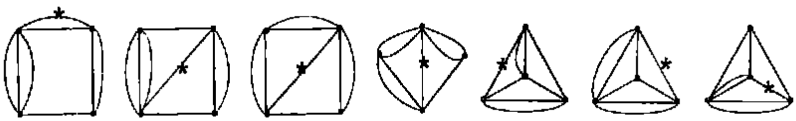


Figure 3 $R_7 + ear(1, 4)$, $R_6 + ear(1, 4)$, $R_6 + ear(1, 2)$, $R_5 + ear(3, 4)$, $R_4 + ear(1, 4)$, $R_4 + ear(1, 3)$, $R_4 + ear(3, 4)$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://w

(2) 由 R_3 按第二种加 ear 方式得到, 在 $R_3+ear((i), j)$ 中, 由引理 2, (1)、(2)、(3) 中至少一条为非必要边, 故 $R_3+ear((i), j)$ 同构于某一已考虑过的图.

由 R_2 按第二种加 ear 方式得到, 在 $R_2+ear((i), j)$ 中, 由引理 2, (1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6) 中至少一条为非必要边, 故 $R_2+ear((i), j)$ 同构于某一已考虑过的图.

(3) 由 R_1 按第一种加 ear 方式得到, 由于对称只需考虑 $R_1+ear((1), (1))$ 和 $R_1+ear((1), (2))$, 在 $R_1+ear((1), (1))$ 和 $R_1+ear((1), (2))$ 中由引理 2, (3)、(4)、(5) 中至少一条为非必要边, 故 $R_1+ear((1), (1))$ 和 $R_1+ear((1), (2))$ 同构已考虑过的图.

考虑重数及度序列可得 $R^3_{(2)}\cdots R^8_{(2)}$, $R^2_{(3)}\cdots R^6_{(3)}$ 不同构.

故 $p=4, n=5$ 的 R 图有: $R^2_{(1)}$, $R^3_{(2)}\cdots R^8_{(2)}$, $R^2_{(3)}\cdots R^6_{(3)}$, $R^1_{(4)}$

5: $p=5$ 时, $q=9$:

(1) 由 R_{12} 按第三种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_{12}+ear(1, 5)=R^7_{(3)}$, $R_{12}+ear(1, 4)=R^8_{(3)}$, $R_{12}+ear(2, 5)=R^9_{(3)}$, $R_{12}+ear(3, 5)=R^{10}_{(3)}$, $R_{12}+ear(4, 5)=R^2_{(4)}$, $R_{12}+ear(3, 4)=R^{11}_{(3)}$.

由 R_{11} 按第三种加 ear 方式得到, 考虑 $R_{11}+ear(1, 5)$, $R_{11}+ear(1, 2)$, $R_{11}+ear(1, 4)=R^{12}_{(3)}$, $R_{11}+ear(1, 3)=R^9_{(2)}$, $R_{11}+ear(2, 5)=R^{10}_{(2)}$, $R_{11}+ear(4, (5))=R^{11}_{(2)}$, $R_{11}+ear(3, 5)=R^{12}_{(2)}$, $R_{11}+ear(2, 4)=R^{13}_{(2)}$, $R_{11}+ear(2, 3)=R^{14}_{(2)}$, $R_{11}+ear(3, 4)=R^{13}_{(3)}$.

由 R_{10} 按第三种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_{10}+ear(1, 5)$, $R_{10}+ear(1, 2)$, $R_{10}+ear(1, 4)=R^{15}_{(2)}$, $R_{10}+ear(1, 3)=R^3_{(1)}$, $R_{10}+ear(2, 4)=R^4_{(1)}$, $R_{10}+ear(2, 3)=R^{16}_{(2)}$, $R_{10}+ear(3, 4)=R^5_{(1)}$.

由 R_9 按第三种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_9+ear(1, 5)=R^6_{(1)}$, $R_9+ear(2, 5)$, $R_9+ear(3, 5)=R^1_{(0)}$.

Figure 4　$R_{11}+ear(1, 5)$, $R_{11}+ear(1, 2)$, $R_{10}+ear(1, 5)$, $R_{10}+ear(1, 2)$, $R_9+ear(2, 5)$

(2) 由 R_8 按第二种加 ear 方式得到, 在 $R_8+ear((i), j)$ 中, 由引理 2, (2)、(3)、(4) 中至少一条为非必要边, 故 $R_8+ear((i), j)$ 同构于某一已考虑过的图.

由 R_7 按第二种加 ear 方式得到, 在 $R_7+ear((i), j)$ 中, 由引理 2, (1)、(2) 中至少一条为非必要边, 故 $R_7+ear((i), j)$ 同构于某一已考虑过的图.

由 R_6 按第二种加 ear 方式得到, 由引理 2, $R_6+ear((i), j)$, $i\neq 4$ 下, (4) 为非必要边, 故 $R_6+ear((i), j)$, $i\neq 4$ 同构于某一已考虑过的图. 由于对称, 只需再考虑 $R_6+ear((4), 1)$, $R_6+ear((4), 2)=R^{14}_{(3)}$.

由 R_5 按第二种加 ear 方式得到, 由引理 2, 在 $R_5+ear((i), j)$, $j=2$ 或 $j=3$ 下, (1)、(2)、(4)、(5) 中至少一条为非必要边, 故 $R_5+ear((i), j)$, $j=2$ 或 $j=3$ 同构于某一已考虑过的图. 由于对称, 只需再考虑 $R_5+ear((3), 1)=R^7_{(3)}$, $R_5+ear((6), 1)=R^7_{(2)}$, $R_5+ear((1),$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://w

1), $R_5+ear((3),3)$, $R_5+ear((6),3)$, $R_5+ear((2),3)$. 其中由引理 4(1) 得 $R_5+ear((1),1)$ 与 $R_5+ear((6),1)=R^{17}_{(2)}$ 同构.

