系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
24(3) (2004, 7), 389–397

二阶线性中立时滞方程非振动解的存在性*

程 金 发
(厦门大学数学科学学院， 厦门 361005)
Annie Z.
(Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi 221005, India)

摘要 考虑具有正负系数的中立时滞微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[x(t)+px(t-\tau)]+Q_1(t)x(t-\sigma_1)-Q_2(t)x(t-\sigma_2)=0,$$

这里 $p\in R$ 和 $\tau\in(0,\infty)$, $\sigma_1,\sigma_2\in[0,\infty)$ 且 $Q_1,Q_2\in C([t_0,\infty),R^+)$. 对于上面方程非振动解的存在性，得到一个用 $\int^{\infty} sQ_i\mathrm{d}s<\infty$, $i=1,2$, 来表达的充分条件。这个结果去掉了 M. R. S. Kulenovic 和 S. Hadziomerspahic 文中一个相当强的假设，改进了其中的相关定理.

关键词 中立微分方程，振动性，压缩原理.

MR(2000) 主题分类号 34K15， 34C10

1 介 绍

考虑具有正负系数的二阶中立时滞微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[x(t)+px(t-\tau)]+Q_1(t)x(t-\sigma_1)-Q_2(t)x(t-\sigma_2)=0, \tag{1}$$

这里 $p\in R$, 且

$$\tau\in(0,\infty),\quad \sigma_1,\sigma_2\in[0,\infty),\quad Q_1,Q_2\in C([t_0,\infty),R^+). \tag{2}$$

$$\int^{\infty} sQ_i\mathrm{d}s<\infty,\quad i=1,2, \tag{3}$$

对于方程 (1), 最近 M. R. S. Kulenovic 和 S. Hadziomerspahic 在 [1] 中得到下面的结果

定理 A 考虑方程 (1), 如果条件 (2), (3), 和

$$aQ_1(t)-Q_2(t)\geq 0, \tag{4}$$

对每个 $t\geq T_1$ 和 $a>0$ 成立. 这里 $p\neq\pm1$，且 T_1 充分大，那么 (1) 有一个非振动解.

---

* 国家自然科学基金 (10271043) 资助课题.
收稿日期：2002-01-04, 收到修改稿日期：2002-09-06.

在非常数系数情况下，关于方程 (1) 非振动解存在的充分条件，迄今为止，这是第一个关于所有 p 值而言的全局性结果。但是，条件 (4) 似乎太强了. 本文目的是去掉强条件 (4)，且允许 $p=1$, 得到了方程 (1) 非振动解存在的全局性充分条件 (关于 p 值).

我们的主要结果是

定理 1 考虑方程 (1), 如果条件 (2),(3) 成立，这里 $p\neq -1$, 那么方程 (1) 有一个非振动解.

2 定理的证明

依据参数 p 不同的取值范围，定理 1 的证明将分为以下五种情形。

情形 1 $p=1$. 由条件 (3)，我们可以选择一个充分大的 $t_1>t_0$ 使得

$$\int_t^{\infty}(u-t)Q_1(u)\mathrm{d}u\leq\frac{1}{3},$$

$$\int_t^{\infty}(u-t)Q_2(u)\mathrm{d}u\leq\frac{1}{3}$$

对 $t\geq t_1$ 成立。让 X 为定义在 $[t_0,\infty)$ 具有上范数的所有连续有界函数的集合. 记

$$\Omega=\{x\in X:1\leq x\leq 3,t\geq t_0.\},$$

那么 Ω 是 X 的有界闭凸子集. 定义一个映照 $S:\Omega\to X$ 如下

$$(Sx)(t)=\begin{cases}2-\sum\limits_{j=1}^{\infty}\int_{t+(2j-1)\tau}^{t+2j\tau}\int\limits_{s}^{\infty}[Q_1(u)x(u-\sigma_1)-Q_2(u)x(u-\sigma_2)]\mathrm{d}u\mathrm{d}s, & t\geq t_1,\\ (Sx)(t_1), \quad t_0\leq t\leq t_1.\end{cases}$$

