文章编号: 1674-2974(2009)06-0083-03

二阶脉冲微分方程有界解的振动性*

顾广泽[1-], 程金发[2]

(1. 湖南大学 数学与计量经济学院, 湖南 长沙 410082; 2. 厦门大学 数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘 要: 通过引入特征系统, 并结合分析方法, 讨论了一类二阶脉冲微分方程解的振动性质, 得到了其关于有界解振动的一些充分必要条件. 所获结果补充了一些现有文献的相关结论.

关键词: 振动性; 脉冲; 特征系统

中图分类号: O175.12　　文献标识码: A

Oscillation of the Bounded Solution of Second Order Differential Equation with Impulse

GU Guang-ze[1-], CHENG Jin-fa[2]

(1. College of Mathematics and Econometrics, Hunan Univ, Changsha, Hunan 410082, China;
2. Department of Mathematics, Xiamen Univ, Xiamen, Fujian 361005, China)

Abstract: The oscillation of the bounded solution of second order differential equation with impulse was studied. Some necessary and sufficient conditions for such an equation were derived by introducing characteristic systems and using some analysis techniques. These results complement the ones in existing literatures.

Key words: oscillation; impulsive; characteristic system

脉冲微分方程的振动理论作为脉冲微分方程定性理论的重要分支之一, 最近20年来有了迅速的发展. 1989年, Gopalsamy和张炳根[1]就脉冲微分方程与不带脉冲的常微分方程的振动性与渐近性是否具有联系的问题给出了经典结论, 但它仅仅局限于某些简单的一阶方程. 文献[2]首次引入了特征系统和广义特征系统这两个概念, 对一阶具偏差变元的常系数线性脉冲微分方程和一阶具常系数的脉冲中立型微分方程的振动性进行了研究, 得到了解振动的若干充分必要条件. 但是, 与带有偏差变元的常微分方程振动理论相比, 脉冲微分方程振动理论还远未完善, 这主要是因为在研究二阶或高阶常系数线性脉冲微分方程时有一些理论和技术障碍, 关于此类方程解振动的充分必要条件在文献[2]中也未涉及, 究竟如何给出二阶常系数线性脉冲微分方程解振动的充分必要条件呢? 这显然是十分重要的研究课题. 本文在文献[3-8]的基础上, 就一类带有时滞的二阶脉冲微分方程的振动性进行了研究.

考虑线性具时滞周期脉冲微分方程:

$$\begin{cases} x''(t)=qx(t-\sigma),\ t\neq t_k, \\ \Delta x'(t_k)=q_0x(t_k-\sigma), \\ \Delta x(t_k)=\dfrac{q_0}{q}x'(t_k). \end{cases} \tag{1}$$

这里 $q,\ q_0,\ \sigma>0$, $\Delta x^{(i)}(t_k)=x^{(i)}(t_k^+)-x^{(i)}(t_k)$, $i=0, 1$.

假设下列条件(H_1)和(H_2)成立.

(H_1) $q,\ q_0,\ \sigma>0$.

(H_2) 存在 $m\in N$, 使得 $i[t-\sigma, t)=m$, $t\in\mathbf{R}$

其中: $i[a, b)=m$ 表示在区间$[a, b)$上脉冲时刻 t_k $(k\geqslant 1)$的个数.

* 收稿日期: 2008-06-30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60872129)
作者简介: 顾广泽(1968-), 男, 河南信阳人, 湖南大学副教授, 博士
- 通讯联系人, E-mail: guguangze2008@163.com

寻求方程(1)具如下形式的正解:

$$x(t)=e^{-\lambda t}(1-\mu)^{i[0,t)}. \tag{2}$$

这里 $\lambda\in\mathbf{R}^{+}$, $0<\mu<1$. 将式(2)代入式(1), 若以下系统成立:

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= q e^{\lambda\sigma}(1-\mu)^{-m},\\ \lambda\mu &= q_0 e^{\lambda\sigma}(1-\mu)^{-m}.\end{aligned} \tag{3}$$

则式(1)具有形如式(2)的解, 我们称式(3)为式(1)的特征系统. 易知式(3)的解(λ,μ)满足 $\mu=\frac{q_0}{q}\lambda$ 而且, 式(3)有满足条件 $0<\lambda<1$ 的解(λ,μ)当且仅当特征方程

$$H(\lambda)=-\lambda^2+q e^{\lambda\sigma}(1-\frac{q_0}{q})^{-m}=0 \tag{4}$$

有根, $\lambda\in(0,\frac{q_0}{q})$.