由 R_4 按第二种加 ear 方式得到, 在 $R_4+ear((i),j)$ 中, 由引理 2, (5)、(6) 中至少一条为非必要边, 故 $R_4+ear((i),j)$ 同构于某一已考虑过的图.

Figure 5 $R_6+ear(4,(1))$, $R_5+ear(1,(1))$, $R_5+ear(3,(3))$, $R_5+ear(6,(3))$, $R_5+ear(2,(3))$

(3) 由 R_3 按第一种加 ear 方式得到, 在 $R_3+ear((i),(j))$ 中, 由引理 2, (1)、(2)、(3)、(4)、(5) 中至少一条为非必要边, 故 $R_3+ear((i),(j))$ 同构于某一已考虑过的图.

由 R_2 按第一种加 ear 方式得到, 在 $R_2+ear((i),(j))$ 中, 由引理 2, (1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6) 中至少一条为非必要边, 故 $R_2+ear((i),(j))$ 同构于某一已考虑过的图.

考虑重数及度序列, 再考虑重边两个端点的度可得 $R^3_{(1)}\cdots R^6_{(1)}$ 不同构. 先考虑重数及度序列, 再考虑几个重边是否在 3 圈中、3 圈的个数及两个 3 圈的关系可得 $R^9_{(2)}\cdots R^{17}_{(2)}$. 先考虑重数及度序列, 再考虑是否含 3 圈、3 圈中含几个重边、3 个重边的关系可得 $R^7_{(3)}\cdots R^{15}_{(3)}$ 不同构.

故 $p=5$, $n=5$ 的 R 图有: $R^1_{(0)}$, $R^3_{(1)}\cdots R^6_{(1)}$, $R^9_{(2)}\cdots R^{17}_{(2)}$, $R^7_{(3)}\cdots R^{15}_{(3)}$, $R^2_{(4)}$

6: $p=6$ 时, $q=10$

(1) 由 R_{16} 按第三种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_{16}+ear(1,2)=R^3_{(4)}$, $R_{16}+ear(1,3)=R^{16}_{(3)}$, $R_{16}+ear(1,4)=R^{17}_{(3)}$, $R_{16}+ear(1,5)$, $R_{16}+ear(1,6)=R^{18}_{(3)}$. 由引理 3(1) 得 $R_{16}+ear(1,5)$ 同构于 $R_{16}+ear(1,3)=R^{16}_{(3)}$.

由 R_{15} 按第三种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_{15}+ear(1,2)=R^{18}_{(2)}$, $R_{15}+ear(1,5)=R^{19}_{(2)}$, $R_{15}+ear(1,4)=R^{20}_{(2)}$, $R_{15}+ear(1,6)=R^{19}_{(3)}$, $R_{15}+ear(1,3)=R^{21}_{(2)}$, $R_{15}+ear(3,6)=R^{20}_{(3)}$.

由 R_{14} 按第三种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_{14}+ear(1,2)=R^{22}_{(2)}$, $R_{14}+ear(1,6)=R^{23}_{(2)}$, $R_{14}+ear(1,5)=R^7_{(1)}$, $R_{14}+ear(3,6)=R^8_{(1)}$, $R_{14}+ear(5,6)=R^{24}_{(2)}$, $R_{14}+ear(4,6)=R^9_{(1)}$, $R_{14}+ear(4,5)=R^{10}_{(1)}$.

由 R_{13} 按第三种加 ear 方式得到, 由于该图是点传递的, 故只需考虑 $R_{13}+ear(3,6)=R^{11}_{(1)}$, $R_{13}+ear(2,6)=R^2_{(0)}$, $R_{13}+ear(1,6)=R^{12}_{(1)}$.

(2) 由 R_{12} 按第二种加 ear 方式得到, 由引理 2, 在 $R_{12}+ear((i),j)$, $j=2$ 或 $j=5$ 下, (1)、(2)、(3)、(4) 中至少一条为非必要边, 故 $R_{12}+ear((i),j)$, $j=2$ 或 $j=5$ 同构于某一已考虑过的图. 由于对称只需再考虑 $R_{12}+ear((1),1)=R^{21}_{(3)}$, $R_{12}+ear((7),1)=R^{25}_{(2)}$, $R_{12}+ear((5),1)$, $R_{12}+ear((1),4)=R^{26}_{(2)}$, $R_{12}+ear((4),4)=R^{27}_{(2)}$, $R_{12}+ear((7),4)=R^{22}_{(3)}$, $R_{12}+ear((5),4)=R^4_{(4)}$, $R_{12}+ear((6),4)$. 由引理 4(1) 得 $R_{12}+ear((5),1)$ 与 $R_{12}+ear((1),1)=R^{21}_{(3)}$ 同构, $R_{12}+ear((6),4)$ 与 $R_{12}+ear((7),4)=R^{22}_{(3)}$ 同构.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://w

由 R_{11} 按第二种加 ear 方式得到, 由引理2, $R_{11}+ear((i), 5)$ 下, (4)、(5) 中至少一条为非必要边, 故 $R_{11}+ear((i), 5)$ 同构于某一已考虑过的图. 再由引理2, $R_{11}+ear((i), 1)$, 在 $i\neq 2$ 下, (2) 为非必要边, 故 $R_{11}+ear((i), 1)$, 在 $i\neq 2$ 下同构于某一已考虑过的图. 再考虑 $R_{11}+ear((2), 1)=R^{23}_{(3)}$, $R_{11}+ear((1), 2)$, $R_{11}+ear((3), 2)$, $R_{11}+ear((8), 2)=R^{28}_{(2)}$, $R_{11}+ear((4), 2)=R^{13}_{(1)}$, $R_{11}+ear((6), 2)$, $R_{11}+ear((2), 2)$, $R_{11}+ear((1), 4)=R^{29}_{(2)}$, $R_{11}+ear((3), 4)$, $R_{11}+ear((8), 4)$, $R_{11}+ear((4), 4)$, $R_{11}+ear((6), 4)=R^{14}_{(1)}$, $R_{11}+ear((1), 3)$, $R_{11}+ear((3), 3)=R^{30}_{(2)}$, $R_{11}+ear((8), 3)$, $R_{11}+ear((4), 3)$, $R_{11}+ear((6), 3)$, $R_{11}+ear((2), 4)=R^{24}_{(3)}$, $R_{11}+ear((2), 3)$. 其中由引理 4 得 $R_{11}+ear((6), 2)$ 与 $R_{11}+ear((8), 2)=R^{28}_{(2)}$ 同构, $R_{11}+ear((4), 4)$ 与 $R_{11}+ear((1), 4)=R^{29}_{(2)}$ 同构, $R_{11}+ear((6), 3)$ 与 $R_{11}+ear((3), 3)=R^{30}_{(2)}$ 同构. 由引理 5 得 $R_{11}+ear((3), 4)$ 与 $R_{11}+ear((1), 4)=R^{29}_{(2)}$ 同构.

