文章编号: 0438-0479(2004)05-0648-04

桩基动力参数的灵敏度分析

张建国[1], 张建霖[1], 谢建华[2]
(1. 厦门大学建筑与土木工程学院, 福建 厦门 361005; 2. 厦门市质量监督站, 福建 厦门 361003)

摘要: 将桩基简化成离散的多自由度系统, 对其纵向振动的动力参数进行了分析, 对桩基的振动参数——频率、振型、频响函数与频域响应对刚度改变的灵敏度进行了数学推导. 可知频率对刚度改变的灵敏度很小, 振型对刚度改变的灵敏度也不大, 但在节点处有一定的影响, 频响函数与频域响应对刚度的变化反应比较明显, 并且用一个实例进行了验算, 得到的结果与理论推导吻合良好.

关键词: 桩基; 动力参数; 灵敏度
中图分类号: TU 311.1　　文献标识码: A

桩基作为建筑物中一种常用的基础形式, 在当今的建筑结构中应用相当广泛. 近年来, 国内外在桩基检测手段的应用研究上取得了很多成果, 并开发了多种动力测桩技术, 在桩基动测技术的理论方法、工程实践及仪器设备的研制等方面已有了较大的进展[1~3]. 由于桩基的各种缺陷会引起桩基沿轴向方向上质量、刚度等结构参数的改变, 为了能利用动测技术准确地实现对桩基的缺陷判断, 必须选择合适的动力参数来反映桩基结构参数的变化. 换言之, 分析桩基各结构参数的改变对结构动态特性变化的敏感程度是十分必要的[4]. 一般情况下, 可以认为桩基的缺陷能明显地在刚度的改变上体现出来, 因此, 本文拟从分析桩基的振动参数对刚度改变的敏感度着手, 找出合适的敏感参数, 并通过相应的算例, 对频率、振型、频响函数等模态参数对刚度变化的灵敏度进行分析.

1　桩基的动力计算模型

埋设于地下的桩的长度要远大于其直径, 因此可将其简化为有侧限约束的一维弹性杆件, 其轴向自由振动的振动方程为[5]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

其中 $c = \sqrt{E/p}$ 为桩身材料的纵波波速(m/s).

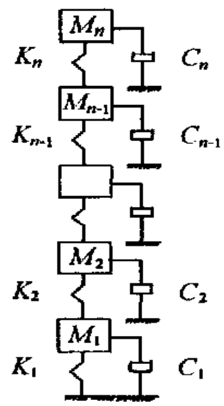

图 1　桩基有限自由度模型
Fig. 1　The MDOF model of pile

为了能比较简单地分析桩基频率、振型、频响函数等对刚度变化的敏感度, 将桩基这个无限自由度体系离散成有限的多个自由度体系来分析, 如图 1 所示. 可以设桩基具有的质量矩阵、刚度矩阵、阻尼矩阵分别为 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{C}$, 它们的元素均为实数. 当桩基的某个位置出现缺陷的时候, $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{C}$ 矩阵中相应的元素就会发生改变. 桩基的有限自由度模型可由图 1 所示.

自由振动方程为:

$$\boldsymbol{M}\{\ddot{u}(t)\} + \boldsymbol{C}\{\dot{u}(t)\} + \boldsymbol{K}\{u(t)\} = \{0\} \tag{2}$$

对于完整的桩基而言, 有:

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1} = k_n = k,$$
$$M_1 = M_2 = \cdots = M_{n-1} = M_n = M,$$
$$C_1 = C_2 = \cdots = C_{n-1} = C_n = C \tag{3}$$

收稿日期: 2003-06-06
作者简介: 张建国(1974-), 男, 讲师.

2　桩基振动参数对缺陷的敏感度分析

用下述方法定义敏感度: 函数 $y = y(x_1, x_2, \cdots, x_l)$ 对 x_i 的敏感度[4] 为:

$$\eta(y \mid x_i) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x_i / x_i} = \frac{x_i}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} \tag{4}$$

将式(4) 敏感度的概念用于桩基有限自由度振动系统中. 其中, 函数 $y(x)$ 可以具体为桩基的频率 ω、振型 Φ、频响函数 $\boldsymbol{H}$ 或频域响应 $\{U\}$, 而自变量 x 则是刚度矩阵中的某个元素.

