具有正负系数的偏差分方程解的振动性

程金发
(厦门大学 数学系，福建 厦门 361005)

摘要：本文研究具有正负系数的偏差分方程

$$x_{m+1,n}+x_{m,n+1}-x_{m,n}+px_{m-k_1,n-l_1}-qx_{m-k_2,n-l_2}=0$$

解的振动性判别准则.本文部分解答了张炳根在[1]中提出的一个公开问题.

关键词：偏差分方程；振动性；特征方程
中图分类号：O175.7 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-7826 (2003) 04-0009-04

1 介绍

偏差分方程是包含两个以上独立变量的差分方程. 在生物学和经济数学模型，分子轨道问题和数学物理中常导出偏差分方程. 近若干年来国内外许多学者对时滞偏差分方程解的振动性作了大量系统的研究. 相关文献可参见张炳根的[1-3]，Agarwal.R.P 的[4]，Cheng.S.S 的[5]等等. 例如，张炳根[1-3]研究过下面的偏差分方程

$$A_{m+1,n}+A_{m,n+1}-A_{m,n}+\sum_{i=1}^{u}q_iA_{m-k_i,n-l_i}=0 \tag{1.1}$$

解的振动性判别准则，得到其解振动的充分必要条件是其特征方程无实根，并由此建立了一个只由系数和偏差所表示的明显的充分条件. 在研究过程中，他还提出一个公开问题：对于具有正负系数的偏差分方程如

$$A_{m+1,n}+A_{m,n+1}-A_{m,n}+pA_{m-k_1,n-l_1}-qA_{m-k_2,n-l_2}=0 \tag{1.2}$$

这里 $p,q>0,k_1,k_2,l_1,l_2$ 是正整数，如何找出一个只由系数和偏差所表示的明显的充分条件，将是一个有趣的公开问题.

本文的目的就是研究上述方程（1.2）的解的振动性，建立了下面的

定理 假设 $p\ge q,k_1\ge k_2,l_1\ge l_2$，令 $\max(k_1,l_1)=k$，如果：$q(k_1-k_2)=q(l_1-l_2)\le 1$ 以及 $p-q>\max\{\frac{k_1^{k_1}l_1^{l_1}}{(k_1+l_1+1)^{k_1+l_1+1}},\frac{k^k(1-q(k_1-k_2))}{(k+1)^{k+1}}\}$，那么方程（1.2）的每一个解振动.

2 定理的证明

设{f(m,n)}是双序列，(m,n) $\in N_0^2=N_0\times N_0,N_0$ 为非负整数集. 定义其Z-变换为

$$Z(f(m,n))=F(z_1,z_2)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}f(m,n)z_1^{-m}z_2^{-n}, \tag{1.3}$$

收稿日期：2003-10-08
作者简介：程金发（1966－），男，江西乐平市人，副教授，博士.

假如对于$|z_i|>r_i, r_i>0, i=1,2,$（1.3）式是收敛的话.

在区域$|z_i|>r_i$，$i=1,2,$中，（1.3）定义了关于变量z_1和z_2的复解析函数. 由 Z—变换和两维解析函数性质，我们有下面重要的

引理 1[1-3] 考虑线性齐次偏差分方程：

$$x_{m+k,n+l,}+\sum_{i=1}^{s_1}\sum_{j=1}^{s_2}q_{ij}x_{m+k-i,n+l-j}=0, m,n=0,1,2\ldots \tag{1.4}$$

这里k,l是非负整数，且$q_{ij}\in R$, 那么下面的命题等价：

(1)方程（1.4）的每一个解振动;

(2)方程（1.4）的特征方程：

$$\lambda^k u^l+\sum_{i=1}^{s_1}\sum_{j=1}^{s_2}q_{ij}\ \lambda^{k-i}u^{l-j}=0$$

无正实根.

考虑差分方程：

$$\Delta y_n+py_{n-k}-qy_{n-l}=0 \tag{1.5}$$

它的特征方程：

$$F(\lambda)=\lambda-1+p\lambda^{-k}-q\lambda^{-l}=0 \tag{1.6}$$

王志成和庚建设[6]证明了下面的定理：

定理 A[6] 假定 $p\geq q\geq 0,k\geq l\geq 0,q(k-l)\leq 1,$且 $p-q>\dfrac{k^k(1-q(k-l))}{(k+1)^{k+1}}$，那么方程（1.5）的所有解振动.

