第49卷第2期
2006年3月

数学学报中文版
ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series

Vol.49, No.2
Mar., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)02-0317-10 **文献标识码:** A

二阶泛函差分方程的振动性判别准则

程金发

厦门大学数学系 厦门 361005
E-mail: jfcheng@xmu.edu.cn

摘 要 利用 Raccati 变换技巧得到下列二阶非线性中立差分方程 $\Delta(p_n(\Delta(x_n+\varphi(n, x_{\tau_n}))^\gamma))+q_nf^\beta(x_{g_n})=0$, $n=0,1,2,\dots$ 的一些振动性判别准则, 这些结果改进了文献 [10,11] 中的一些振动准则, 并回答了一个公开问题, 且改正了文献 [10] 中的一个定理及其证明.

关键词 振动性; Raccati 变换; 差分方程
MR(2000) 主题分类 34K15, 34C10
中图分类 O175.1

Oscillation Criteria for Second-Order Functional Difference Equations

Jin Fa CHENG

Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen 361005, P. R. China
E-mail: jfcheng@xmu.edu.cn

Abstract Some oscillation criteria are established by using Raccati transformation techniques for the following second order nonliner neutral difference equation $\Delta(p_n(\Delta(x_n+\varphi(n, x_{\tau_n}))^\gamma))+q_nf^\beta(x_{g_n})=0$, $n=0,1,2,\dots$, which extend some oscillation criteria and answer an open problem in [10,11], and also correct a theorem and its proof in [10].

Keywords oscillation; Raccati technique; difference equations
MR(2000) Subject Classification 34K15, 34C10
Chinese Library Classification 0175.1

1 引言及符号

本文将关注下列形式的一类二阶非线性时滞差分方程

$$\Delta(p_n(\Delta(x_n+\varphi(n, x_{\tau_n}))^\gamma))+q_nf^\beta(x_{g_n})=0,\quad n=0,1,2,\dots \tag{1.1}$$

这里 $\gamma>0$ 和 $\beta>0$ 是奇正整数的商, $n\ge n_0$, τ_n 和 g_n 是非减非负整数序列, $\tau_n\le n$, $g_n\le n$ 和 $\lim_{n\to\infty}\tau_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}g_n=\infty$, $\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$ 是非负实数列, 且 $p_n>0$, $q_n\ge 0$, $q_n\ne 0$, Δ 是向前差分: $\Delta x_n=x_{n+1}-x_n$. 当下列 (a), (b), (c) 成立时, 我们记之为条件 (H_1) 成立:

(a) $\sum_n^\infty \frac{1}{p_n}=\infty$;

(b) $0<\frac{\varphi(n,u)}{u}\le c_n<1$ 对于 $u\ne 0$;

收稿日期: 2004-09-27; 接受日期: 2005-01-12
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10271043)

(c) $\frac{f(u)}{u} \geq \varepsilon_0 > 0$ 对于 $u \neq 0$.

在条件 (H_1) 中, 如果 (a) $\sum_n^\infty \frac{1}{p_n} = \infty$ 被 (a)$'\sum_n^\infty \frac{1}{p_n} < \infty$ 所替代, 则记之为条件 (H_2).

方程 (1.1) 的一个解称之为振动的如果它的项既非最终正的也非最终负的, 否则称之为非振动的. 方程 (1.1) 称之为振动的当且仅当它的所有解是振动的, 否则称之为非振动的.

近年来, 二阶差分方程的振动性和渐进性是许多数学工作者们的研究课题, 参见文 [1–12] 以及相关的参考文献. 例如, Kubiaczyk, Saker 和 Morchalo [10], Zhang 和 Saker [11] 已经深入研究过下面两个方程, 它们可视为方程 (1.1) 的特殊情形

$$\Delta(p_n(\Delta(x_n + c_n x_{n-\tau}))^\gamma) + q_n x_{n-\sigma}^\beta = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

或

$$\Delta(p_n(\Delta x_n)^\gamma) + q_n x_{n-\sigma}^\beta = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.3}$$

这里 τ, σ 是一个固定的非负整数.

如果 $\beta > 1$, 我们称方程 (1.2) 或方程 (1.3) 是严格上线性的; 如果 $0 < \beta < 1$, 严格下线性的; 如果 $\beta = 1$, 则是线性的.

在上线性的情形, 当 $\gamma = \beta > 1$ 时, 在条件 (a) 下方程 (1.2) 解的振动性在文献 [11] 中已有讨论, 且作者们还指出在条件 (a)$'$ 下如何建立方程 (1.2) 的一些振动性或渐进性结果将是一个有趣的公开问题. 而且当 $\gamma \geq \beta > 1$ 时, 该方程的振动性也是未知的.

在下线性的情形, 当 $\gamma > 1$, $0 < \beta < 1$ 时, 一些作者在条件 (a) 或 (a)$'$ 下已经研究了过方程 (1.3), 参见文 [10] (在文 [10] 中没有提到假定条件 $0 < \beta < 1$, 但从其证明中可以看出假定条件 $0 < \beta < 1$ 是必需的). 但是必须指出的是: 在条件 (a)$'$ 下他们的证明是错误的, 因而相应的定理不成立.

本文目的是: (1) 当 $\gamma \geq \beta \geq 1$ 时, 在条件 (H_1) 下建立方程 (1.1) 的振动性准则, 这些包含并延拓了 [11] 的结果, 并在条件 (a)$'$ 下得到方程 (1.2) 的振动性准则, 这个结果回答了文 [11] 中的一个公开问题. (2) 当 $0 < \beta < 1$, $\gamma > 1$ 时, 在条件 (H_1) 下也建立方程 (1.1) 的振动性准则, 这些都包含并延拓了文 [10, 11] 的结果, 并在条件 (a)$'$ 下得到方程 (1.2), (1.3) 的振动性准则. 这个结果回答了文 [11] 中的一个公开问题, 并且改正了文 [10] 中的定理 2.3 及其证明.

2 主要结果及其证明

引理 1 假定条件 (H_1) 成立, 且假定 x_n 是方程 (1.1) 的一个最终正解, 令 $z_n = x_n + \varphi(n, x_{\tau_n})$, 那么 $z_n > 0$, $\Delta z_n > 0$, $\Delta(p_n(\Delta z_n)^\gamma) \leq 0$ 最终成立.