由 R_{10} 按第二种加 ear 方式得到, 由引理2, 在 $R_{10}+ear((i), 1)$, $i\neq 3$ 下, (3) 为非必要边, 故 $R_{11}+ear((i), 1)$, $i\neq 3$ 下同构于某一已考虑过的图. 由引理 2, 在 $R_{10}+ear((i), 5)$, $i\neq 5$ 下, (5) 为非必要边, 故在 $R_{10}+ear((i), 5)$, $i\neq 5$ 下同构于某一已考虑过的图. 由引理2, 在 $R_{10}+ear((i), 3)$ 下, (7)、(8) 中至少一条为非必要边, 故 $R_{10}+ear((i), 3)$ 同构于某一已考虑过的图. 由对称性只需再考虑 $R_{10}+ear((3), 1)$, $R_{10}+ear((2), 2)$, $R_{10}+ear((4), 2)$, $R_{10}+ear((3), 2)$, $R_{10}+ear((7), 2)=R^{3}_{(0)}$, $R_{10}+ear((6), 2)$, $R_{10}+ear((2), 4)=R^{15}_{(1)}$, $R_{10}+ear((4), 4)$, $R_{10}+ear((5), 4)$, $R_{10}+ear((7), 4)$, $R_{10}+ear((6), (4)$. 由引理 5, $R_{10}+ear((4), 4)$ 与 $R_{10}+ear((2), 4)=R^{15}_{(1)}$ 同构.

由 R_9 按第二种加 ear 方式得到, 由于对称只需考虑 $R_9+ear((i), 1)$ 和 $R_9+ear((i), 5)$. 故 $R_9+ear((i), 5)$, $i\neq 2$ 下, (2) 为非必要边, 故 $R_9+ear((i), 5)$, $i\neq 2$ 同构于某一已考虑过的图. 从而只需再考虑 $R_9+ear((2), 5)$, $R_9+ear((2), 1)$, $R_9+ear((1), 1)=R^{4}_{(0)}$.

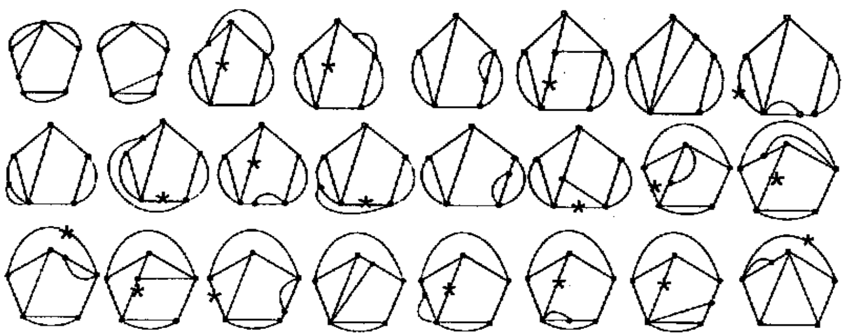


Figure 6　$R_{12}+ear((5), 1)$, $R_{12}+ear((6), 4)$, $R_{11}+ear((1), 2)$, $R_{11}+ear((3), 2)$, $R_{11}+ear((6), 2)$, $R_{11}+ear((2), 2)$, $R_{11}+ear((3), 4)$, $R_{11}+ear((8), 4)$, $R_{11}+ear((4), 4)$, $R_{11}+ear((1), 3)$, $R_{11}+ear((8), 3)$, $R_{11}+ear((4), 3)$, $R_{11}+ear((6), 3)$, $R_{11}+ear((2), 3)$, $R_{10}+ear((3), 1)$, $R_{10}+ear((2), 2)$, $R_{10}+ear((4), 2)$, $R_{10}+ear((3), 2)$, $R_{10}+ear((6), 2)$, $R_{10}+ear((4), 4)$, $R_{10}+ear((5), 4)$, $R_{10}+ear((7), 4)$, $R_{10}+ear((6), 4)$, $R_9+ear((2), 5)$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://w

(3) 由 R_8 按第一种加 ear 方式得到, 在 $R_8 + ear((i), (j))$ 中, 由引理 2, (2)、(3)、(4) 中至少一条为非必要边, 故 $R_8 + ear((i), (j))$ 同构于某一已考虑过的图.

由 R_7 按第一种加 ear 方式得到, 在 $R_7 + ear((i), (j))$, $(i, j) \neq (1, 2)$ 下, 由引理 2, (1)、(2) 中至少一条为非必要边, 故 $R_7 + ear((i), (j))$, $(i, j) \neq (1, 2)$ 下同构于某一已考虑过的图. 故只需再考虑 $R_7 + ear((1), (2))$.

由 R_6 按第一种加 ear 方式得到, 在 $R_6 + ear((i), (j))$, $(i, j) \neq (2, 3)$ 下, 由引理 2, (2)、(3) 中至少一条为非必要边, 故 $R_6 + ear((i), (j))$, $(i, j) \neq (2, 3)$ 下同构于某一已考虑过的图. 故只需再考虑 $R_6 + ear((2), (3))$.