显然，Sx 是连续的. 对每个 $x\in\Omega$, 和 $t\geq t_1$, 我们有

$$\begin{aligned}(Sx)(t)\geq&2-\sum_{j=1}^{\infty}\Big[\int\limits_{t+(2j-1)\tau}^{t+2j\tau}\int\limits_{s}^{\infty}Q_1(u)x(u-\sigma_1)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\int\limits_{t+(2j-2)\tau}^{t+(2j-1)\tau}\int\limits_{s}^{\infty}Q_1(u)x(u-\sigma_1)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\Big]\\ =&2-\int\limits_{t}^{\infty}\int\limits_{s}^{\infty}Q_1(u)x(u-\sigma_1)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\geq 2-3\int_t^{\infty}(u-t)Q_1(u)\mathrm{d}u\geq 1,\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}(Sx)(t)\leq&2+\sum_{j=1}^{\infty}\Big[\int\limits_{t+(2j-1)\tau}^{t+2j\tau}\int\limits_{s}^{\infty}Q_2(u)x(u-\sigma_1)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\int\limits_{t+(2j-2)\tau}^{t+(2j-1)\tau}\int\limits_{s_1}^{\infty}Q_2(u)x(u-\sigma_1)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\Big]\\ =&2+\int\limits_{t}^{\infty}\int\limits_{s}^{\infty}Q_2(u)x(u-\sigma_1)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\leq 2+3\int_t^{\infty}(u-t)Q_2(u)\mathrm{d}u\leq 3.\end{aligned}\tag{5'}$$

因此 $S\Omega\subset\Omega$. 接下来我们证明 S 是 Ω 中的压缩映射，事实上，对每个 $x_1,x_2\in\Omega$, 和 $t\geq t_1$, 我们有

$$\begin{aligned}|(Sx_1)(t)-(Sx_2)(t)|&\leq\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{t+(2j-1)\tau}^{t+2j\tau}\int\limits_{s}^{\infty}(Q_1(u)|x_1-x_2|+Q_2(u)|x_1-x_2|)\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\&\leq\int\limits_{t}^{\infty}\int\limits_{s}^{\infty}(Q_1(u)+Q_2(u))|x_1-x_2|\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\&\leq||x_1-x_2||\int\limits_{t}^{\infty}(u-t)(Q_1(u)+Q_2(u))\mathrm{d}u\leq\frac{2}{3}||x_1-x_2||.\end{aligned}$$

因此 S 是一个压缩映射. 这样 S 有一个唯一的固定点 x，使得 $Sx=x$, 即

$$x(t)=\begin{cases}2-\sum\limits_{j=1}^{\infty}\int\limits_{t+(2j-1)\tau}^{t+2j\tau}\int\limits_{s_1}^{\infty}[Q_1(u)x(u-\sigma_1)-Q_2(u)x(u-\sigma_2)]\mathrm{d}u\mathrm{d}s, & t\geq t_1,\\(Sx)(t_1), \quad t_0\leq t\leq t_1.\end{cases}$$

那么我们有

$$\begin{aligned}&x(t)+x(t-\tau)\\=&4-\sum_{j=1}^{\infty}\left[\int_{t+(2j-1)\tau}^{t+2j\tau}+\int_{t+(2j-2)\tau}^{t+(2j-1)\tau}\right]\int_{s_1}^{\infty}[Q_1(u)x(u-\sigma_1)-Q_2(u)x(u-\sigma_2)]\mathrm{d}u\mathrm{d}s\\=&4-\int_{t}^{\infty}\int_{s}^{\infty}[Q_1(u)x(u-\sigma_1)-Q_2(u)x(u-\sigma_2)]\mathrm{d}u\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

因此

$$[x(t)+x(t-\tau)]^{(2)}+Q_1(t)x(t-\sigma_1)-Q_2(t)x(t-\sigma_2)=0,$$

$x(t)$ 很显然是方程 (1) 的一个正解. 这就完成了情形 1 的证明.

情形 2 $p\in(0,1)$. 选择一个充分大的 $t_1>t_0$ 使得 $t_1\geq t_0+\sigma$, $\sigma=\max\{\tau,\sigma_1,\sigma_2\}$, 且

$$\int\limits_{t}^{\infty}s[Q_1(s)+Q_2(s)]\mathrm{d}s<1-p,$$

$$\int\limits_{t}^{\infty}sQ_1(s)\mathrm{d}s\leq\frac{p-(1-M_2)}{M_2},$$

$$\int\limits_{t}^{\infty}sQ_2(s)\mathrm{d}s\leq\frac{1-p-pM_2-M_1}{M_2}$$

对 $t\geq t_1$ 成立. 这里 M_1 和 M_2 是正常数使得

$$1-M_2<p<\frac{1-M_1}{1-M_2}$$

成立.