2.1　频率对 k_{ij} 的敏感度

式(2) 的特征方程为:

$$(-\omega_r^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K})\{\varphi_r\} = 0 \tag{5}$$

采用规范化振型 $\{\varphi_j\}^T \boldsymbol{M} \{\varphi_i\} = \delta_{ij}$ 及 $\{\varphi_j\}^T \boldsymbol{K} \{\varphi_j\} = \omega_i^2 \delta_{ij}$, 并对参数 p_j 求导得:

$$\left(-2\omega_r \frac{\partial \omega_r}{\partial p_j}\boldsymbol{M} - \omega_r^2 \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial p_j} + \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial p_j}\right)\{\varphi_r\} + (-\omega_r^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}) \frac{\partial \{\varphi_r\}}{\partial p_j} = 0 \tag{6}$$

将上式两边同乘 $\{\varphi_r\}^T$, 则有:

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial p_j} = -\frac{1}{2\omega_r}\left(\omega_r^2 \{\varphi_r\}^T \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial p_j}\{\varphi_r\} - \{\varphi_r\}^T \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial p_j}\{\varphi_r\}\right) \tag{7}$$

将上式中的 p_j 代之以 k_{ij}, 并考虑到 $\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial k_{ij}} = 0$, 可得频率 ω_r 对 k_{ij} 的敏感度为:

$$\eta(\omega_r \mid k_{ij}) = \frac{k_{ij}}{2\omega_r^2}\{\varphi_r\}^T \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial k_{ij}}\{\varphi_r\} \tag{8}$$

2.2　振型对 k_{ij} 的敏感度

设灵敏度公式 $\eta(\varphi_{rs} \mid k_{ij}) = \frac{k_{ij}}{\varphi_{rs}} \cdot \frac{\partial \varphi_{rs}}{\partial k_{ij}}$ 中的 $\frac{\partial \varphi_{rs}}{\partial k_{ij}} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ksr}\varphi_{ks}$, 可以首先求出 β_{ksr} 的表达式.

将式(5) 对 p_j 求导后左乘 $\{\varphi_s\}^T$, 再考虑正交性条件可得:

$$-\omega_r^2 \{\varphi_s\}^T \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial p_j}\{\varphi_r\} + \{\varphi_s\}^T \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial p_j}\{\varphi_r\} - \{\varphi_s\}^T(\omega_r^2 \boldsymbol{M} - \boldsymbol{K})\frac{\partial \{\varphi_r\}}{\partial p_j} = 0 \tag{9}$$

考虑 $\{\varphi_s\}^T \boldsymbol{K} = \omega_s^2 \{\varphi_s\}^T \boldsymbol{M}$ 及 $\frac{\partial \varphi_{rs}}{\partial k_{ij}} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ksr}\varphi_{ks}$, 可求出:

$$\beta_{ksr} = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_s^2 - \omega_k^2}\{\varphi_k\}^T \dfrac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial k_{ij}}\{\varphi_s\} & (k \neq s) \\ 0 & (k = s) \end{cases} \tag{10}$$

故:

$$\eta(\varphi_{rs} \mid k_{ij}) = \frac{k_{ij}}{\varphi_{rs}}\sum_{k=1}^{n}\beta_{ksr}\varphi_{ks} \tag{11}$$

2.3　频响函数对 k_{ij} 的敏感度

若系统阻抗阵 $\boldsymbol{Z} = s^2\boldsymbol{M} + s\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}$, 其各元素与参数 p_j 呈线性关系, 则当 $\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial p_j}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}$ 时, 有 $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial p_j} = -\boldsymbol{E}^2$, 且有:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p_j} = (-1)\boldsymbol{HE} \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{Z}^{-1}$.

将 k_{ij} 代替 p_j 代入上式可得:

$$\frac{\partial H_{rs}}{\partial k_{ij}} = -H_{ri}H_{js} \tag{13}$$

$$\eta(H_{rs} \mid k_{ij}) = -H_{ri}H_{js}k_{ij}/H_{rs} \tag{14}$$

2.4　频域响应对 k_{ij} 的敏感度

若 $\{F\}$ 为外力向量的拉氏变换, 其频域响应可写成 $\{U\} = \boldsymbol{H}\{F\}$, 则:

$$\frac{\partial \{U\}}{\partial p_j} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p_j}\{F\} = -\boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial p_j}\{U\},$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial p_j} = -\boldsymbol{H}_r^T \frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial p_j}\{U\} \tag{15}$$

将 k_{ij} 代替 p_j 带入上式可得 :

$$\frac{\partial \{U\}}{\partial k_{ij}} = -H_{ri}U_j \tag{16}$$

故:

$$\eta(U_r \mid k_{ij}) = -U_j H_{ri} k_{ij} / U_r \tag{17}$$

2.5　桩基动力参数对 k_{ij} 的敏感度分析

对于桩基, 由式(3) 可知, 在刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中, 刚度元素是各分散刚度 $k_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的线性组合, 即:

$k_{11} = k_1 + k_2 = 2k$,
$k_{12} = k_{21} = -k_1 = -k$, $k_{22} = 2k$,
$k_{32} = k_{23} = -k$, $\cdots$, $k_{nn} = k$.

