系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
21(3) (2001, 7), 287–291

高阶混合中立型微分方程解的振动性*

程 金 发

(厦门大学数学系， 厦门 361005)

摘要 本文研究奇数阶混合类型的中立型微分方程：

$$[x(t)+cx(t-h)+c^*x(t+h^*)]^{(n)}=qx(t-g)+px(t+g^*),$$

这里 c, c^*, g, g^*, h, h^*, p 和 q 是实常数，得到关于解振动的一些新的判别准则. 本文结果改进了 Grace S. R. 的全部定理.

关键词 中立微分方程，振动性，特征方程.

1 引 言

关于线性自治泛函微分方程解的振动性问题，长期以来是人们致力研究的课题之一，并具有理论和实践中的众多应用，近年来相关的文献有 [1–4].

本文我们研究奇数阶混合类型的中立型微分方程：

$$[x(t)+cx(t-h)+c^*x(t+h^*)]^{(n)}=qx(t-g)+px(t+g^*) \tag{1.1}$$

解的振动性，这里 c, c^*, g, g^*, h, h^*, p 和 q 是实常数，以及下面更为一般的方程：

$$\left[x(t)+\sum_{i=1}^{n_1}c_ix(t-h_i)+\sum_{j=1}^{n_2}c_j^*x(t+h_j^*)\right]^{(n)}=\sum_{l=1}^{n_3}q_lx(t-g_l)+\sum_{k=1}^{n_4}p_kx(t+g_k^*) \tag{1.2}$$

解的振动性，这里 c_i, h_i, c_j^*, h_j^*, q_l, g_l, p_k 和 g_k^* 都是常数.

如果单靠特征方程有无实根来判断解的振动性，要确定特征方程是否存在实根本身是个相当困难的问题. 因此，本文的目的是建立一些直接用 c, c^*, q, q^*, h, h^*, p 和 p^* 的显式来表达的充分条件，本文结果改进了文 [1] 中的全部定理.

为节省篇幅，我们仅对方程 (1.1) 加以详细论证，对于方程 (1.2), 用同样的方法很容易得出相应的充分性结果.

如果一个解有任意大的零点，那么称解振动，如果一个解最终为正或为负，则称解非振动. 如果方程 (1.1) 的所有解振动，则称方程 (1.1) 是振动的.

* 国家自然科学基金资助课题.
收稿日期：1999-07-08, 收到修改稿日期：2000-08-21.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2 定理及其证明

本文研究微分方程 (1.1) 的振动性.

具体地，我们先来看方程:

$$[x(t)+cx(t-h)-c^*x(t+h^*)]^{(n)}=qx(t-g)+px(t+g^*), \tag{2.1}$$

这里 c, c^*, g, g^*, h, h^*, p 和 q 是非负实数.

定理 1 假设 c^*, g^*, h^* 和 p 是正实常数,

$$p^{\frac{1}{n}}\Big(\frac{g^*}{n}\Big)e>\Big[1+c\frac{g^{*n}}{(h-g^*)^n}\Big]^{\frac{1}{n}}, \tag{2.2}$$

且要么:

$$q>0,\quad \Big(\frac{q}{c^*}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big(\frac{g+h^*}{h}\Big)e>1, \tag{2.3}$$

要么:

$$h^*>g^*,\quad \Big(\frac{p+q}{c^*}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big(\frac{h^*-g^*}{n}\Big)e>1, \tag{2.4}$$

那么方程 (2.1) 是振动的.

证 方程 (2.1) 的振动性等价于:

$$[x(t-g^*)+cx(t-h-g^*)-c^*x(t+h^*-g^{**})]^{(n)}=qx(t-g-g^*)+px(t), \tag{2.5}$$

或

$$[x(t+g)+cx(t-h+g)-c^*x(t+h^*+g)]^{(n)}=qx(t)+px(t+g+g^*) \tag{2.6}$$

的振动性. 对于方程 (2.5), (2.6), 它们的特征函数为:

$$F(\lambda)=\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda g^*}+c\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda(h-g^*)}-c^*\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda(h^*-g^*)}-p-q\mathrm{e}^{-\lambda(g^*+g)}, \tag{2.7}$$

或

$$\widetilde{F}(\lambda)=\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda g}+c\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda(h-g)}-c^*\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda(h^*+g)}-q-p\mathrm{e}^{\lambda(g^*+g)}. \tag{2.8}$$

对于式子 (2.7),

1) 若 $\lambda>0$, 则 $F(\lambda)<\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda g^*}+c\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda(h-g^*)}-p$.

当 $\lambda=\frac{n}{g^*}$ 时, $\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda g^*}$ 取最大值 $\frac{n^n}{g^{*n}}\mathrm{e}^{-n}$, 当 $\lambda=\frac{n}{h-g^*}$ 时, $\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda(h-g^*)}$ 取最大值, 从而:

$$F(\lambda)\le\frac{n^n}{g^{*n}}\mathrm{e}^{-n}+c\frac{n^n}{(h-g^*)^n}\mathrm{e}^{-n}-p.$$

因此, 只要 $p>\big[\frac{1}{g^{*n}}+\frac{c}{(h-g^*)^n}\big]n^n\mathrm{e}^{-n}$, 就有 $F(\lambda)<0$.