证明 令 $z_n = x_n + \varphi(n, x_{\tau_n})$, 由假设 (b), 我们有 $z_n > 0$ 对 $n \geq n_0$, 且从方程 (1.1) 得到

$$\Delta(p_n(\Delta(z_n)^\gamma)) = -q_n f^\beta(x_{g_n}) < 0,$$

对于 $n \geq n_0$, 因此 $\{p_n(\Delta z_n)^\gamma\}$ 是一个最终非增序列. 我们证明 $\{p_n(\Delta z_n)^\gamma\}$ 是最终正的. 确实, 序列 $\{p_n(\Delta z_n)^\gamma\}$ 要么最终为正要么最终为负. 首先证明 $p_n(\Delta z_n)^\gamma > 0$ 对于 $n \geq n_0$ 成立. 事实上, 如果存在一个整数 $n_1 \geq n_0$, 使得 $p_{n_1}(\Delta z_{n_1})^\gamma = c < 0$, 那么 $p_n(\Delta z_n)^\gamma \leq p_{n_1}(\Delta z_{n_1})^\gamma = c$ 对于 $n \geq n_1$ 成立, 即 $(\Delta z_n)^\gamma \leq \frac{c}{p_n}$. 因此 $z_n \leq z_{n_1} + c^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{i=n_1}^{n-1} \left(\frac{1}{p_i}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \to -\infty$, 这与事实 $z_n > 0$ 对于 $n \geq n_0$ 时成立矛盾. 因此 $\{p_n(\Delta z_n)^\gamma\}$ 是最终正的, 有 $z_n > 0$, $\Delta z_n \geq 0$, $\Delta(p_n(\Delta z_n))^\gamma \leq 0$, $n \geq n_0$. 引理 1 证毕.

首先考虑当 $\gamma \geq \beta \geq 1$ 和条件 (H_1) 成立时的情形. 在下面的定理中, 我们给出方程 (1.1) 振动的一些充分条件. 这些结果是二阶微分方程振动的 Philos 型条件的离散形式.

定理 1　假定 (H_1) 成立. 让 $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个正序列. 并且, 我们假定存在一个双序列 $\{H_{m,n}: m \geq n \geq 0\}$, 使得

(i) $H_{m,n} = 0$ 对于 $m = n \geq 0$;

(ii) $H_{m,n} > 0$, $m > n \geq 0$;

(iii) $\Delta_2 H_{m,n} = H_{m,n+1} - H_{m,n} \leq 0$ 对于 $m \geq n \geq 0$. 如果对某个正数 M,

$$\lim_{m\to\infty} \sup \frac{1}{H_{m,0}} \sum_{n=n_0}^{m-1} \left[H_{m,n}\rho_n Q_n - \frac{(\rho_{n+1})^2}{4\bar{\rho}_n} \left(h_{m,n} - \frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}} \sqrt{H_{m,n}} \right)^2 \right] = \infty. \tag{2.1}$$

这里

$$Q_n = \varepsilon_0^n q_n (1 - c_{g_n})^\beta, \quad h_{m,n} = -\frac{\Delta_2 H_{m,n}}{\sqrt{H_{m,n}}}, \quad m \geq n \geq 0, \quad \bar{\rho}_n = \frac{\rho_n M^{(\gamma-\beta)/\gamma}}{p_{g_n}^{\beta/\gamma}}.$$

那么, 对于 $\gamma \geq \beta \geq 1$, 方程 (1.1) 的每一个解振动.

证明　相反地, 假定 x_n 是方程 (1.1) 的一个最终非振动解. 不失一般性, 我们假定 x_n 是方程 (1.1) 的一个最终正解, 使得 $x_{\tau_n} > 0$, $x_{g_n} > 0$ 对于所有的 $n > n_0$ 成立. 令

$$z_n = x_n + \varphi(n, x_{\tau_n}). \tag{2.2}$$

由引理 1, 我们有

$$z_n > 0, \quad \Delta z_n > 0, \quad \Delta(p_n(\Delta z_n)^\gamma) \leq 0, \tag{2.3}$$

对于 $n \geq n_0$. 从方程 (1.1), 我们有

$$\begin{aligned}
&\Delta(p_n(\Delta(z_n)^\gamma)) + q_n f^\beta(x_{g_n}) = 0, \quad \Delta(p_n(\Delta(z_n)^\gamma)) + \varepsilon_0^\beta q_n x_{g_n}^\beta \leq 0, \\
&\Delta(p_n(\Delta(z_n)^\gamma)) + \varepsilon_0^\beta q_n (z_{g_n} - \varphi(n, x_{\tau_{g_n}}))^\beta \leq 0, \quad \Delta(p_n(\Delta(z_n)^\gamma)) + \varepsilon_0^\beta q_n (z_{g_n} - c_{g_n} z_{\tau_{g_n}})^\beta \leq 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

置 $Q_n = \varepsilon_0^\beta (1 - c_{g_n})^\beta q_n$, 我们有

$$\Delta(p_n(\Delta(z_n)^\gamma)) + Q_n z_{g_n}^\beta \leq 0. \tag{2.5}$$

定义序列 $\{w_n\}$ 如下

$$w_n = \rho_n \frac{p_n(\Delta z_n)^\gamma}{z_{g_n}^\beta}. \tag{2.6}$$

那么 $w_n > 0$ 且

$$\begin{aligned}
\Delta w_n &= \Delta\rho_n \frac{w_{n+1}}{\rho_{n+1}} + \rho_n \Delta\left(\frac{p_n(\Delta z_n)^\gamma}{z_{g_n}^\beta} \right); \\
&= \Delta\rho_n \frac{w_{n+1}}{\rho_{n+1}} + \rho_n \frac{\Delta(p_n(\Delta z_n)^\gamma) z_{g_n+1}^\beta - p_{n+1}(\Delta z_{n+1})^\gamma \Delta(z_{g_n}^\beta)}{z_{g_n+1}^\beta z_{g_n}^\beta} \\
&\leq \Delta\rho_n \frac{w_{n+1}}{\rho_{n+1}} - \rho_n Q_n - \frac{\rho_n p_{n+1}(\Delta z_{n+1})^\gamma \Delta(z_{g_n}^\beta)}{z_{g_n+1}^\beta z_{g_n}^\beta},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