则有 $\boldsymbol{K} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{K}_i$ 且 $k_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_i}{\partial k_i} = \boldsymbol{K}_i$, 于是有:

$$\eta(\omega_r \mid k_i) = \{\varphi_r\}^T \boldsymbol{K}_i \{\varphi_r\}/2\omega_r^2 \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\eta(\omega_r \mid k_i) = \{\varphi_r\}^T \boldsymbol{K}\{\varphi_r\}/2\omega_r^2 = \frac{1}{2} \tag{19}$$

由于刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 为正定矩阵, 所以有:

$\eta(\omega_r \mid k_i) > 0$ 且

表 1 桩基固有频率 ω 及振型 φ

Tab. 1 The frequency and the modal of pile

i	ω_i	$\varphi_i^{(1)}$	$\varphi_i^{(2)}$	$\varphi_i^{(3)}$	$\varphi_i^{(4)}$	$\varphi_i^{(5)}$	$\varphi_i^{(6)}$	$\varphi_i^{(7)}$	$\varphi_i^{(8)}$	$\varphi_i^{(9)}$	$\varphi_i^{(10)}$
1	2.99	0.15	0.29	0.44	0.57	0.68	0.78	0.87	0.93	0.97	1.00
2	8.90	-0.44	-0.80	-1.00	-1.00	-0.80	-0.44	0.00	0.44	0.80	1.00
3	14.61	-0.68	-1.00	-0.78	-0.15	0.57	0.98	0.87	0.30	-0.44	-0.93
4	20.00	-1.00	-1.00	0.00	1.00	1.00	0.00	-1.00	-1.00	0.00	1.00
5	24.94	-1.00	-0.44	0.80	0.80	-0.44	-1.00	0.00	1.00	0.44	-0.80
6	29.32	-1.00	0.15	0.98	-0.30	-0.80	0.44	0.89	-0.57	-0.78	0.68
7	33.05	0.93	-0.68	-0.44	1.00	-0.30	-0.78	0.87	0.15	-0.98	0.57
8	36.04	-0.78	1.00	-0.44	-0.44	1.00	-0.80	0.00	0.80	-1.00	0.44
9	38.22	-0.57	0.87	-0.98	0.68	-0.15	-0.44	0.87	-1.00	0.78	-0.30
10	39.55	-0.30	0.57	-0.78	0.93	-1.00	0.98	-0.87	0.68	-0.44	0.15

$$|\eta(\omega_r|k_i)| \leqslant \frac{1}{2} \tag{20}$$

同理, 由式(10)、(11) 可推得:

$$\beta_{ksr}=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega_s^2-\omega_k^2}\{\varphi_k\}^T\dfrac{\boldsymbol{K}_i}{k_i}\{\varphi_s\}(k\neq s)\\ 0 \qquad\qquad (k=s)\end{cases}$$

$$\eta(\varphi_{rs}|k_i)=\frac{k_i}{\varphi_{rs}}\sum_{r=1}^{n}\beta_{ksr}\varphi_{rs}$$

$$\eta(H_{rs}|k_i)=-H_{ri}H_{is}k_i/H_{rs}$$

$$\eta(U_r|k_i)=-U_jH_{ri}k_i/U_r \tag{21}$$

式(21) 是桩基的动力参数元素 ω_r、φ_{rs}、H_{rs} 及 U_r 对竖向刚度元素 k_i 微小变化(如扩颈或缩颈) 的敏感度的数学表达. 将实际的某根桩基础的数据代入上述各等式, 就可以得到各个灵敏度高低的具体情况.

3 算 例

如图 1 所示, 将桩基离散为 10 自由度的有限自由度系统, 假设其刚度为:

$$k_1=k_2\cdots=k_{10}=400\ \text{kN/m}$$

质量为: $M_1=M_2=\cdots M_{10}=1\ 000$ kg,

阻尼为: $c_1=c_2=\cdots c_{10}=100$ N · s/m.

可用子空间迭代法求得桩基的 10 个固有频率及振型如表 1 所示:

为了方便比较, 将离散刚度 $k_i(i=1,2,3\cdots)$ 分别改变 10%, 即某个 k_i 变化 10%, 其它 $k_j(j\neq i)$ 保持不变, 分别计算得到改变后的固有频率和振型, 为节省篇幅, 这里仅列出当 k_1, k_2 改变时, 前 3 阶的固有频率与振型的值, 如表 2、3 所示.