2) 若 $\lambda<0$, 则 $F(\lambda)<-c^*\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda(h^*-g^*)}-q-p$.

若假设 $h^*>g^*$, 则当 $\lambda=-\frac{n}{h^*-g^*}$ 时, $-\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda(h^*-g^*)}$ 有最大值, 从而

$$F(\lambda)\le-c^*\Big(-\frac{n}{h^*-g^*}\Big)^n\mathrm{e}^{-n}-p-q.$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

因此只要 $q+p>\frac{c^*}{h^*-g^*}n^n\mathrm{e}^{-n}$, 就有 $F(\lambda)<0$.

对于式子 (2.8), 若 $\lambda<0$, 则 $\widetilde{F}(\lambda)<-c^*\lambda^n\mathrm{e}^{\lambda(h^*+g)}-q$. 当 $\lambda=-\frac{n}{h^*+g^*}$ 时, $-\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda(h+g^*)}$ 取最大值, 从而 $\widetilde{F}(\lambda)<c^*\frac{n^n}{(h^*+g)^n}\mathrm{e}^{-n}-q$. 只要 $q>c^*\frac{n^n}{(h^*+g)^n}\mathrm{e}^{-n}$, 就有 $\widetilde{F}(\lambda)<0$. 综上所知, 只要定理 1 的假设条件满足, 方程 (2.1) 的特征方程 $F(\lambda)=0$(或 $\widetilde{F}(\lambda)=0$) 就不可能存在实根. 因此方程 (2.1) 是振动的. 定理 1 证毕.

注 1　由于 $(1+c)^{\frac{1}{n}}>\left[1+c\frac{g^{*n}}{(g^*+h)^n}\right]^{\frac{1}{n}}$, 因此本文定理 1 改进了文 [1] 中的定理 1.

考虑方程:

$$[x(t)-cx(t-h)+c^*x(t+h^*)]^{(n)}=qx(t-g)+px(t+g^*), \tag{2.9}$$

$$[x(t)+cx(t-h)-c^*x(t-h^*)]^{(n)}=qx(t-g)+px(t+g^*), \tag{2.10}$$

$$[x(t)+cx(t+h)-c^*x(t+h^*)]^{(n)}=qx(t-g)+px(t+g^*), \tag{2.11}$$

$$[x(t)+cx(t-h)+c^*x(t+h^*)]^{(n)}=qx(t-g)+px(t+g^*), \tag{2.12}$$

$$[x(t)+cx(t+h)+c^*x(t+h^*)]^{(n)}=qx(t-g)+px(t+g^*) \tag{2.13}$$

这里 c, c^*, g, g^*, h, h^*, p 和 q 是非负实数.

用同样的方法, 可得下面的定理.

定理 2　假设 c, p 和 q 是正常数, $g^*>h^*$, 且 $g>h$, 如果

$$p^{\frac{1}{n}}\Big(\frac{g^*-h^*}{n}\Big)e>\Big[\Big(\frac{g^*-h^*}{g^*}\Big)^n+c^*\Big]^{\frac{1}{n}}, \tag{2.14}$$

$$\Big(\frac{q}{c}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big(\frac{g-h}{n}\Big)e>1, \tag{2.15}$$

那么方程 (2.9) 是振动的.

注 2　由于 $(1+c^*)^{\frac{1}{n}}>\left[\left(\frac{g^*-h^*}{g^*}\right)^n+c^*\right]^{\frac{1}{n}}$, 因此本文定理 2 改进了文 [1] 中的定理 2.

定理 3　假设常数 c^*, g^*, p 和 q 是正数, 且 $g>h^*$, 如果

$$p^{\frac{1}{n}}\Big(\frac{g^*}{n}\Big)e>\Big[1+c\frac{g^{*n}}{(h+g^*)^n}\Big]^{\frac{1}{n}}, \tag{2.16}$$

且

$$\Big(\frac{q}{c^*}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big(\frac{g-h^*}{h}\Big)e>1, \tag{2.17}$$

那么方程 (2.10) 是振动的.

定理 4　假设 c^*, p 是正数, 且 $g^*>h$, 如果

$$p^{\frac{1}{n}}\Big(\frac{g^*-h}{n}\Big)e>\Big[\Big(\frac{g^*-h}{g^*}\Big)^n+c\Big]^{\frac{1}{n}}, \tag{2.18}$$

且要么 $q>0$,

$$\Big(\frac{q}{c^*}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big(\frac{g+h^*}{n}\Big)e>1, \tag{2.19}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

要么 $h^*>g^*$,

$$\left(\frac{p+q}{c^*}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{h^*-g^*}{n}\right)e>1, \tag{2.20}$$

那么方程 (2.11) 是振动的.