现在, 利用不等式 [3]

$$x^{\beta}-y^{\beta}\geq(x-y)^{\beta} \tag{2.8}$$

对于所有的 $x\geq y$ 和 $\beta\geq 1$ 成立. 我们有

$$\Delta z_{g_n}^{\beta}=z_{g_n+1}^{\beta}-z_{g_n}^{\beta}\geq(z_{g_n+1}-z_{g_n})^{\beta}=(\Delta z_{g_n})^{\beta}. \tag{2.9}$$

那么

$$\Delta w_n\leq-\rho_nQ_n+\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\frac{\rho_np_{n+1}(\Delta z_{n+1})^{\gamma}(\Delta z_{g_n})^{\beta}}{(z_{g_n+1}^{\beta})^2}. \tag{2.10}$$

利用 (2.3) 式, 我们得

$$p_{g_n}(\Delta z_{g_n})^{\gamma}\geq p_{n+1}(\Delta z_{n+1})^{\gamma},\quad \Delta z_{g_n}\geq\left(\frac{p_{n+1}}{p_{g_n}}\right)^{\frac{1}{\gamma}},\quad \Delta z_{n+1}(\Delta z_{g_n})^{\beta}\geq\left(\frac{p_{n+1}}{p_{g_n}}\right)\frac{\beta}{\gamma}(\Delta z_{n+1})^{\beta}. \tag{2.11}$$

因此

$$\begin{aligned}\Delta w_n&\leq-\rho_nQ_n+\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\rho_n\frac{p_{n+1}(\Delta z_{n+1})^{\gamma}\left(\frac{p_{n+1}}{p_{g_n}}\right)^{\beta/\gamma}(\Delta z_{n+1})^{\beta}}{(z_{g_n+1}^{\beta})^2}\\&=-\rho_nQ_n+\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\rho_n\frac{p_{n+1}(\Delta z_{n+1})^{\gamma}\left(\frac{p_{n+1}}{p_{g_n}}\right)^{\beta/\gamma}(\Delta z_{n+1})^{\gamma}}{(z_{g_n+1}^{\beta})^2(\Delta z_{n+1})^{\gamma-\beta}}\\&=-\rho_nQ_n+\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\frac{\rho_n}{p_{g_n}^{\beta/\gamma}(p_{n+1})^{1-\beta/\gamma}}\left(\frac{w_{n+1}}{\rho_{n+1}}\right)^2\frac{1}{(\Delta z_{n+1})^{\gamma-\beta}}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

现在基于 $\{p_n(\Delta z_n)^{\gamma}\}$ 是正的非增序列, 因此存在一个 $n_2>n_1$ 充分大, 使得 $p_n(\Delta z_n)^{\gamma}\leq{}^1/_M$ 对某个正常数 M 和 $n>n_2$ 成立, 因此由 (2.3) 式得 $p_{n+1}(\Delta z_{n+1})^{\gamma}\leq{}^1/_M$, 所以 $\frac{1}{(\Delta z_{n+1})^{\gamma-\beta}}\geq(Mp_{n+1})^{(\gamma-\beta)/\gamma}$. 对于所有的 $n\geq n_2$, 有

$$\Delta w_n\leq-\rho_nQ_n+\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\frac{\bar\rho_n}{(\rho_{n+1})^2}w_{n+1}^2, \tag{2.13}$$

这里 $\bar\rho_n=\frac{\rho_nM^{(\gamma-\beta)/\gamma}}{p_{g_n}^{\beta/\gamma}}$. 因此, 得到

$$\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}\rho_nQ_n\leq-\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}\Delta w_n+\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}\frac{\bar\rho_n}{(\rho_{n+1})^2}w_{n+1}^2. \tag{2.14}$$

这样, 通过分部求和右边第一项, 得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}\rho_nQ_n&\leq H_{m,k}w_k+\sum_{n=k}^{m-1}w_{n+1}\Delta_2H_{m,n}+\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}\frac{\bar\rho_n}{(\rho_{n+1})^2}w_{n+1}^2\\&=H_{m,k}w_k-\sum_{n=k}^{m-1}h_{m,n}\sqrt{H_{m,n}}w_{n+1}+\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\sum_{n=k}^{m-1}H_{m,n}\frac{\bar\rho_n}{(\rho_{n+1})^2}w_{n+1}^2\\&=H_{m,k}w_k-\sum_{n=k}^{m-1}\left[\frac{\sqrt{H_{m,n}\bar\rho_n}}{\rho_{n+1}}w_{n+1}+2\frac{\rho_{n+1}}{\sqrt{H_{m,n}\bar\rho_n}}\left(h_{m,n}\sqrt{H_{m,n}}-\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}H_{m,n}\right)\right]^2\\&\quad+\frac{1}{4}\sum_{n=k}^{m-1}\frac{(\rho_{n+1})^2}{\bar\rho_n}\left(h_{m,n}-\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\sqrt{H_{m,n}}\right)^2,\end{aligned} \tag{2.15}$$

那么 $\sum_{n=n_1}^{m-1}\left[H_{m,n}\rho_nQ_n-\frac{(\rho_{n+1})^2}{4\bar{\rho}_n}\left(h_{m,n}-\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\sqrt{H_{m,n}}\right)^2\right]<H_{m,n_1}w_{n_1}\le H_{m,0}w_{n_1}$. 这就隐含了

$$\sum_{n=0}^{m-1}\left[H_{m,n}\rho_nQ_n-\frac{(\rho_{n+1})^2}{4\bar{\rho}_n}\left(h_{m,n}-\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\sqrt{H_{m,n}}\right)^2\right]<H_{m,0}\left(w_{n_1}+\sum_{n=0}^{n_1-1}\rho_nQ_n\right).$$

因此

$$\lim_{m\to\infty}\sup\frac{1}{H_{m,0}}\sum_{n=0}^{m-1}\left[H_{m,n}\rho_nQ_n-\frac{(\rho_{n+1})^2}{4\bar{\rho}_n}\left(h_{m,n}-\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\sqrt{H_{m,n}}\right)^2\right]<\left(w_{n_1}+\sum_{n=0}^{n_1-1}\rho_nQ_n\right)<\infty.$$

这与 (2.1) 式矛盾. 所以方程 (1.1) 的每一个解振动.