本文的主要目的是研究方程(1)解的振动性质, 建立了有界解振动的一些充分必要条件, 获得的主要结果如下.

定理 1 假定条件(H_1)和(H_2)成立, 则下面的论述是等价的:

(i) 特征方程(4)没有根 $\lambda\in(0,\frac{q_0}{q})$.

(ii) 特征系统(3)无满足条件 $\lambda<1$ 的解(λ,μ).

(iii) 方程(1)的每一个有界正则解振动.

另外, 我们还建立了一个直接以 q, q_0, σ 显式表示的该类方程振动的充分必要条件.

定理 2 假定条件(H_1)和(H_2)成立, 则方程(1)的每一个有界解振动, 当且仅当

$$-\lambda_1^2(1-\lambda_1)^m e^{-\frac{q}{q_0}\lambda_1\sigma}+\frac{q_0^2}{q}>0$$

成立.

其中: $\lambda_1=\dfrac{\frac{q\sigma}{2q_0}+\frac{m}{2}+1-\sqrt{(\frac{q\sigma}{2q_0}+\frac{m}{2}+1)^2-\frac{2q\sigma}{q_0}}}{q\sigma/q_0}$.

1 主要结果的证明

定理 1 的证明 显然有(i)⇔(ii)及(i)⇐(iii), 所以只要证明(i)⇒(iii)就可以了.

若不然, 假设方程(1)存在一个非振动解 $x(t)$, 不妨设为最终正解, 则有 $x(t)>0(t\geqslant T_0\geqslant 0)$. 由(i)成立知, 特征方程(4)没有根 $\lambda\in(0,\frac{q_0}{q})$. 又由于 $H(0)=q>0$ 及 $H(\frac{q}{q_0})=+\infty$, 故存在 $\nu>0$, 使得

$$H(\lambda)\geqslant\nu>0,\ \lambda\in[0,\frac{q}{q_0}).$$

令 $\Lambda=\left\{\lambda\geqslant 0: x''(t)\geqslant\lambda^2 x(t),\ \Delta x'(t_k)\geqslant\frac{q}{q_0}\lambda^2 x(t_k)\right\}$. 则要完成定理证明, 我们将证明 Λ 本身具有如下互不相容性:

(P_1) 存在满足条件 $0\leqslant\lambda_0<\lambda_1$ 的实数 λ_0, λ_1, 使得 $\lambda_0\in\Lambda$, $\lambda_1\notin\Lambda$.

(P_2) 若 $\lambda\in\Lambda$, 则 $\lambda+\nu\in\Lambda$.

根据方程(1)易知:

$$x''(t)=qx(t-\sigma)>0,\ t\neq t_k,$$
$$\Delta x'(t_k)=q_0 x(t_k-\sigma)>0.$$

由此可推出 $\lambda_0=0\in\Lambda$. 更进一步, 对 $x''(t)=qx(t-\sigma)$两端从 t 到 $t+\frac{\sigma}{2}$积分, 可得:

$$-x'(t)\geqslant x'(t+\frac{\sigma}{2})-x'(t)=$$
$$q\int_t^{t+\frac{\sigma}{2}}x(s-\sigma)\mathrm{d}s+q_0\sum_{t\leqslant t_k\leqslant t+\frac{\sigma}{2}}x(t_k-\sigma)>$$
$$q\int_t^{t+\frac{\sigma}{2}}x(s-\sigma)\mathrm{d}s\geqslant q\frac{\sigma}{2}x(t-\frac{\sigma}{2}).$$