R_5 按第一种加 ear 方式得到, 在 $R_5 + ear((i), (j))$, $(i, j) \neq (1, 2)$ 下, 由引理 2, (1)、(2) 中至少一条为非必要边, 故 $R_5 + ear((i), (j))$, $(i, j) \neq (1, 2)$ 下同构于某一已考虑过的图. 故只需再考虑 $R_5 + ear((1), (2))$.

由 R_4 按第一种加 ear 方式得到, 在 $R_4 + ear((i), (j))$, $(i, j) \neq (6, 7)$ 下, 由引理 2, (6)、(7) 中至少一条为非必要边, 故 $R_4 + ear((i), (j))$, $(i, j) \neq (6, 7)$ 下同构于某一已考虑过的图. 故只需再考虑 $R_4 + ear(6, 7)$.

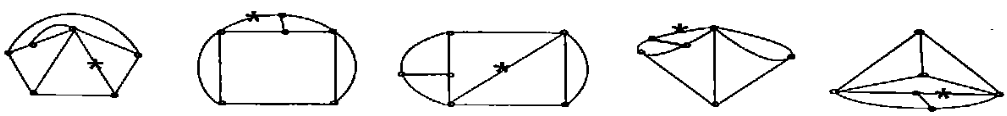


Figure 7 $R_9 + ear((2), 1)$, $R_7 + ear((1), (2))$, $R_6 + ear((2), (3))$, $R_5 + ear((1), (2))$, $R_4 + ear((6), (7))$

考虑两个四度点是否相邻可得 $R^3_{(4)}$ 与 $R^4_{(4)}$ 不同构. 从有无 5 度点及两个 4 度点是否相邻可判断 $R^2_{(0)}$、$R^3_{(0)}$、$R^4_{(0)}$ 不同构. 先考虑重数及重边的两端点的度, 再考虑重边是否在 3 圈中及两个 4 度点是否相邻, 可得 $R^7_{(1)} \cdots R^{15}_{(1)}$ 不同构. 考虑到重数、两个重边是否有公共端点, 及是否有 5 度点可先将 $R^{18}_{(2)}$、$R^{24}_{(2)}$、$R^{25}_{(2)}$、$R^{29}_{(2)}$ 同其余的 $R^i_{(2)}$ 区分开来.

1. 两个重边的端点度为(3, 3, 3, 4): $R^{21}_{(2)}$

2. 两个重边的端点度为(3, 3, 4, 4): 有两个 3 圈包含某个重边的是 $R^{22}_{(2)}$, 只有一个 3 圈包含某个重边的是 $R^{23}_{(2)}$

3. 两个重边的端点度为(3, 4, 3, 4)

(a) 两个 4 度点相邻: 没有 3 圈的是 $R^{20}_{(2)}$, 有一个 3 圈的是 $R^{19}_{(2)}$, 有两个 3 圈的是 $R^{30}_{(2)}$

(b) 两个 4 度点不相邻: 有一个 3 圈的是 $R^{27}_{(2)}$, 有两个 3 圈且重边在 3 圈中的是 $R^{28}_{(2)}$, 有两个 3 圈且重边不在 3 圈中的是 $R^{26}_{(2)}$

故 $p = 6$, $n = 5$ 的 R 图有: $R^2_{(0)} \cdots R^4_{(0)}$, $R^7_{(1)} \cdots R^{15}_{(1)}$, $R^{18}_{(2)} \cdots R^{(30)}_{(2)}$, $R^{16}_{(3)} \cdots R^{24}_{(3)}$, $R^3_{(4)}$, $R^4_{(4)}$.

7: $p = 7$ 时, $q = 11$

(1) 由 R_{16} 按第二种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_{16} + ear((1), 1) = R^{25}_{(3)}$, $R_{16} + ear((3), 1) = R^{31}_{(2)}$, $R_{16} + ear((5), 1) = R^{32}_{(2)}$, $R_{16} + ear((7), 1) = R^5_{(4)}$, $R_{16} + ear((8), 1)$, $R_{16} + ear((9), 1) = R^{26}_{(3)}$. 由引理 4(1) 可知 $R_{16} + ear((8), 1)$ 同构 $R_{16} + ear((1), 1) = R^{25}_{(3)}$.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://w

由 R_{15} 按第二种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_{15}+ear((1),1)=R^{33}_{(2)}$, $R_{15}+ear((1),6)=R^{27}_{(3)}$, $R_{15}+ear((2),1)=R^{34}_{(2)}$, $R_{15}+ear((2),5)=R^{16}_{(1)}$, $R_{15}+ear((2),6)=R^{17}_{(1)}$, $R_{15}+ear((6),1)=R^{28}_{(3)}$, $R_{15}+ear((6),2)$, $R_{15}+ear((6),5)$, $R_{15}+ear((6),4)=R^{35}_{(2)}$, $R_{15}+ear((6),6)$, $R_{15}+ear((6),3)=R^{36}_{(2)}$. 由引理 4(1) 可知 $R_{15}+ear((6),2)$ 同构 $R_{15}+ear((2),2)=R_{15}+ear((2),1)=R^{34}_{(2)}$, 由引理 5 可知 $R_{15}+ear((6),5)$ 同构 $R_{15}+ear((1),5)=R_{15}+ear((1),1)=R^{33}_{(2)}$.