注 1 通过选择合适的序列 $\{H_{m,n}\}$, 能够导出许多不同的关于方程 (1.1) 的振动准则. 例如, 令 $H_{m,n}=\begin{cases}c>0, & m>n\ge 0;\\ 0, & m=n\ge 0.\end{cases}$ 这里 c 是一个常数. 我们有下面的结果.

定理 2 假定 (H_1) 成立. 并且, 假定存在一个正序列 $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$, 使得对某个正数 M,

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sum_{l=n_0}^{n}\left[\rho_lQ_l-\frac{p_{g_l}^{\beta/\gamma}(\Delta\rho_l)^2}{4\rho_lM^{(\gamma-\beta)/\gamma}}\right]=\infty, \tag{2.16}$$

这里 $Q_n=\varepsilon_0^nq_n(1-c_{g_n})^{\beta}$. 那么对于 $\gamma\ge\beta\ge 1$, 方程 (1.1) 的每一个解振动.

再举一个例子, 令 $H_{m,n}=(m-n)^{\lambda}$, $\lambda\ge 1$, $m\ge n\ge 0$, 我们有下面的结果.

定理 3 假定 (H_1) 成立. 而且, 假定存在一个正序列 $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\lambda\ge 1$, 使得对于某个正数 M,

$$\lim_{m\to\infty}\sup\frac{1}{m^{\lambda}}\sum_{n=n_0}^{m-1}(m-n)^{\lambda}\left[\rho_nQ_n-\frac{p_{g_n}^{\beta/\gamma}(\rho_{n+1})^2}{4\rho_nM^{(\gamma-\beta)/\gamma}}\psi_n\right]=\infty, \tag{2.17}$$

对某个 $n_0\ge 0$ 成立, 这里 $\psi_n=\left[\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}-\frac{\lambda(m-n-1)^{\lambda-1}}{(m-n)^{\lambda}}\right]^2$.

那么对于 $\gamma\ge\beta\ge 1$, 方程 (1.1) 的每一个解振动.

注 2 当 $\gamma=\beta\ge 1$, 且 $\varphi(n,x_{\tau_n})=c_nx_{n-\tau}$, $f(x_{g_n})=x_{n-\sigma}$, 方程 (1.1) 简化为差分方程 $\Delta(p_n(\Delta(x_n+c_nx_{n-\tau}))^{\gamma})+q_nx_{n-\sigma}^{\gamma}=0$, $n=0,1,2,\ldots$, 而且定理 3 中的条件 (2.17) 简化为

$$\lim_{m\to\infty}\sup\frac{1}{m^{\lambda}}\sum_{n=n_0}^{m-1}(m-n)^{\lambda}\left[\rho_nQ_n-\frac{p_{n-\sigma}(\rho_{n+1})^2}{4\rho_n}\psi_n\right]=\infty, \tag{2.18}$$

这与文 [11] 中的定理 2.1 完全一致. 因此定理 1–3 包含并延拓了文 [11] 中的几个振动性准则.

接下来考虑 $0<\beta<1$, $\gamma>1$ 和 (H_1) 成立时的情形.

定理 4 假定 (H_1) 成立, 且 $\Delta p_n\ge 0$. 让 $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个正序列. 并且, 我们假定存在一个双序列 $\{H_{m,n}: m\ge n\ge 0\}$, 使得

(i) $H_{m,n}=0$ 对于 $m=n\ge 0$;

(ii) $H_{m,n}>0$, $m>n\ge 0$;

(iii) $\Delta_2H_{m,n}=H_{m,n+1}-H_{m,n}\le 0$ 对于 $m\ge n\ge 0$. 如果对某个正数 M 和 a,

$$\lim_{m\to\infty}\sup\frac{1}{H_{m,0}}\sum_{n=n_0}^{m-1}\left[H_{m,n}\rho_nQ_n-\frac{(\rho_{n+1})^2}{4\bar{\rho}_n}\left(h_{m,n}-\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}\sqrt{H_{m,n}}\right)^2\right]=\infty \tag{2.19}$$

这里 $h_{m,n}=-\frac{\Delta_2 H_{m,n}}{\sqrt{H_{m,n}}}$, $m\geq n\geq 0$, $\bar{\rho}_n=\frac{\rho_n\beta M^{(\gamma-1)/\gamma}}{p_{g_n}^{1/\gamma}a^{1-\beta}(g_n+1)^{1-\beta}}$. 那么对于 $0<\beta<1,\gamma>1$, 方程 (1.1) 的每一个解振动.

证明 按照与定理 1 一样的程序, 我们有

$$\Delta w_n\leq \Delta\rho_n\frac{w_{n+1}}{\rho_{n+1}}-\rho_n Q_n-\frac{\rho_n p_{n+1}(\Delta z_{n+1})^\gamma\Delta(z_{g_n}^\beta)}{z_{g_n+1}^\beta z_{g_n}^\beta}. \tag{2.20}$$

利用下面的不等式 (见文 [3]) $x^\beta-y^\beta\geq\beta x^{\beta-1}(x-y)$ 对于 $x\geq y>0$, $0<\beta\leq 1$ 成立, 我们得 $\Delta(z_{g_n}^\beta)\geq\beta(z_{g_n+1})^{\beta-1}\Delta z_{g_n}$. 因此

$$\begin{aligned}\Delta w_n&\leq-\rho_nQ_n+\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\rho_n\beta(z_{g_n+1})^{\beta-1}\frac{p_{n+1}(\Delta z_{n+1})^\gamma\Delta z_{g_n}}{z_{g_n+1}^\beta z_{g_n}^\beta}\\&=-\rho_nQ_n+\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\frac{\rho_n\beta}{p_{g_n}}\frac{p_{n+1}(\Delta z_{n+1})^\gamma p_{g_n}(\Delta z_{g_n})^\gamma}{(z_{g_n+1})^{1-\beta}z_{g_n+1}^\beta z_{g_n}^\beta(\Delta z_{g_n})^{\gamma-1}}.\end{aligned} \tag{2.21}$$