对不等式 $x'(t)<-\frac{q\sigma}{2}x(t-\frac{\sigma}{2})$ 两端从 t 到 $t+\frac{\sigma}{2}$ 积分, 可得:

$$-x(t)<x(t+\frac{\sigma}{4})-x(t)<$$
$$-\frac{q\sigma}{2}\int_t^{t+\frac{\sigma}{4}}x(s-\frac{\sigma}{2})\mathrm{d}s+\sum_{t\leqslant t_k<t+\frac{\sigma}{2}}\Delta x(t_k)=$$
$$-\frac{q\sigma}{2}\int_t^{t+\frac{\sigma}{4}}x(s-\frac{\sigma}{2})\mathrm{d}s-\mu\sum_{t\leqslant t_k<t+\frac{\sigma}{2}}x(t_k)<$$
$$-\frac{q\sigma}{2}\int_t^{t+\frac{\sigma}{4}}x(s-\frac{\sigma}{2})\mathrm{d}s.$$

从而

$$x(t)>\frac{q\sigma}{2}\int_t^{t+\frac{\sigma}{4}}x(s-\frac{\sigma}{2})\mathrm{d}s>$$
$$\frac{q\sigma}{2}\frac{\sigma}{4}x(t-\frac{\sigma}{4})\alpha x(t-\frac{\sigma}{4}).$$

因此, $x(t)>\alpha^4 x(t-\sigma)$ 且 $x''(t)=qx(t-\sigma)<q\frac{1}{\alpha^4}x(t)$.

于是有 $\lambda_1=\sqrt{\frac{q}{\alpha^4}}\notin\Lambda$, 即 Λ 有上界. 令 $\lambda_0=\sup\Lambda$, 则 $\lambda_0\in(0,\sqrt{\alpha^4 q})$. 从而对充分大的 t, t_k, 有

$$x''(t)\geqslant\lambda_0^2 x(t),\ \Delta x'(t_k)\geqslant\frac{q_0}{q}\lambda_0^2 x(t_k).$$

此外, 可证明 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to\infty}x'(t)=0$. 事实上, 因为 $x(t)$ 是方程(1)的有界正解, 所以易见 $x'(t)<0$, $x''(t)>0$. 故 $x'(t)$ 严格递增, 从而 $\lim\limits_{t\to\infty}x'(t)=$

l. 可断言 $l = 0$. 这是因为, 对 $x''(t) = qx(t-\sigma) > 0$ 两端在区间 $[t_0, \infty)$ 上积分, 可得到:

$$l - x'(t_0) = q\int_{t_0}^{\infty} x(t-\sigma)\mathrm{d}t + \sum_{t_0 \leqslant t_k < \infty} \Delta x'(t_k).$$

由此即得 $x \in L^1[t_0, \infty)$, 所以 $l = 0$. 又因为 $x(t)$ 递减且 $x \in L^1[t_0, \infty)$, 故 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. 令

$$y(t) = x'(t) + \lambda_0 x(t),\ y(t_k) = \frac{q_0}{q}\Delta x(t_k) + \lambda_0 x(t_k).$$

则 $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, 且

$$y'(t) = x''(t) + \lambda_0 x'(t) = x''(t) + \lambda_0(y(t) - \lambda_0 x(t)) = x''(t) + \lambda_0 y(t) - \lambda_0^2 x(t).$$

故有 $y'(t) - \lambda_0 y(t) = x''(t) - \lambda_0^2 x(t) > 0$.

另一方面, 有

$$\Delta y(t_k) = y(t_k^+) - y(t_k) = x'(t_k^+) + \lambda_0 x(t_k^+) - x'(t_k) - \lambda_0 x(t_k) = \Delta x'(t_k) + \frac{q_0}{q}\lambda_0 y(t_k) - \frac{q_0}{q}\lambda_0^2 x(t_k).$$

从而 $\Delta y(t_k) - \frac{q_0}{q}\lambda_0 y(t_k) = \Delta x'(t_k) - \frac{q_0}{q}\lambda_0^2 x(t_k)$.