由 R_{14} 按第二种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_{14}+ear((1),1)$, $R_{14}+ear((2),1)$, $R_{14}+ear((3),1)=R^{18}_{(1)}$, $R_{14}+ear((6),1)$, $R_{14}+ear((9),1)=R^{5}_{(0)}$, $R_{14}+ear((1),6)=R^{19}_{(1)}$, $R_{14}+ear((2),6)$, $R_{14}+ear((4),6)$, $R_{14}+ear((6),6)$, $R_{14}+ear((7),6)$, $R_{14}+ear((8),6)=R^{6}_{(0)}$, $R_{14}+ear((2),5)$, $R_{14}+ear((4),5)=R^{20}_{(1)}$, $R_{14}+ear((6),5)=R^{37}_{(2)}$, $R_{14}+ear((7),5)=R^{21}_{(1)}$, $R_{14}+ear((8),5)$. 由引理 5 可知 $R_{14}+ear((6),1)$ 同构 $R_{14}+ear((4),1)=R_{14}+ear((3),1)=R^{18}_{(1)}$. 由引理 5 可知, $R_{14}+ear((2),6)$ 同构 $R_{14}+ear((1),6)=R^{19}_{(1)}$.

由 R_{13} 按第二种加 ear 方式得到, 由于该图点传递, 故只需考虑 $R_{13}+ear((1),6)$, $R_{13}+ear((2),6)$, $R_{13}+ear((4),6)=R^{7}_{(0)}$, $R_{13}+ear((6),6)$, $R_{13}+ear((8),6)$.

(2) 由 R_{12} 按第一种加 ear 方式得到, 在 $R_{12}+ear((i),(j))$ 中, 由引理 2, (1)、(2)、(3)、(4) 中至少一条为非必要边, 故 $R_{12}+ear((i),(j))$ 同构于某一已考虑过的图.

由 R_{11} 按第一种加 ear 方式得到, 在 $R_{11}+ear((i),(j))$, $(i,j)\neq(4,5)$ 下, 由引理 2, (4)、(5) 中至少一条为非必要边, 故 $R_{11}+ear((i),(j))$, $(i,j)\neq(4,5)$ 下同构于某一已考虑过的图. 故只需再考虑 $R_{11}+ear((4),(5))$.

由 R_{10} 按第一种加 ear 方式得到, 在 $R_{10}+ear((i),(j))$, $(i,j)\neq(7,8)$ 下, 由引理 2, (7)、(8) 中至少一条为非必要边, 故 $R_{10}+ear((i),(j))$, $(i,j)\neq(7,8)$ 下同构于某一已考虑过的图. 故只需再考虑 $R_{10}+ear((7),(8))$.

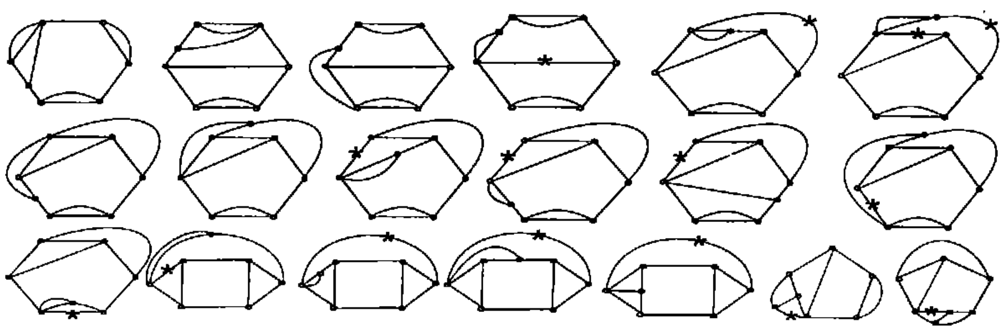


Figure 8 $R_{16}+ear((8),1)$, $R_{15}+ear((6),2)$, $R_{15}+ear((6),5)$, $R_{15}+ear((6),6)$, $R_{14}+ear((1),1)$, $R_{14}+ear((2),1)$, $R_{14}+ear((6),1)$, $R_{14}+ear((2),6)$, $R_{14}+ear((4),6)$, $R_{14}+ear((6),6)$, $R_{14}+ear((7),6)$, $R_{14}+ear((2),5)$, $R_{14}+ear((8),5)$, $R_{13}+ear((1),6)$, $R_{13}+ear((2),6)$, $R_{13}+ear((6),6)$, $R_{13}+ear((8),6)$, $R_{11}+ear((4),5)$, $R_{10}+ear((7),8)$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://w

由 R_9 按第一种加 ear 方式得到, 在 $R_9 + ear((i), (j))$ 中, 由引理 2, (2)、(3)、(4)、(5) 中至少一条为非必要边, 故 $R_9 + ear((i), (j))$ 同构于某一已考虑过的图.

考虑3圈的个数可得$R^5_{(0)} \cdots R^7_{(0)}$ 不同构. 先考虑与4度点关联的重边的个数及3圈的个数, 再考虑重边两个端点是否相邻可得$R^{16}_{(1)} \cdots R^{21}_{(1)}$ 不同构. 考虑与4度点关联的重边的个数及3圈的个数, 再考虑有无一边连接两个重边可得 $R^{31}_{(2)} \cdots R^{37}_{(2)}$ 不同构. 考虑是否为 Hamilton 图、四度点是否含两个重边及有无 3 圈可得 $R^{25}_{(3)} \cdots R^{28}_{(3)}$ 不同构.

故 $p = 7$, $n = 5$ 的 R 图有: $R^5_{(0)} \cdots R^7_{(0)}$, $R^{16}_{(1)} \cdots R^{21}_{(1)}$, $R^{31}_{(2)} \cdots R^{37}_{(2)}$, $R^{25}_{(3)} \cdots R^{28}_{(3)}$, $R^5_{(4)}$.

8: $p = 8$ 时, $q = 12$.

(1) 由 R_{16} 按第一种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_{16} + ear((1), (1)) = R^{29}_{(3)}$, $R_{16} + ear((1), (2)) = R^{38}_{(2)}$, $R_{16} + ear((1), (3)) = R^{22}_{(1)}$, $R_{16} + ear((1), (7))$, $R_{16} + ear((1), (9)) = R^{39}_{(2)}$, $R_{16} + ear((7), (8))$. 由引理 4(2) 可知 $R_{16} + ear((1), (7))$ 同构于 $R_{16} + ear((1), (2)) = R^{38}_{(2)}$. 由引理6可知$R_{16} + ear((7), (8))$ 同构于$R_{16} + ear((1), (1)) = R^{29}_{(3)}$.