设 X 是定义在 $[t_0,\infty)$ 上具有上范数的所有连续有界函数的集合. 设

$$A=\{x\in X: M_1\le x(t)\le M_2, t\ge t_0\}.$$

定义一个映照 $T:A\to X$ 如下

$$(Tx)(t)=\begin{cases}1-p-px(t-\tau)+t\int_t^{\infty}[Q_1(s)x(s-\sigma_2)-Q_2(s)x(s-\sigma_2)]\mathrm{d}s\\ +\int_{t_1}^{t}s[Q_1(s)x(s-\sigma_1)-Q_2(s)x(s-\sigma_2)]\mathrm{d}s, \quad t\ge t_1,\\ (Tx)(t_1), \quad t_0\le t\le t_1.\end{cases}$$

那么

$$\begin{aligned}(Tx)(t)\le&1-p+t\int_t^{\infty}M_2Q_1(s)\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t}sM_2Q_1(s)\mathrm{d}s\\ \le&1-p+M_2\int_{t_1}^{\infty}sQ_1(s)\mathrm{d}s\le M_2,\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}(Tx)(t)\ge&1-p-pM_2-t\int_t^{\infty}Q_2(s)x(s-\sigma_2)\,\mathrm{d}s-\int_{t_1}^{t}s[Q_2(s)x(s-\sigma_2)]\mathrm{d}s\\ \ge&1-p-pM_2-M_2\int_{t_1}^{\infty}sQ_2(s)\mathrm{d}s\ge M_1.\end{aligned}$$

所以 TA $\subseteq A$.

现在对每个 $x_1,x_2\in A$ 和 $t\ge t_1$ ，我们有

$$\begin{aligned}&|(Tx_1(t)-(Tx_2)(t)|\\ \le&p|x_1(t-\tau)-x_2(t-\tau)|+t\int_t^{\infty}Q_1(s)|x_1(s-\sigma_1)-x_2(s-\sigma_1)|\mathrm{d}s\\ &+t\int_t^{\infty}Q_2(s)|x_1(s-\sigma_2)-x_2(s-\sigma_2)|\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t}sQ_1(s)|x_1(s-\sigma_1)-x_2(s-\sigma_1)|\mathrm{d}s\\ &+\int_{t_1}^{t}sQ_2(s)|x_1(s-\sigma_2)-x_2(s-\sigma_2)|\mathrm{d}s\\ \le&p||x_1-x_2||+||x_1-x_2||\Big\{\int_t^{\infty}s[Q_1(s)+Q_2(s)]\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t}s[Q_1(s)+Q_2(s)]\mathrm{d}s\Big\}\\ =&||x_1-x_2||\Big\{p+\int_{t_1}^{\infty}s[Q_1(s)+Q_2(s)]\mathrm{d}s\Big\}\\ \doteq&q_1||x_1-x_2||, q_1<1.\end{aligned}$$

因此我们证明了 T 是一个压缩映射. 所以 T 有一个唯一的固定点 x, 很显然这是方程 (1) 的一个正解，这就完成了情形 2 的证明。

情形 3 $p\in(1,\infty)$. 选择一个充分大的 $t_1\ge t_0$ 使得

$$\begin{aligned}&\int_t^\infty s[Q_1(s)+Q_2(s)]\mathrm{d}s<p-1,\\&\int_t^\infty sQ_1(s)\mathrm{d}s\le\frac{1-p(1-N_2)}{N_2},\\&\int_t^\infty sQ_2(s)\mathrm{d}s\le\frac{(1-N_1)p-(1+N_2)}{N_2}\end{aligned}\tag{6}$$

对 $t\ge t_1$ 成立。这里 N_1,N_2 是正常数，使得

$$(1-N_1)p\ge 1+N_2,\qquad p(1-N_2)<1.$$

设 X 是情形 1 中的集合. 设

$$A=\{x\in X:N_1\le x(t)\le N_2,t\ge t_0\}.$$

定义一个映照 $T:A\to X$ 如下

$$(Tx)(t)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p}x(t+\tau)+\dfrac{t+\tau}{p}\displaystyle\int_{t+\tau}^\infty[Q_1(s)x(s-\sigma_1)-Q_2(s)x(s-\sigma_2)]\mathrm{d}s\\+\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{t_1}^{t+\tau}s[Q_1(s)x(s-\sigma_1)-Q_2(s)x(s-\sigma_2)]\mathrm{d}s,\quad t\ge t_1,\\(Tx)(t_1),\quad t_0\le t\le t_1.\end{cases}$$