注意到 $\{p_n(\Delta z_n)^\gamma\}$ 是正的非增序列, $\{z_n\}$ 是正的非降序列, 使得

$$\Delta w_n\leq-\rho_nQ_n+\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\frac{\rho_n\beta}{p_{g_n}}\left(\frac{w_{n+1}}{\rho_{n+1}}\right)^2\frac{1}{(z_{g_n+1})^{1-\beta}(\Delta z_{g_n})^{\gamma-1}}. \tag{2.22}$$

现在由引理 1, $\{p_n(\Delta z_n)^\gamma\}$ 是一个正的非增序列. 因此存在一个 $n_2>n_1$ 充分大, 使得 $p_{g_n}(\Delta(z_{g_n})^\gamma)\leq M$ 对于某个正数 M 和 $n>n_2$ 成立, 所以

$$\frac{1}{(\Delta(z_{g_n}))^{\gamma-1}}\geq(Mp_{g_n})^{(\gamma-1)/\gamma}. \tag{2.23}$$

从 $\Delta(p_n(\Delta z_n)^\gamma)<0$, 得 $\Delta p_n(\Delta z_n)^\gamma+p_n\Delta(\Delta z_n)^\gamma<0$. 由于 $p_n>0$, $\Delta p_n>0$, $(\Delta z_n)^\gamma>0$, 我们得 $\Delta(\Delta z_n)^\gamma<0$. 因此 $\{(\Delta z_n)^\gamma\}$ 是一个关于 n 的正的非增序列, 且从不等式 (2.8), 有 $(\Delta^2z_n)^\gamma=(\Delta z_{n+1}-\Delta z_n)^\gamma\leq(\Delta z_{n+1})^\gamma-(\Delta z_n)^\gamma<0$, $(\gamma>1)$. 因而得到 $\Delta^2z_n<0$. 这样, 我们推出

$$z_n\leq z_{n_0}+\Delta z_{n_0}(n-n_0) \tag{2.24}$$

对于 $n>n_0$ 成立, 并且存在一个 $n_1>n_0$, 和一个适当的 $a\geq 1$, 使得 $z_n\leq an$ 对于 $n>n_0$ 成立, 而且这隐含着 $z_{g_n+1}\leq a(g_n+1)$ 对于 $n\geq n_1=g_{n_0}+1$ 成立, 因此

$$\frac{1}{(z_{g_n+1})^{1-\beta}}\geq\frac{1}{a^{1-\beta}(g_n+1)^{1-\beta}}. \tag{2.25}$$

在 (2.22) 中代以 (2.23) 和 (2.25) 式, 我们发现 $\Delta w_n\leq-\rho_nq_n+\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}}w_{n+1}-\bar{R}_nw_{n+1}^2$, 这里 $\bar{R}_n=\frac{\rho_n\beta M^{(\gamma-1)/\gamma}}{p_{g_n}^{1/\gamma}\rho_{n+1}^2a^{1-\beta}(g_n+1)^{1-\beta}}$.

余下的证明类似于定理 1, 因此省略. 定理证毕.

从定理 4, 很容易得到下面的两个定理:

定理 5 假定条件 (H_1) 成立且 $\Delta p_n\geq 0$. 并且, 假定存在一个正序列 $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$, 使得对某个正数 M 和 a, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sum_{l=n_0}^n\left[\rho_lQ_l-\frac{p_{g_l}^{1/\gamma}a^{1-\beta}(g_l+1)^{1-\beta}(\Delta\rho_l)^2}{4\beta M^{(\gamma-1)/\gamma}\rho_l}\right]=\infty. \tag{2.26}$$

那么对于 $0<\beta<1, \gamma>1$, 方程 (1.1) 的每一个解振动.

定理 6 假定 (H_1) 成立且 $\Delta p_n \geq 0$. 并且, 假定存在一个正序列 $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\lambda \geq 1$, 使得对某个正数 M 和 a,

$$\lim_{m\to\infty} \sup \frac{1}{m^{\lambda}} \sum_{n=n_0}^{m-1} (m-n)^{\lambda} \left[\rho_n Q_n - \frac{p_{g_n}^{1/\gamma} \rho_{n+1}^2 a^{1-\beta} (g_n+1)^{1-\beta}}{4\rho_n \beta M^{(\gamma-1)/\gamma}} \psi_n\right] = \infty, \tag{2.27}$$

对于某个 $n_0 \geq 0$ 成立, 这里 $\psi_n = \left[\frac{\Delta\rho_n}{\rho_{n+1}} - \frac{\lambda(m-n-1)^{\lambda-1}}{(m-n)^{\lambda}}\right]^2$, 那么对于 $0<\beta<1, \gamma>1$ 方程 (1.1) 的每一个解振动.

注 3 我们的定理 4-6 包含并延拓了 [11] 中的几个振动性准则.

下面考虑在条件 (a)$'$ 成立的情形下方程 (1.2) 的振动情况.

定理 7 假定 $\gamma \geq \beta \geq 1$ 和条件 (a)$'$ 成立. 而且, 假定存在一个正序列 $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$, 使得对某个正数 M,

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sum_{l=n_0}^{n} \left[\rho_l \bar{Q}_l - \frac{p_{l-\sigma}^{\beta/\gamma} (\Delta\rho_l)^2}{4\rho_l M^{(\gamma-\beta)/\gamma}}\right] = \infty, \tag{2.28}$$

和

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_n} \sum_{i=n_0}^{n-1} q_i\right)^{\gamma} = \infty, \tag{2.29}$$

对于某个 $n_0>0$ 成立, 这里 $\bar{Q}_n = q_n(1-c_{n-\sigma})^{\beta}$.

那么对于 $\gamma \geq \beta > 1$, 方程 (1.2) 的每一个解振动或 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

证明 相反地, 假定 $\{x_n\}$ 是方程 (1.2) 的一个最终正解, 使得 $x_{n-\sigma}>0$, 对于所有的 $n \geq n_0$ 成立. 我们只需考虑这种情形, 因为用代换 $y_n=-x_n$, 可将方程 (1.2) 变成同样的型式. 置

$$z_n = x_n + c_n x_{n-\tau}. \tag{2.30}$$

从方程 (1.2), 有 $\Delta(p_n(\triangle z_n)^{\gamma}) = -q_n x_{n-\sigma}^{\beta} \leq 0, n \geq n_0$. 因此 $\{p_n(\triangle z_n)^{\gamma}\}$ 是最终非增序列, 那么对于 $p_n(\triangle z_n)^{\gamma}$ 将有两种可能的情况, 即 $p_n(\triangle z_n)^{\gamma}$ 要么最终非负或者要么最终非正. 随之对于 Δz_n 也有同样两种可能的情况.