由于方程（1.5）的解振动等价于其特征方程（1.6）无正实根，因此由定理 A 立即可得：

引理 2 假如 $p\geq q\geq 0,k\geq l\geq 0,q(k-\lambda)\leq 1,$且 $p-q>\dfrac{k^k(1-q(k-l))}{(k+1)^{k+1}}$，

那么多项式

$$F(\lambda)=\lambda-1+p\lambda^{-k}-q\lambda^{-l}>0$$

对所有的实数 $\lambda>0$ 成立.

定理的证明 方程（1.2）的特征方程为：

$$\overline{F}(\lambda,u)=\lambda+u-1+p\lambda^{-k_1}u^{-l_1}-q\lambda^{-k_2}u^{-l_2}$$

设$\lambda>0,u>0$. 依λ，u的取值范围分为以下四种情况：

1^0 当$0<\lambda\leq 1,0<u\leq 1$ 时，记$\overline{F}(\lambda,u)=\lambda^k u^l(\lambda+u-1)+p-q\lambda^{k_1-k_2}u^{l_1-l_2}$

$$=\lambda^{k_1}u^{l_1}(\lambda+u-1)+p-q+q(1-\lambda^{k_1-k_2}u^{l_1-l_2})$$

当$\lambda=\dfrac{k_1}{k_1+l_1+1},u=\dfrac{l_1}{k_1+l_1+1}$时，$\lambda^{k_1}u^{l_1}(\lambda+u-1)$达到最小值$-\dfrac{k_1^{\ k_1}l_1^{\ l_1}}{(k_1+l_1+1)^{k_1+l_1+1}}$，故：

$$F(\lambda,u)>-\frac{k_1^{\ k_1}l_1^{\ l_1}}{(k_1+l_1+1)^{k_1+l_1+1}}+p-q.$$

可见只要

$$p-q>\frac{k_1^{\,k_1}l_1^{\,l_1}}{(k_1+l_1+1)^{k_1+l_1+1}},$$

就有 $\bar{F}(\lambda,u)>0$.

2^0　当 $\lambda\ge 1,u\ge 1$ 时，

$$\bar{F}(\lambda,u)=\lambda^{k_1}u^{l_1}(\lambda+u-1)+p-q\lambda^{k_1-k_2}u^{l_1-l_2}$$

$$\bar{F}_\lambda(\lambda,u)=\lambda^{k_1-1}u^{l_1}[(k_1+1)\lambda+k_1u-k_1-q(k_1-k_2)\lambda^{-k_2}u^{-l_2}]$$

$$>\lambda^{k_1-1}u^{l_1}[1-q(k_1-k_2)]\ge 0$$

同理：

$$\bar{F}_u(\lambda,,u)=\lambda^{k_1}u^{l_1-1}[(l_1+1)u+l_1\lambda-l_1-q(l_1-l_2)\lambda^{-k_2}u^{-l_2}]$$

$$>\lambda^{k_1}u^{l_1-1}[1-q(l_1-l_2)]\ge 0$$

故　$\bar{F}(\lambda,,u)\ge\bar{F}(\lambda,1)\ge\bar{F}(1,1)=1+p-q>0$.

3^0　当时 $0<\lambda\le 1,u\ge 1$ 时，这时 $\lambda+u\ge\lambda u$ 由条件 $q(k_1-k_2)=q(l_1-l_2)$ 知 $k_1-l_1=k_2-l_2$,　不妨设 $k_1\ge l_1,k_2\ge l_2$.则：

$$\lambda^{-k_1}u^{-l_1}=\lambda^{-k_1}u^{-k_1+k_1-l_1}=(\lambda u)^{-k_1}u^{k_1-l_1}$$

$$\lambda^{-k_2}u^{-l_2}=(\lambda u)^{-k_2}u^{k_2-l_2}=(\lambda u)^{-k_2}u^{k_1-l_1}$$