显然， Tx 是连续的. 对每个 $x\in A$ 和 $t\ge t_1$ ，我们得到

$$\begin{aligned}(Tx)(t)\le&1-\frac{1}{p}+\frac{t+\tau}{p}\int_{t+\tau}^\infty N_2Q_1(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{p}\int_{t_1}^{t+\tau}N_2sQ_1(s)\mathrm{d}s\\\le&1-\frac{1}{p}+\frac{N_2}{p}\int_{t_1}^\infty sQ_1(s)\mathrm{d}s\le N_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(Tx)(t)\ge&1-\frac{1}{p}-\frac{N_2}{p}+\frac{t+\tau}{p}\int_{t+\tau}^\infty(-N_2Q_2(s))\mathrm{d}s+\frac{1}{p}\int_{t_1}^{t+\tau}(-N_2sQ_2(s))\mathrm{d}s\\\ge&1-\frac{1}{p}-\frac{N_2}{p}-\frac{N_2}{p}\int_{t_1}^\infty sQ_2(s)\mathrm{d}s\ge N_1.\end{aligned}$$

这样我们证明了 $TA\subset A$. 由于 A 是 X 的有界闭凸子集，为了应用压缩原理我们还得证明 T 是 A 上得一个压缩映照.

现在对 $x_1, x_2 \in A$，我们有

$$
\begin{aligned}
&|(Tx_1)(t)-(Tx_2)(t)| \\
\le&\frac{1}{p}|x_1(t+\tau)-x_2(t+\tau)| \\
&+\frac{t+\tau}{p}\Big[\int_{t+\tau}^{\infty}Q_1(s)|x_1(s-\sigma_1)-x_2(s-\sigma_2)|\mathrm{d}s+\int_{t+\tau}^{\infty}Q_2(s)|x_1(s-\sigma_2)-x_2(s-\sigma_2)|\mathrm{d}s\Big] \\
&+\frac{1}{p}\Big[\int_{t_1}^{t+\tau}sQ_1(s)|x_1(s-\sigma_1)-x_2(s-\sigma_1)|\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t+\tau}sQ_1(s)|x_1(s-\sigma_2)-x_2(s-\sigma_2)|\mathrm{d}s\Big] \\
\le&\frac{1}{p}||x_1-x_2||+\frac{1}{p}||x_1-x_2||\Big\{\int_{t+\tau}^{\infty}s[Q_1(s)+Q_2(s)]\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t+\tau}s[Q_1(s)+Q_2(s)]\mathrm{d}s\Big\} \\
=&\frac{1}{p}||x_1-x_2||\Big\{1+\int_{t_1}^{\infty}s[Q_1(s)+Q_2(s)]\mathrm{d}s\Big\} \\
\doteq&q_2||x_1-x_2||,
\end{aligned}
$$

或

$$||Tx_1-Tx_2||\le q_2||x_1-x_2||,$$

由式 (6), $q_2<1$, 因此 T 是一个压缩映照. 所以 T 有唯一固定点 x, 很显然这是方程 (1) 的一个正解. 这就完成了情形 3 的证明.

情形 4 $p\in(-1,0)$. 选择一个充分大的 $t_1>T_1>t_0$ 使得不等式

$$
\begin{aligned}
&\int_t^{\infty}s[Q_1(s)+Q_2(s)]\mathrm{d}s<p+1,\\
&0\le\int_t^{\infty}sQ_1(s)\mathrm{d}s\le\frac{M_4(1+p)-(1+p)}{M_4},\\
&\int_t^{\infty}sQ_2(s)\mathrm{d}s\le\frac{(1+p)-M_3(1+p)}{M_4}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

对 $t\ge t_1$ 成立，这里正常数 M_3 和 M_4 满足

$$0<M_3<1<M_4.$$

设 X 是情形 1 中的集合. 设

$$A=\{x\in X: M_3\le x(t)\le M_4, t\ge t_0\}. \tag{8}$$

定义一个映照 $T:A\to X$ 如下

$$
(Tx)(t)=\begin{cases}
1+p-px(t-\tau)+t\displaystyle\int_t^{\infty}[Q_1(s)x(s-\sigma_1)-Q_2(s)x(s-\sigma_2)]\mathrm{d}s\\
+\displaystyle\int_{t_1}^{t}s[Q_1(s)x(s-\sigma_1)-Q_2(s)x(s-\sigma_2)]\mathrm{d}s, \quad t\ge t_1,\\
(Tx)(t_1), \quad t_0\le t\le t_1.
\end{cases}
$$