表 2 前 3 阶固有频率随刚度改变后的数值

Tab. 2 The values of the former three frequency to the change of the stiffness

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3
k_1 减少 10%	2.95	8.81	14.48
k_2 减少 10%	2.96	8.84	14.58

利用式(21) 可计算得桩顶部频响函数对刚度 k_1 改

表 3 前 3 阶振型随刚度改变后的数值

Tab. 3 The values of the former three modal to the change of the stiffness

振	型	$\varphi_i^{(1)}$	$\varphi_i^{(2)}$	$\varphi_i^{(3)}$	$\varphi_i^{(4)}$	$\varphi_i^{(5)}$	$\varphi_i^{(6)}$	$\varphi_i^{(7)}$	$\varphi_i^{(8)}$	$\varphi_i^{(9)}$	$\varphi_i^{(10)}$
k_1 减少 10%	φ_1	0.164	0.308	0.446	0.573	0.688	0.788	0.871	0.935	0.978	1.000
	φ_2	-0.484	-0.825	-1.000	-0.993	-0.785	-0.426	0.016	0.455	0.806	1.000
	φ_3	-0.727	-1.000	-0.743	-0.104	0.595	0.982	0.854	0.278	-0.443	-0.932
k_2 减少 10%	φ_1	0.147	0.308	0.445	0.573	0.688	0.788	0.871	0.935	0.978	1.000
	φ_2	-0.431	-0.817	-1.000	-0.985	-0.791	-0.433	0.010	0.452	0.805	1.000
	φ_3	-0.658	-1.000	-0.776	-0.140	0.571	0.978	0.865	0.292	-0.437	-0.933

变的敏感度:

$$\eta(H_{11} | k_1) = - H_{11} k_1,$$

取模, 有

$$| \eta(H_{11} | k_1) | = H_{11} k_1,$$

η 与 ω 的关系曲线如图 2 所示.

由表 2、3 和图 2 可以看出, 固有频率在刚度系数发生改变后, 其变化量非常小, 改变量在 1% ~ 3% 之间; 振型对刚度系数的改变也不敏感, 但在节点处, 振型系数对刚度系数有一定的敏感性. 频响函数和频域响应对刚度变化的敏感性比较明显, 特别是在共振区域也存在一个峰值范围.

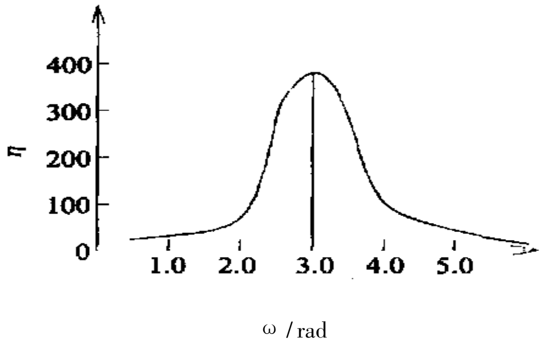

图 2　桩基频响函数对刚度系数的敏感度

Fig. 2　The sensitivity of the frequency response function to the change of the stiffness

4　结　论

通过理论推导和算例计算, 对于离散的自由度系统, 可以得出以下结论:

1) 固有频率对刚度的敏感度很小, 当刚度发生变化时, 频率的数值变化很不明显.

2) 振型对刚度的敏感度也不大, 但在节点处, 振型的数值对刚度有一定的敏感度.

3) 频响函数及频域响应是比较敏感的参数, 在共振区域附近时, 频响函数对刚度的敏感度比较明显, 存在一个峰值范围.

4) 在桩基动力测试的实践中, 由于频响函数及频域响应能反映系统的动力特性与响应性质, 而且在共振区域附近时对桩基的缺陷比较敏感, 可以选作判断缺陷的参数.

参考文献:

[1]　李永梅. 桩—土—杆系结构的动力相互作用[J]. 建筑结构学报, 2002, 2: 75- 81.

[2]　窦立军. 土—结构动力相互作用几个实际应用问题[J]. 世界地震工程, 1999, 15(14): 20- 25.

[3]　Martin Philippe P. One-dimensional dynamic ground response analysis[J]. ASCE, 1982, 108: 935- 952.

[4]　Gu Songnian, Zhang Jianlin. A vibration diagnosis approach to structural fault[J]. ASCE, 1989, 1: 88- 93.

[5]　徐攸在, 刘兴满. 桩的动测新技术[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989. 10.

The Sensitivity Analysis of Vibration Parameters on Pile

ZHANG Jian-guo[1], ZHANG Jian-lin[1], XIE Jian-hua[2]

(1. School of Architecture and Civie Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China;
2. The Construction Safety and Quality Supervision Station of Xiamen, Xiamen 361003, China)

Abstract: In this paper, the pile is simplified to a discrete MDOF system, and the longitudinal vibration parameters on pile are analyzed. The sensitivity of the vibration parameters due to the change of the stiffness is deducted mathematically. These parameters include the frequency, the model, the frequency response function and the response in frequency field. As a result, the sensitivity of the frequency due to the change of the stiffness is very low and that of the model is also low except on the node; the sensitivities of the frequency response function and the response in the frequency field on the change of the stiffness are strong. An example is worked out and the results indicate that the conclusion is accurate and the two parameters can be used to diagnose the default on the pile.

Key words: pile; vibration parameters; sensitivity