由 R_{15} 按第一种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_{15} + ear((1), (1)) = R^{30}_{(3)}$, $R_{15} + ear((1), (3)) = R^{23}_{(1)}$, $R_{15} + ear((1), (6))$, $R_{15} + ear((2), (2)) = R^{40}_{(2)}$, $R_{15} + ear((2), (3)) = R^{24}_{(1)}$, $R_{15} + ear((2), (5)) = R^{8}_{(0)}$, $R_{15} + ear((2), (6))$, $R_{15} + ear((2), (7))$, $R_{15} + ear((6), (6))$, $R_{15} + ear((6), (7))$, $R_{15} + ear((6), (8))$, $R_{15} + ear((6), (9)) = R^{41}_{(2)}$. 由引理 4(2) 可知$R_{15} + ear((2), (6))$ 同构于$R_{15} + ear((2), (3)) = R^{24}_{(1)}$. 由引理 3 可知$R_{15} + ear((2), (7))$ 同构于 $R_{15} + ear((1), 3)) = R^{23}_{(1)}$. 由引理 6 可知 $R_{15} + ear((6), (8))$ 同构于 $R_{15} + ear((2), (2)) = R^{40}_{(2)}$.

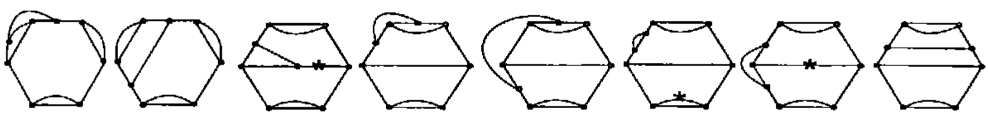


Figure 9 $R_{16} + ear((1), (7))$, $R_{16} + ear((7), (8))$, $R_{15} + ear((1), (6))$, $R_{15} + ear((2), (6))$, $R_{15} + ear((2), (7))$, $R_{15} + ear((6), (6))$, $R_{15} + ear((6), (7))$, $R_{15} + ear((6), (8))$

由 R_{14} 按第一种加 ear 方式得到, 由于对称, 只需考虑 $R_{14} + ear((1), (1))$, $R_{14} + ear((1), (2))$, $R_{14} + ear((2), (2))$, $R_{14} + ear((2), (3))$, $R_{14} + ear((2), (5))$, $R_{14} + ear((2), (6))$, $R_{14} + ear((2), (7))$, $R_{14} + ear((2), (9))$, $R_{14} + ear((6), (6))$, $R_{14} + ear((6), (7))$, $R_{14} + ear((6), (8)) = R^{9}_{(0)}$, $R_{14} + ear((8), (8))$, $R_{14} + ear((8), (9))$. 由引理 6 得 $R_{14} + ear((8), (9))$ 同构 $R_{14} + ear((6), (8)) = R^{9}_{(0)}$.

由 R_{13} 按第一种加 ear 方式得到, 在 $R_{13} + ear((i), (j))$, $(i, j) \neq (2, 4)$ 且$(i, j) \neq (3, 5)$ 且$(i, j) \neq (1, 7)$ 下, 取(1), (7) 中不含新顶点的边(k), 由引理 2 知(k) 为非必要边, 故 $R(R_{13} + ear(i,j) - (k))$ 是至少含一个重边的基圈数为 4 的R 图, 从而 $R_{13} + ear((i), (j))$, 在$(i, j) \neq (2, 4)$ 且$(i, j) \neq (3, 5)$ 且$(i, j) \neq (1, 7)$ 下同构于某一已考虑过的图. 再由对称, 只需再考虑 $R_{13} + ear((2), (4)) = R^{10}_{(0)}$, $R_{13} + ear((1), (7))$.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://w

考虑有无3 圈及 3 圈的个数可得 $R^{8}_{(0)} \cdots R^{10}_{(0)}$ 不同构. 考虑 3 圈的个数及两个 3 圈的关系可得 $R^{22}_{(1)} \cdots R^{24}_{(1)}$ 不同构. 考虑最短圈及 3 圈的个数可得 $R^{38}_{(2)} \cdots R^{41}_{(2)}$ 不同构. 考虑是否为 Hamilton 图可得 $R^{29}_{(3)}, R^{30}_{(3)}$ 不同构.

故 $p = 8$, $n = 5$ 的 R 图有: $R^{8}_{(0)} \cdots R^{10}_{(0)}$, $R^{22}_{(1)} \cdots R^{24}_{(1)}$, $R^{38}_{(2)} \cdots R^{41}_{(2)}$, $R^{29}_{(3)}$, $R^{30}_{(3)}$, $R^{6}_{(4)}$.

至此, 定理证毕.