显然， Tx 是连续的. 对每个 $x \in A$ 和 $t \geq t_1$，利用式子 (8) 我们得到

$$\begin{aligned}(Tx)(t) &\leq 1 + p - pM_4 + t\int_t^{\infty} M_4Q_1(s)\mathrm{d}s + \int_{t_1}^{t} sM_4Q_1(s)\mathrm{d}s \\ &\leq 1 + p - pM_4 + M_4\int_{t_1}^{\infty} sQ_1(s)\mathrm{d}s \leq M_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(Tx)(t) &\geq 1 + p - pM_3 - t\int_t^{\infty} M_4Q_2(s)\mathrm{d}s - \int_{t_1}^{t} M_4Q_2(s)\mathrm{d}s \\ &= 1 + p - pM_3 - M_4\int_t^{\infty} sQ_2(s)\mathrm{d}s \geq M_3.\end{aligned}$$

这样我们证明了 $TA \subset A$.

现在对 $x_1, x_2 \in A$，有

$$\begin{aligned}&|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| \\ &\leq -p|x_1(t-\tau) - x_2(t-\tau)| \\ &\quad + t\int_t^{\infty} Q_1(s)\,|x_1(s-\sigma_2) - x_2(s-\sigma_2)|\,\mathrm{d}s + t\int_t^{\infty} Q_2(s)\,|x_1(s-\sigma_2) - x_2(s-\sigma_2)|\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_{t_1}^{t} sQ_1(s)\,|x_1(s-\sigma_1) - x_2(s-\sigma_1)|\,\mathrm{d}s + \int_{t_1}^{t} sQ_2(s)\,|x_1(s-\sigma_2) - x_2(s-\sigma_2)|\,\mathrm{d}s \\ &\leq -p||x_1 - x_2|| + ||x_1 - x_2||\left(\int_{t_1}^{\infty} s\left[Q_1(s) + Q_2(s)\right]\mathrm{d}s\right) \\ &= ||x_1 - x_2||\left\{-p + \int_{t_1}^{\infty} s\left[Q_1(s) + Q_2(s)\right]\mathrm{d}s\right\} \\ &\doteq q_3||x_1 - x_2||,\end{aligned}$$

或

$$||Tx_1 - Tx_2|| \leq q_3||x_1 - x_2||,$$

由式子 (7), $q_3 < 1$，因此 T 是一个压缩映照. 所以 T 有唯一固定点 x, 显然这是方程 (1) 的一个正解. 这样就完成了情形 4 的证明.

情形 5　$p \in (-\infty, -1)$. 选择一个充分大的 $t_1 > T_1 > t_0$ 使得不等式

$$\int_t^{\infty} s\left[Q_1(s) + Q_2(s)\right]\mathrm{d}s < -(p+1), \tag{9}$$

$$\int_t^{\infty} sQ_2(s)\mathrm{d}s < \frac{-(p+1)(N_4-1)}{N_4}, \tag{10}$$

$$\int_t^{\infty} sQ_1(s) < \frac{-(1+p)(1-N_3)}{N_4} \tag{11}$$

对 $t \ge t_1$ 成立，这里正常数 N_3 和 N_4 满足

$$0 < N_3 < 1 < N_4.$$

同样设 X 是情形 1 中的集合. 设

$$A = \{x \in X : N_3 \le x(t) \le N_4, t \ge t_0\}. \tag{12}$$

定义一个映照 $T: A \to X$ 如下

$$(Tx)(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p}x(t+\tau) + \dfrac{t+\tau}{p}\displaystyle\int_{t+\tau}^{\infty}[Q_1(s)x(s-\sigma_1) - Q_2(s)x(s-\sigma_2)]\mathrm{d}s \\ +\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_{t_1}^{t+\tau} s[Q_1(s)x(s-\sigma_1) - Q_2(s)x(s-\sigma_2)]\mathrm{d}s, \quad t \ge t_1, \\ (Tx)(t_1), \quad t_0 \le t \le t_1. \end{cases}$$

显然 Tx 是连续的. 对每个 $x \in A$ 和 $t \ge t_1$，由式子 (10), (12) 得

$$(Tx)(t) \le 1 + \frac{1}{p} - \frac{N_4}{p} - \frac{N_4}{p}\int_{t_1}^{\infty} sQ_2(s)\mathrm{d}s \le N_4,$$

进一步，利用式子 (11),(12) 有

$$(Tx)(t) \ge 1 + \frac{1}{p} - \frac{N_3}{p} + \frac{N_4}{p}\int_{t_1}^{\infty} sQ_1(s)\mathrm{d}s \ge N_3.$$

因此我们证明了 $TA \subset A$.