令 $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}(1 - \frac{q_k}{q}\lambda_0)^{i[0,t)}$, $u(t) = \varphi(t)y(t)$, $\varphi(t) > 0$.

则

$$u'(t) = \varphi(t)y'(t) + \varphi'(t)y(t) = \varphi(t)y'(t) - \lambda_0\varphi(t)y(t) = \varphi(t)(y'(t) - \lambda_0 y(t)) > 0.$$

且

$$\Delta u(t_k) = \Delta\varphi(t_k)y(t_k) + \varphi(t_k^+)\Delta y(t_k) = -\frac{q_k}{q}\lambda_0\varphi(t_k^+)y(t_k) + \varphi(t_k^+)\Delta y(t_k) = \varphi(t_k^+)(-\frac{q_k}{q}\lambda_0 y(t_k) + \Delta y(t_k)) > 0.$$

进而 $u(t)$ 单调递增. 因为当 $t\to\infty$ 时, 有 $y(t)\to 0$ 及 $\varphi(t)\to 0$, 从而当 $t\to\infty$ 时, 有 $u(t)\to 0$, 这是因为 $u(t) = \varphi(t)y(t) < u(\infty)y(\infty)\to 0$. 从而有 $u(t) < 0$, 且当 t 和 t_k 充分大时, 有 $y(t) < 0$, $y(t_k) < 0$. 由此可推出:

$$x'(t) + \lambda_0 x(t) \leqslant 0,\ \Delta x(t_k) + \frac{q_k}{q}\lambda_0 x(t_k) \leqslant 0.$$

令 $w(t) = x(t)\mathrm{e}^{\lambda_0 t}(1 - \frac{q_k}{q}\lambda_0)^{-i[0,t)}$. 则 $w(t) > 0$. 从而有:

$$x''(t) - (\lambda_0^2 + m)x(t) = qx(t-\sigma) - (\lambda_0^2 + m)x(t) \geqslant w(t)(1 - \frac{q_0}{q}\lambda_0)^{i[0,t)}(q\mathrm{e}^{\lambda_0\sigma}(1 - \frac{q_0}{q}\lambda_0)^{-m} - (\lambda_0^2 + m)) > 0.$$

且

$$\Delta x'(t) - \frac{q_0}{q}(\lambda_0^2 + m)x(t_k) = q_k x(t_k - \sigma) - \frac{q_0}{q}(\lambda_0^2 + m)x(t_k) \geqslant \frac{q_0}{q}w(t_k)(1 - \frac{q_0}{q}\lambda_0)^{i[0,t_k)} \times (q\mathrm{e}^{\lambda_0\sigma}(1 - \frac{q_0}{q}\lambda_0)^{-m} - (\lambda_0^2 + m)) > 0.$$

这就意味着 $\lambda_0^2 + m \in \Lambda$, 而这与集合 Λ 有上界相矛盾. 定理证毕.

定理 2 的证明　略.

参考文献

[1] GOPALSAMY K, ZHANG B G. On delay differential equations with impulses[J]. J Math Anal Appl, 1989, 139(1): 110-122.

[2] BAINOV D D, SIMEONOV P S. Oscillation theory of impulsive differential equations[M]. Florida: International Publication, 1998.

[3] BAINOV D D, MISHEV D P. Oscillation theory for neutral differential equations with delay[M]. Bristol: Hilger, 1991.

[4] GYORI I, LADAS G. Oscillation theory for delay differential equations with applications[M]. London: Oxford Univ Press, 1991.

[5] ERBE L H, KONG Q K, ZHANG B G. Oscillation theory for functional differential equations[M]. New York: Marcel Dekker, 1995.

[6] AGARWAL R P, GRACE S R, REGAN D O. Oscillation theory for difference and functional differential equations[M]. Dordrecht: Kluwer, 2000.

[7] AGARWAL R P, GRACE S R, REGAN D O. Oscillation theory for second order dynamic equations[M]. London: Taylor Francis, 2003.

[8] AGARWAL R P, BOHNER M, LI W T. Nonoscillation and oscillation theory for functional differential equations[M]. New York: Marcel Dekker, 2004.