当 $\{\Delta z_n\}$ 最终非负的情形, 我们将证明方程 (1.2) 的每一个解振动. 否则, 我们有 $z_n > 0, \Delta z_n \geq 0, \Delta(p_n(\Delta z_n)^{\gamma}) \leq 0, n \geq n_0$, 那么从以上可知 $x_n \geq (1-c_n)z_n$ 且这隐含着对于 $n \geq n_1 = n_0+\sigma, x_{n-\sigma} \geq (1-c_{n-\sigma})z_{n-\sigma}$, 有

$$\Delta(p_n(\Delta z_n)^{\gamma}) + \bar{Q}_n z_{n-\sigma}^{\beta} \leq 0, n \geq n_1.$$

定义序列 $\{w_n\}$ 如下 $w_n = \rho_n \frac{p_n(\Delta z_n)^{\gamma}}{z_{n-\sigma}^{\beta}}$, 那么 $w_n>0$. 且

$$\begin{aligned}
\Delta w_n &= \Delta\rho_n \frac{w_{n+1}}{\rho_{n+1}} + \rho_n \Delta\left(\frac{p_n(\Delta z_n)^{\gamma}}{z_{n-\sigma}^{\beta}}\right) \\
&= \Delta\rho_n \frac{w_{n+1}}{\rho_{n+1}} + \rho_n \frac{\Delta(p_n(\Delta z_n)^{\gamma}) z_{n-\sigma+1}^{\beta} - p_{n+1}(\Delta z_{n+1})^{\gamma} \Delta(z_{n-\sigma}^{\beta})}{z_{n-\sigma+1}^{\beta} z_{n-\sigma}^{\beta}} \\
&\leq \Delta\rho_n \frac{w_{n+1}}{\rho_{n+1}} - \rho_n \bar{Q}_n - \frac{\rho_n p_{n+1}(\Delta z_{n+1})^{\gamma} \Delta(z_{n-\sigma}^{\beta})}{z_{n-\sigma+1}^{\beta} z_{n-\sigma}^{\beta}}
\end{aligned}$$

现在, 利用不等式 [3]: $x^\beta - y^\beta \ge (x-y)^\beta$ 对所有的 $x \ge y$ 和 $\beta \ge 1$ 成立. 有 $\Delta z_{n-\sigma}^\beta = z_{n-\sigma+1}^\beta - z_{n-\sigma}^\beta \ge (z_{n-\sigma+1} - z_{n-\sigma})^\beta = (\Delta z_{n-\sigma})^\beta$. 那么 $\Delta w_n \le -\rho_n \bar{Q}_n + \frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}} w_{n+1} - \frac{\rho_n p_{n+1}(\Delta z_{n+1})^\gamma (\Delta z_{n-\sigma})^\beta}{(z_{n-\sigma-1}^\beta)^2}$. 由于 $\{p_n(\Delta z_n)^\gamma\}$ 是一个最终非增序列, 我们有

$$p_{n-\sigma}(\Delta z_{n-\sigma})^\gamma \ge p_{n+1}(\Delta z_{n+1})^\gamma,\ \Delta z_{n-\sigma} \ge \left(\frac{p_{n+1}}{p_{n-\sigma}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \Delta z_{n+1},\ (\Delta z_{n-\sigma})^\beta \ge \left(\frac{p_{n+1}}{p_{n-\sigma}}\right)^{\frac{\beta}{\gamma}} (\Delta z_{n+1})^\beta.$$

因此

$$\begin{aligned}\Delta w_n &\le -\rho_n \bar{Q}_n + \frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}} w_{n+1} - \rho_n \frac{p_{n+1}(\Delta z_{n+1})^\gamma \left(\frac{p_{n+1}}{p_{n-\sigma}}\right)^{\beta/\gamma} (\Delta z_{n+1})^\beta}{(x_{n-\sigma+1}^\beta)^2} \\ &= -\rho_n \bar{Q}_n + \frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}} w_{n+1} - \rho_n \frac{p_{n+1}(\Delta z_{n+1})^\gamma \left(\frac{p_{n+1}}{p_{n-\sigma}}\right)^{\beta/\gamma} (\Delta z_{n+1})^\gamma}{(z_{n-\sigma+1}^\beta)^2 (\Delta z_{n+1})^{\gamma-\beta}} \\ &= -\rho_n \bar{Q}_n + \frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}} w_{n+1} - \frac{\rho_n}{p_{n-\sigma}^{\beta/\gamma}(p_{n+1})^{1-\beta/\gamma}} \left(\frac{w_{n+1}}{\rho_{n+1}}\right)^2 \frac{1}{(\Delta z_{n+1})^{\gamma-\beta}}.\end{aligned}$$

由于$\{p_n(\Delta z_n)^\gamma\}$ 是一个正的非增序列, 因而存在一个充分大的 $n_2 > n_1$, 使得 $p_n(\Delta z_n)^\gamma \le {}^1/_M$ 对某个正数 M 和 $n > n_2$ 成立, 因此有 $p_{n+1}(\Delta z_{n+1})^\gamma \le {}^1/_M$, 使得

$$\frac{1}{(\Delta z_{n+1})^{\gamma-\beta}} \ge (M p_{n+1})^{(\gamma-\beta)/\gamma},$$

所以 $\Delta w_n \le -\rho_n \bar{Q}_n + \frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}} w_{n+1} - R_n w_{n+1}^2$. 这里 $R_n = \frac{\rho_n M^{(\gamma-\beta)/\gamma}}{\rho_{n+1}^2 p_{n-\sigma}^{\beta/\gamma}}$. 这隐含了

$$\Delta w_n \le -\rho_n \bar{Q}_n + \frac{1}{4R_n} \frac{(\Delta \rho_n)^2}{\rho_{n+1}^2} - \left[\sqrt{R_n} w_{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{R_n}} \frac{\Delta \rho_n}{\rho_{n+1}}\right]^2 \le -\left[\rho_n \bar{Q}_n - \frac{p_{n-\sigma}^{\beta/\gamma} (\Delta \rho_n)^2}{4\rho_n M^{(\gamma-\beta)/\gamma}}\right].$$

将上面的不等式从 n_2 到 n 相加, 得到 $-w_{n_2} < w_n - w_{n_2} \le -\sum_{l=n_2}^n \left[\rho_l \bar{Q}_l - \frac{p_{l-\sigma}^{\beta/\gamma}(\Delta \rho_l)^2}{4\rho_l M^{(\gamma-\beta)/\gamma}}\right]$. 因此 $\sum_{l=n_2}^n \left[\rho_l \bar{Q}_l - \frac{p_{l-\sigma}^{\beta/\gamma}(\Delta \rho_l)^2}{4\rho_l M^{(\gamma-\beta)/\gamma}}\right] < c_1$ 对所有充分大的 n 成立, 这与 (2.28) 式矛盾.