这时

$$F(\lambda,u)=\lambda+u-1+p\lambda^{-k_1}u^{-l_1}-q\lambda^{-k_2}u^{-l_1}$$

$$\ge\lambda u-1+[p(\lambda u)^{-k_1}-q(\lambda u)^{-k_2}]u^{k_1-l_1}$$

$$\ge\lambda u-1+p(\lambda u)^{-k_1}-q(\lambda u)^{-k_2}\equiv G(\lambda u)$$

由引理 2 知，只要 $q(k_1-k_2)\le 1$ 及 $p-q>\dfrac{k_1^{\,k_1}(1-q(k_1-k_2))}{(k_1+1)^{k_1+1}}$

就有 $G(\lambda u)>0$,从而 $F(\lambda,u)\ge G(\lambda u)>0$.

4^0　当 $\lambda\ge 1,0\le u\le 1$ 时，这时　$\lambda+u\ge\lambda u,\lambda u\ge 1$,

$$\lambda^{-k}u^{-l_1}=(\lambda u)^{-k_1}u^{k_1-l_1},$$

$$\lambda^{-k_2}u^{l_2}=(\lambda u)^{-k_2}u^{k_1-l_1}.$$

$$F(\lambda,u)=\lambda+u-1+p\lambda^{-k_1}u^{-l_1}-q\lambda^{-k_2}u^{-l_2}$$

$$=\lambda+u-1+[p(\lambda u)^{-k_1}-q(\lambda u)^{-k_2}]u^{k_1-l_1}$$

$$\ge u^{k_1-l_1}[\lambda+u-1+p(\lambda u)^{-k_1}-q(\lambda u)^{-k_2}]$$

$$\ge u^{k_1-l_1}[\lambda u-1+p(\lambda u)^{-k_1}-q(\lambda u)^{-k_2}]=u^{k_1-l_1}G(\lambda u)$$

同样地，由引理 2 知，$G(\lambda u)>0$.从而 $F(\lambda,u)\ge u^{k_1-l_1}G(\lambda u)>0$

综合上述,可知:只要定理的条件成立,就有特征方程多次式 $F(\lambda,u)>0$ 对 $\lambda>0,u>0$ 成立．即 $F(\lambda,u)=0$ 无正实根．从而由引理 1 就得到定理的证明．

参考文献：

[1] Zhang binggen, Oscillation of Delay Partial Difference Equation, Progree of Nautral Science, No.5,2001,321-330.

[2] Zhang binggen, et al., necessary and sufficient conditions for oscillations of hyperbolic type partial difference equations. In : Proceeding of the second International Conference of Difference Equations. Gordon and Breach Publishers,1997,649-656.

[3] Zhang binggen, et. al., necessary and sufficient conditions for oscillations of liner delay partial difference equations. Discrete Dynamics in Nature and Society,1998,V.1,265.

[4] Agarwal,R.P. & Zhou yong., oscillation criteria of partial difference equations with continuous variables. Math.Compu.Modelling,2000,31:17.

[5] Cheng, S.S. et al., qualitative theory of partial difference equations: oscillation of nonlinear partial difference equations. Tamkang J.Math.1995,26(1):65.

[6] Wang zhicheng & Yu jianshe.,oscillation and asymptotic behaviour of difference equations with positive and negative coefficients, Ann.of Diff. Eqs.8(1),1992,88-97.

[7] Cheng jinfa., on the oscillation of high order mixed neutral equations, J. Sys. Sci. Math.Scis.,2001,(3),287-291.

[8] Cheng jinfa., et al., Oscillation Criteria for mth Order Neutral Functional Difference Equations, Acta math. Sinica, (in chinese) 2002,45(6):1207-1212.

On the Oscillation Criteria of Certain Parial Difference Equations with Positive and Negitive Coefficients

CHENG Jin-fa

(Dept. of Mathematics , Xiamen University, Xiamen 361005 , China)

Abstract:: The oscillation criteria of parial difference equations with positive and negitive coefficients

$$x_{m+1,n}+x_{m,n+1}-x_{m,n}+px_{m-k_1,n-l_1}-qx_{m-k_2,n-l_2}=0$$

was established. This result partly answered an open problem offered by Zhang Bengeng in [1].

Key words: Partial difference equation; oscillation; characteristic equation