定理 5 如果 $g^*>h^*$ 且

$$p^{\frac{1}{n}}\left(\frac{g^*-h^*}{n}\right)e>\left[\left(\frac{g^*-h^*}{g^*}\right)^n+c\left(\frac{g^*-h^*}{g^*+h^*}\right)^n+c^*\right]^{\frac{1}{n}}, \tag{2.21}$$

那么方程 (2.12) 是振动的.

定理 6 如果 $h^*>h, g^*>h$, 且有

$$p^{\frac{1}{n}}\left(\frac{g^*-h^*}{h}\right)e>\left[\left(\frac{g^*-h^*}{g^*}\right)^n+c\left(\frac{g^*-h^*}{g^*-h}\right)^n+c^*\right]^{\frac{1}{n}}, \tag{2.22}$$

那么方程 (2.13) 是振动的.

同样地, 通过考察方程:

$$[x(t)+cx(t-h)+c^*x(t-h^*)]^{(n)}=qx(t-g)+px(t+g^*), \tag{2.23}$$

$$[x(t)-cx(t-h)-c^*x(t+h^*)]^{(n)}=qx(t-g)+px(t+g^*), \tag{2.24}$$

$$[x(t)-cx(t-h)-c^*x(t-h^*)]^{(n)}=qx(t-g)+px(t+g^*), \tag{2.25}$$

$$[x(t)-cx(t+h)-c^*x(t+h^*)]^{(n)}=qx(t-g)+px(t+g^*), \tag{2.26}$$

这里 c, c^*, g, g^*, h, h^*, p 和 q 是非负实数. 我们得到下面的结论.

定理 7 如果

$$p^{\frac{1}{n}}\left(\frac{g^*}{n}\right)e>\left[1+c\left(\frac{g^*}{h+g^*}\right)^n+c^*\left(\frac{g^*}{h^*+g^*}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}, \tag{2.27}$$

那么方程 (2.23) 是振动的.

定理 8 如果

$$p^{\frac{1}{n}}\left(\frac{g^*}{n}\right)e>1, \tag{2.28}$$

$$g>h,\quad q^{\frac{1}{n}}\left(\frac{g-h}{n}\right)e>\left[c+c^*\left(\frac{g-h}{g+h^*}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}, \tag{2.29}$$

那么方程 (2.24) 是振动的.

定理 9 如果 $g>h, h>h^*$

$$p^{\frac{1}{n}}\left(\frac{g^*}{n}\right)e>1, \tag{2.30}$$

$$q^{\frac{1}{n}}\left(\frac{g-h}{n}\right)e>\left[c+c^*\left(\frac{g-h}{g-h^*}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}, \tag{2.31}$$

那么方程 (2.25) 是振动的.

定理 10 如果

$$p^{\frac{1}{n}}\left(\frac{g^*}{n}\right)e>1, \tag{2.32}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

且要么 $h^* > h$,

$$q^{\frac{1}{n}}\Big(\frac{g+h}{n}\Big)e > \Big[c + c^*\Big(\frac{g+h}{g+h^*}\Big)^n\Big]^{\frac{1}{n}}, \tag{2.33}$$

要么 $h^* > h > g^*$,

$$(q+p)^{\frac{1}{n}}\Big(\frac{h-g^*}{n}\Big)e > \Big[c + c^*\Big(\frac{h-g^*}{h^*-g^*}\Big)^n\Big]^{\frac{1}{n}} \tag{2.34}$$

那么方程 (2.26) 是振动的.

注 3　本文定理 10 也改进了文 [1] 中的定理 3-10.

参 考 文 献

[1] Grace S R. On the oscillations of mixed neutral equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 1995, **194**: 377–388.

[2] Grace S R and Lalli B S. Oscillation and asymptotic behavior of certain second order neutral differential equations. *Radovi Mat.*, 1989, **5**: 121–126.

[3] Gyori I and Ladas G. Oscillation Theory of Delay Differential Equations. Clarendon Press, 1991.

[4] Ladde G S, Lakshmilrantham V, Zhang B G. Oscillation Theory of Differential Equations with Deviatiing Arguments. Marcel Dekker, 1987.

[5] Hale J. Theory of Functional Differential Equations. Springer Verlag, 1977.

OSCILLATIONS OF HIGH ORDER MIXED NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Cheng Jinfa

(*Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen* 361005)

Abstract The following odd order mixde neutral differential equations:

$$[x(t) + cx(t-h) + c^*x(t+h^*)]^{(n)} = qx(t-g) + px(t+g^*)$$

are studied, where c, c^*, g, g^*, h, h^*, p and q are real number. Some new oscillation criterias of the solutions are obtained. Our results in this paper improve all theorems offered by Grace S. R.

Key words Neutral differential equation, oscillation, characteristic equation.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net