如果 $\{\Delta z_n\}$ 最终为负, 那么 $\lim_{n\to\infty} z_n = b \ge 0$. 我们将断定 $b = 0$.

如果 $b > 0$, 那么将有 $\lim_{n\to\infty} \inf x_n = a > 0$. 否则, 有 $\lim_{n\to\infty} \inf x_n = 0$. 从 (2.30) 式看到 $z_{n+\tau} - z_n = x_{n+\tau} + (c_{n+\tau} - 1)x_n - c_n x_{n-\tau}$. 因此 $\lim_{n\to\infty}\{x_{n+\tau} + (c_{n+\tau}-1)x_n - c_n x_{n-\tau}\} = 0$ 或

$$\lim_{n\to\infty}\{x_{n+2\tau} + (c_{n+2\tau} - 1)x_{n+\tau} - c_{n+\tau} x_n\} = 0. \tag{2.31}$$

让 $\{n_k\}$ 是 $\{n\}$ 的子序列, 使得

$$\lim_{k\to\infty} n_k = \infty \text{ 和 } \lim_{k\to\infty} x_{n_k+2\tau} = 0. \tag{2.32}$$

在 (2.31) 式中用 n_k 代替 n 并利用 (2.32) 式, 得到 $\lim_{k\to\infty}\{(c_{n_k+2\tau}-1)x_{n_k+\tau} - c_{n_k+\tau} x_{n_k}\}=0$. 由于 $x_{n_k+\tau} x_{n_k} \ge 0$ 和 $(c_{n_k+2\tau} - 1)x_{n_k+\tau} \le 0$, 所以

$$\lim_{k\to\infty}(c_{n_k+2\tau} - 1)x_{n_k+\tau} = 0,\quad \lim_{k\to\infty} c_{n_k+\tau} x_{n_k} \ge 0.$$

又由于 $0 < c_n \le c < 1$, 得 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k+\tau} = 0$. 因此 $b = \lim_{k\to\infty} z_{n_k+\tau} = \lim_{n\to\infty}(x_{n_k+\tau} + c_{n_k+\tau}x_{n_k+\tau}) = 0$, 这与 $b > 0$ 矛盾.

从 $\lim_{n\to\infty}\inf x_n = a > 0$, 那么存在 $n_1 > n_0$, 使得 $x_n > \frac{a}{2}$ 对于 $n > n_1$ 成立, 因此有 $\Delta(p_n(\Delta z_n)^\gamma) \le -q_n x_{n-\sigma}^\beta < -q_n(\frac{a}{2})^\beta$. 将上面的不等式从 n_1 到 $n-1$ 相加, 得到

$$p_n(\Delta z_n)^\gamma < p_n(\Delta z_n)^\gamma - p_{n_1}(\Delta z_{n_1})^\gamma \le -\left(\frac{a}{2}\right)^\beta \sum_{i=n_1}^{n-1} q_i, \tag{2.33}$$

那么

$$\Delta z_n \le -\left(\frac{a}{2}\right)^{\beta/\gamma}\left(\frac{1}{p_n}\sum_{i=n_1}^{n-1} q_i\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad n \ge n_1 \tag{2.34}$$

将上面的不等式从 n_1 到 $n-1$ 相加, 有 $z_{n+1} \le z_{n_1} - (\frac{a}{2})^{\beta/\gamma}\sum_{s=n_1}^{n}\left(\frac{1}{p_s}\sum_{i=n_1}^{s-1} q_i\right)^{\frac{1}{\gamma}}$. 条件 (2.29) 隐含了 $\{z_n\}$ 是最终负的, 矛盾. 因此我们有 $b = 0$.

令 $l = \lim_{n\to\infty}\sup x_n$, 下面将断言 $l = 0$. 如果 $l = \lim_{n\to\infty}\sup x_n > 0$, 让 $\{n_k\}$ 是 $\{n\}$ 的一个子序列, 使得 $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$ 和 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l$. 那么 $c_{n_k}x_{n_k-\sigma} = z_{n_k} - x_{n_k} \to 0 - l < 0$, 矛盾. 因此有 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. 证毕.

定理 8 假定 $0 < \beta < 1, \gamma > 1$ 且条件 (a)$'$ 成立, $\Delta p_n \ge 0$, 并且, 假定存在一个正序列 $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$, 使得对某个 $\alpha \ge 1$ 和正数 M,

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sum_{l=n_0}^{n}\left[\rho_l\bar{Q}_l - \frac{(\rho_{l-\sigma}-\sigma)^{\frac{1}{\gamma}}\alpha^{1-\beta}(l+1-\sigma)^{1-\beta}(\Delta\rho_l)^2}{4\beta(M)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\rho_l}\right] = \infty \tag{2.35}$$

和

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n}\sum_{i=n_0}^{n-1} q_i\right)^\gamma = \infty, \tag{2.36}$$

对某个 $n_0 > 0$ 成立, 这里 $\bar{Q}_n = q_n(1-c_{n-\sigma})^\beta$.

那么对于 $0 < \beta < 1$, $\gamma > 1$, 方程 (1.2) 的每个解振动或者 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

定理 8 的证明类似于定理 7, 因此省略.

注 4 我们的定理 7 和定理 8 实际上回答了文 [10, 11] 中提出的公开问题.

最后, 我们考虑当 $0 < \beta < 1$, $\gamma > 1$ 时方程 (1.3) 的情况.