现在对 $x_1, x_2 \in A$，有

$$\begin{aligned}
&|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| \\
&\le -\frac{1}{p}|x_1(t+\tau) - x_2(t+\tau)| \\
&\quad - \frac{t+\tau}{p}\Big[\int_{t+\tau}^{\infty} Q_1(s)|x_1(s-\sigma_1) - x_2(s-\sigma_1)|\mathrm{d}s + \int_{t+\tau}^{\infty} Q_2(s)|x_1(s-\sigma_2) - x_2(s-\sigma_2)|\mathrm{d}s\Big] \\
&\quad - \frac{1}{p}\Big[\int_{t_1}^{t+\tau} sQ_1(s)|x_1(s-\sigma_1) - x_2(s-\sigma_1)|\mathrm{d}s + \int_{t_1}^{t+\tau} sQ_2(s)|x_1(s-\sigma_2) - x_2(s-\sigma_2)|\mathrm{d}s\Big] \\
&\le -\frac{1}{p}||x_1 - x_2|| - \frac{1}{p}||x_1 - x_2||\Big[\int_{t+\tau}^{\infty} s[Q_1(s) + Q_2(s)]\mathrm{d}s + \int_{t_1}^{t+\tau} s[Q_1(s) + Q_2(s)]\mathrm{d}s\Big] \\
&= -\frac{1}{p}||x_1 - x_2||\Big\{1 + \int_{t_1}^{\infty} s[Q_1(s) + Q_2(s)]\mathrm{d}s\Big\} \\
&\doteq q_4||x_1 - x_2||,
\end{aligned}$$

这就意味

$$||Tx_1 - Tx_2|| \le q_4||x_1 - x_2||,$$

由式 (9), $q_4 < 1$，因此 T 是一个压缩映照. 所以 T 有唯一固定点 x, 显然这是方程 (1) 的一个正解. 这样就完成了情形 5 的证明.

定理由此证毕.

参 考 文 献

[1] Kulenovic M R S and Hadziomerspahic S. Existence of nonoscillatory solution of second order linear neutral delay equation. *J. math. Anal. Appl.*, 1998, **228**: 436–448.

[2] Gyori I and Ladas G. Oscillation Theory for Delay Differential Equations with Applications. Oxford Univ Press, London, 1991.

[3] Zhang B G and Yu J S. On existence of positive solutions for neutral differential equation. *Science in China Series A*, 1992, **8**: 785–790.

[4] Cheng jinfa. On the oscillation of high order mixed neutral equations. *J. Sys. Sci. Math. Sci.*,(in chinese) 2001, **21**(3): 287-291.

[5] Cheng jinfa, Annie zhang. Oscillation criteria for mth order neutral functional difference equations. *Acta math. Sinica*,(in chinese) 2002, **45**(6): 1207–1212.

EXISTENCE OF NONOSCILLATORY SOLUTION TO SECOND ORDER LINEAR NEUTRAL DELAY EQUATION

Cheng jinfa

(*Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen* 361005)

Annie Z.

(*Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi* 221005, *India*)

Abstract Conside the neutral delay differential equation with positive and negative coefficients

$$\frac{d^2}{dt^2}[x(t)+px(t-\tau)]+Q_1(t)x(t-\sigma_1)-Q_2(t)x(t-\sigma_2)=0,$$

where $p \in R$ and $\tau \in (0,\infty), \sigma_1, \sigma_2 \in [0,\infty)$ and $Q_1, Q_2 \in C([t_0,\infty), R^+)$.Some sufficent conditions for the existence of a nonoscillatory solution to the above equation express in the terms of $\int^{\infty} sQ_i ds < \infty, i=1,2$ are obtained. These results delete a rather strong assumption in [1], and improve some theorems in [1].

Key words Neutral differential equation, oscillation, contract theorem.