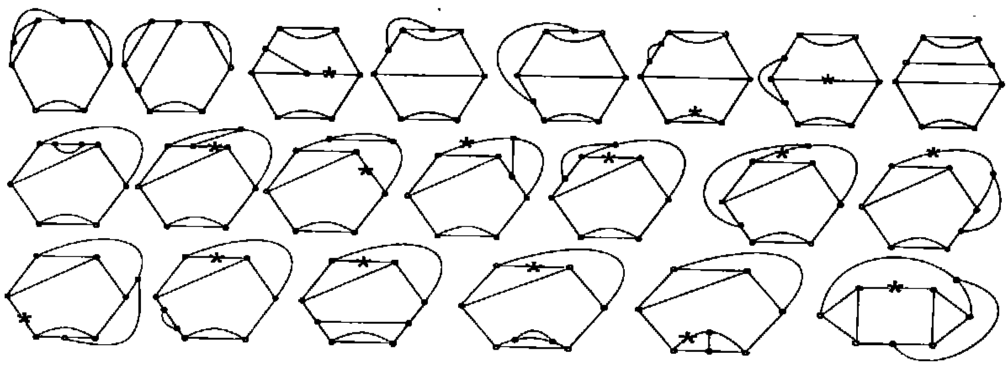


Figure 10　R_{16} + $ear((1), (7))$, R_{16} + $ear((7), (8))$, R_{15} + $ear((1), (6))$,
R_{15} + $ear((2), (6))$, R_{15} + $ear((2), (7))$, R_{15} + $ear((6), (6))$,
R_{15} + $ear((6), (7))$, R_{15} + $ear((6), (8))$, R_{14} + $ear((1), (1))$,
R_{14} + $ear((1), (2))$, R_{14} + $ear((2), (2))$, R_{14} + $ear((2), (3))$,
R_{14} + $ear((2), (5))$, R_{14} + $ear((2), (6))$, R_{14} + $ear((2), (7))$,
R_{14} + $ear((2), (9))$, R_{14} + $ear((6), (6))$, R_{14} + $ear((6), (7))$,
R_{14} + $ear((8), (8))$, R_{14} + $ear((8), (9))$, R_{13} + $ear((1), (7))$

作者对张福基教授的悉心指导, 郭晓峰教授提出的宝贵意见表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Xian'an Jin, Fuji Zhang. Zeros of the Jones polynomials for families of pretzel links. Physica A 2003, 328: 391– 408.

[2] Bollobás B. Extremal Graph Theory. Academic Press, London, New York, San Francisco (1978).

[3] Heap B R. The Enumeration of Homeomorphically Irreducible Star Graphs. Journal of Mathematical Physics. Vol. 7, No. 9, Setember 1966.

The Construction of 2-Connected Plane Graph with Cyclomatic Number 5

Yang Weiling　　Jin Xian'an

(Departmemt of Mathematics, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005)

Abstract　By suppressing all the vertices of degree 2 of the 2-connected plane graph, we can obtain its reduction graph with the same cyclomatic number. In this paper, all the 2-connected reduction graphs with cyclomatic number 5 are showed.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://w