定理 9 假定 $0 < \beta < 1, \gamma > 1$ 且条件 (a)$'$ 成立, $\Delta p_n \ge 0$. 并且, 假定存在一个正序列 $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$, 使得对某个 $\alpha \ge 1$ 和正数 M,

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sum_{l=n_0}^{n}\left[\rho_l q_l - \frac{(\rho_{l-\sigma}-\sigma)^{\frac{1}{\gamma}}\alpha^{1-\beta}(l+1-\sigma)^{1-\beta}(\Delta\rho_l)^2}{4\beta(M)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\rho_l}\right] = \infty \tag{2.37}$$

和

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n}\sum_{i=n_0}^{n-1} q_i\right)^\gamma = \infty, \tag{2.38}$$

对某个 $n_0 > 0$ 成立.

那么对于 $0 < \beta < 1, \gamma > 1$, 方程 (1.3) 的每个解振动或者 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

证明 相反地, 不妨假定 $\{x_n\}$ 是方程 (1.3) 的一个最终正解, 使得 $x_{n-\sigma} > 0$, 对于所有的 $n \ge n_0$ 成立. 从方程 (1.3), 有 $\triangle(p_n(\triangle x_n)^\gamma) = -q_n x_{n-\sigma}^\beta \le 0, n \ge n_0$. 因此 $\{p_n(\triangle x_n)^\gamma\}$ 是最终非增序列, 那么 $p_n(\triangle x_n)^\gamma$ 有两种可能的情形, 即 $p_n(\triangle x_n)^\gamma$ 最终非负或最终为负, 随之 Δx_n 也有两种同样的情形.

在 $\{\Delta x_n\}$ 最终非负的情形, 我们可以按照与定理 4 一样的证明得到矛盾.

如果 $\{\Delta x_n\}$ 是最终为负, 那么 $\lim_{n\to\infty} x_n = b \geq 0$. 我们断定 $b=0$. 否则有 $x^{\beta}_{n-\sigma} \to b^{\beta} > 0$ 当 $n \to \infty$, 因此存在 $n_1 \geq n_0$, 使得 $x^{\beta}_{n-\sigma} \geq b^{\beta}$. 因此有

$$\Delta(p_n(\Delta x_n)^{\gamma}) \leq -q_n b^{\beta}. \tag{2.39}$$

将上面的不等式从 n_1 到 $n-1$ 相加, 我们有

$$p_n(\Delta x_n)^{\gamma} < p_n(\Delta x_n)^{\gamma} - p_{n_1}(\Delta x_{n_1})^{\gamma} \leq -b^{\beta} \sum_{i=n_1}^{n-1} q_i, \tag{2.40}$$

那么

$$\Delta x_n \leq -b^{\beta/\gamma} \left(\frac{1}{p_n} \sum_{i=n_1}^{n-1} q_i \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad n \geq n_1. \tag{2.41}$$

将上面的不等式从 n_1 到 $n-1$ 相加, 得到 $x_{n+1} \leq x_{n_1} - b^{\beta/\gamma} \sum_{s=n_1}^{n} \left(\frac{1}{p_s} \sum_{i=n_1}^{s-1} q_i \right)^{\frac{1}{\gamma}}$. 条件 (2.38) 意味着 $\{x_n\}$ 最终为负, 矛盾. 定理证毕.

注 5 在文 [10] 中, 因为从

$$u_n \leq u_{n_2} - b^{\beta} \sum_{s=n_2}^{n-1} \beta_{s+1} q_s + \sum_{s=n_2}^{n-1} (p_s \Delta\beta_s)(\Delta x_s)^{\gamma} \tag{2.42}$$

(2.42) 式的右边最后项通过分部求和, 并不能导出

$$u_n \leq u_{n_2} - b^{\beta} \sum_{s=n_2}^{n-1} \beta_{s+1} q_s + (p_s \Delta\beta_s)(\Delta x_s)^{\gamma}\Big|_{s=n_2}^{n} - \sum_{s=n_2}^{n-1} \Delta(p_s \Delta\beta_s)(\Delta x_{s+1})^{\gamma}.$$

因此文 [10] 中的定理 2.3 及其证明是不正确的. 这里我们的定理 9 实际上改正了文 [10] 中的定理 2.3 及其证明, 而且本质上它也是新的.

致谢 作者衷心感谢审稿人的宝贵建议.

参 考 文 献

[1] Agarwal R. P., Difference equations and inequalities, Theory, Methods and Applications, Second Edition, Revised and Expand, New York: Marcel Dekker, 2000.

[2] Agarwal R. P., Wong P. J. Y., Advance topics in differences, Klwer Academai Publishers, 1997.

[3] Hardy G. H., Litterwood J. E. and Polya G., Inequalities, Cambridge: 2nd Ed. Univ. Press 1952.

[4] Kamenev I. V., An integral criterion for oscillation of nonlinear difference equations and Riccati equations, *Math. Zemetki*, 1978, 249–151 (in Russian).

[5] Chen S., Erbe L. H., Riccati techniques and discrete oscillations, *J. Math. Anal. Appl.*, 1989, **142**: 468–487.

[6] Chen S. Z., Erbe L., Oscillation results for second-order scalar and matrix difference equations, *Comp. Math. Appl.*, 1994, **28**(1/3): 55–70.

[7] Kong Q., Interval criterial for oscillation of second order linear ordininary differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 1999, **229**: 258–270.

[8] Szafranski Z., Szmanda B., Oscillation theorems for some nonlinear difference equations, *Appl. Math. Comp.*, 1997, **83**: 43–52.

[9] Zhang Z., Chen J. and Zhang C., Oscillation of solutions for second-order nonlinear difference equations with nonlinear neutral term, *Comp. Math. Appl.*, 2001, **41**: 1487–1494.

[10] Kubiaczyk I., Saker S. H. and Morchalo J., Kamenev-type oscillation criteria for sublinear delay difference equations, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 2003, **34**(8): 1273–1284.

[11] Zhang B. G., Saker S. H., Kamenev-type oscillation criteria for nonlinear neutral delay difference equations, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 2003, **34**(11): 1571–1584.

[12] Philos Ch. G., Oscillation theorems for linear differential equations of second order, *Arch. Math.*, 1989, **53**: 483–492.