Key Words　2-connected, plane graph, suppress, cyclomatic number

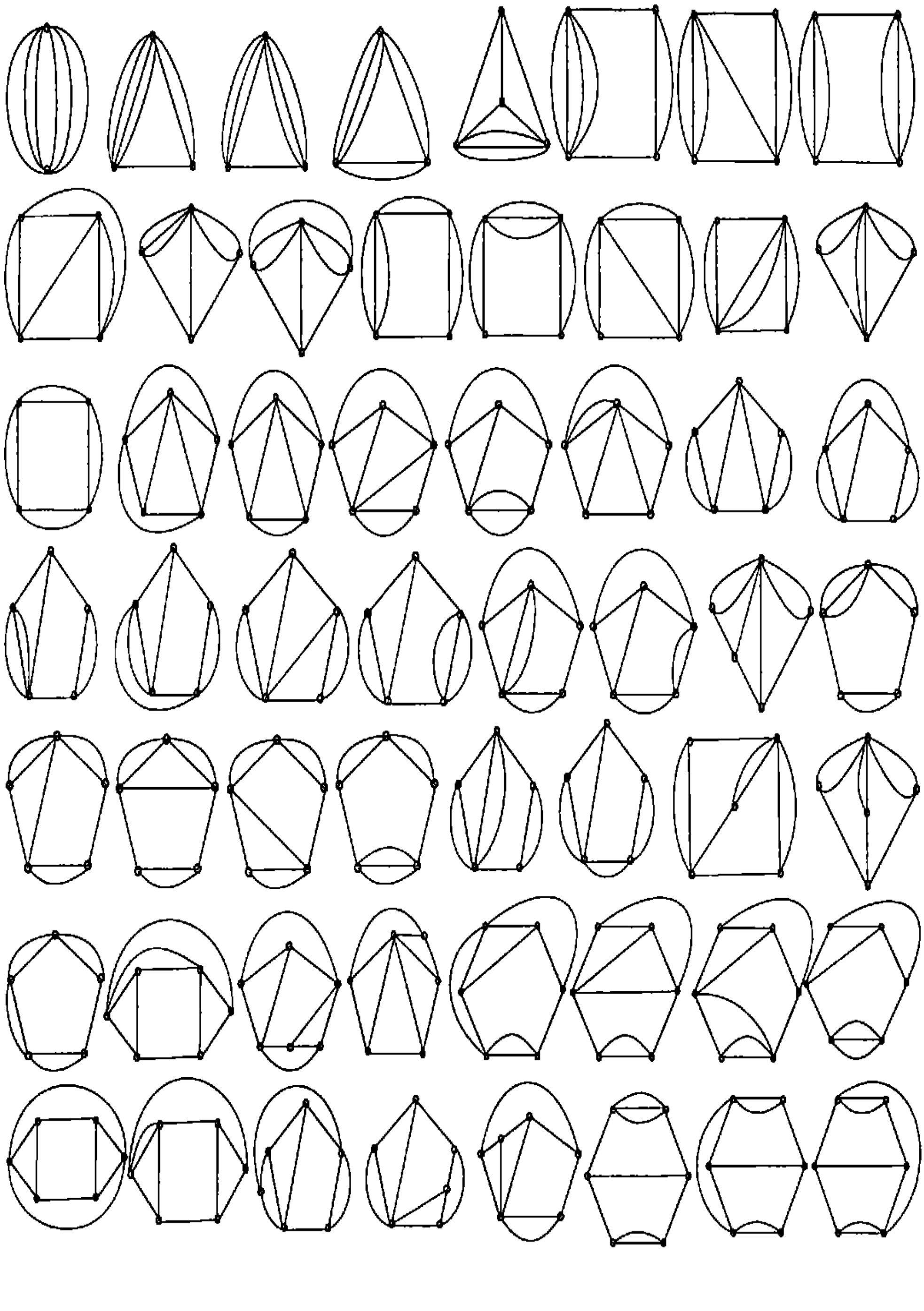


Figure 11 $R^{1}_{(1)}$, $R^{1}_{(2)}$, $R^{2}_{(2)}$, $R^{1}_{(3)}$, $R^{2}_{(1)}$, $R^{3}_{(2)}\cdots R^{8}_{(2)}$, $R^{2}_{(3)}\cdots R^{6}_{(3)}$, $R^{1}_{(4)}$, $R^{1}_{(0)}$, $R^{3}_{(1)}\cdots R^{6}_{(1)}$, $R^{9}_{(2)}\cdots R^{17}_{(2)}$, $R^{7}_{(3)}\cdots R^{15}_{(3)}$, $R^{2}_{(4)}$, $R^{2}_{(0)}\cdots R^{4}_{(0)}$, $R^{7}_{(1)}\cdots R^{15}_{(1)}$, $R^{18}_{(2)}\cdots R^{20}_{(2)}$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://w

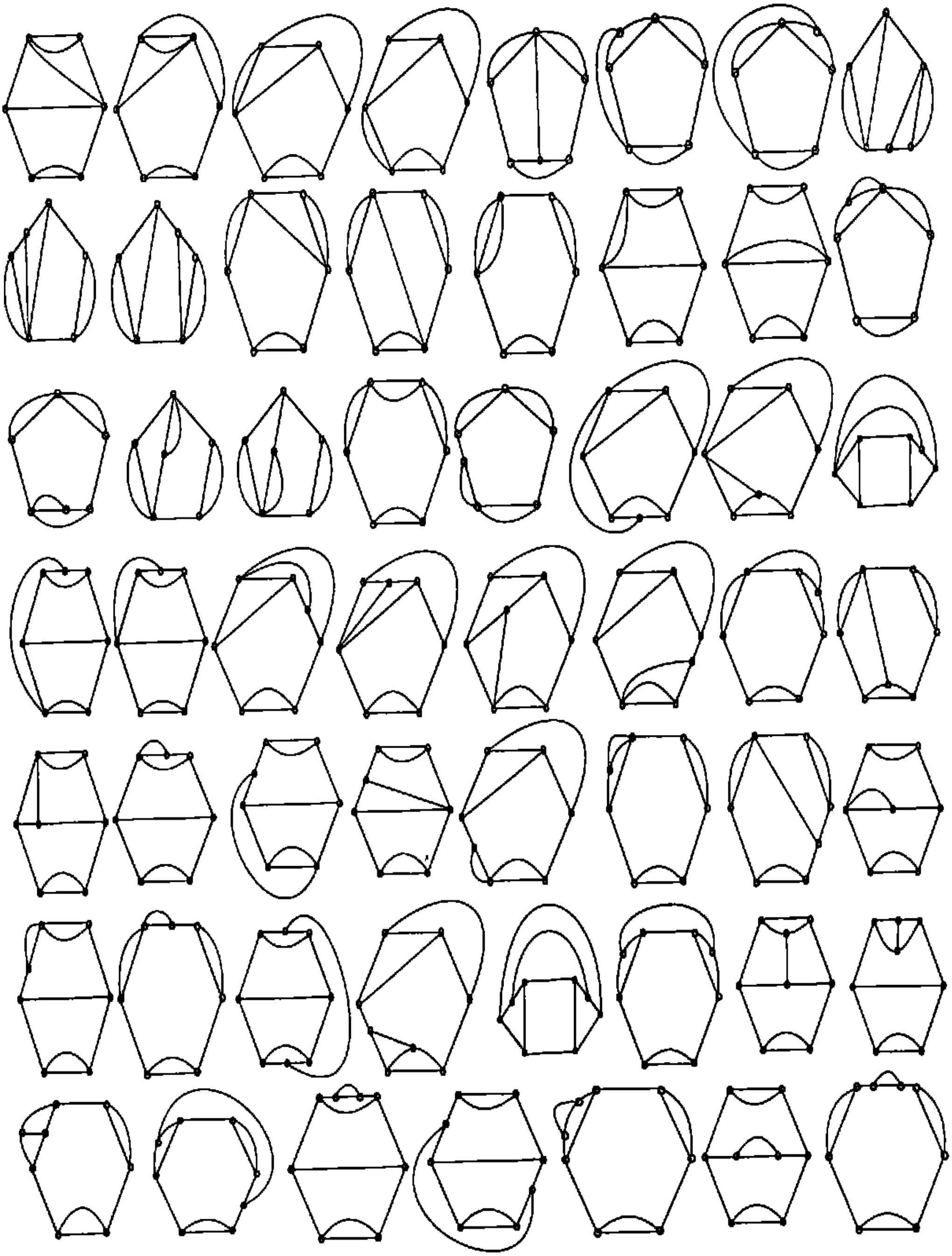


Figure 12　$R_{(2)}^{21}\cdots R_{(2)}^{30}$，$R_{(3)}^{16}\cdots R_{(3)}^{24}$，$R_{(4)}^{3}$，$R_{(4)}^{4}$，$R_{(0)}^{5}\cdots R_{(0)}^{7}$，$R_{(1)}^{16}\cdots R_{(1)}^{21}$，$R_{(2)}^{31}\cdots R_{(2)}^{37}$，$R_{(3)}^{25}\cdots R_{(3)}^{28}$，$R_{(4)}^{5}$, $R_{(0)}^{8}\cdots R_{(0)}^{10}$，$R_{(1)}^{22}$，$R_{(1)}^{24}$, $R_{(2)}^{38}\cdots R_{(2)}^{41}$，$R_{(3)}^{29}$, $R_{(3)}^{30}$，$R_{(4)}^{6}$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://w