

Euler 梁自由振动的 Hermite 再生核无网格分析

林振庭, 王东东*, 轩军广

(厦门大学建筑与土木工程学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 基于 Hermite 再生核无网格近似, 建立了 Euler 梁自由振动分析的伽辽金无网格离散方程. 针对常见的几种典型边界条件的 Euler 梁自由振动问题, 详细分析了前两阶频率的误差和收敛性. 结果表明, 与传统仅采用挠度近似的伽辽金无网格法和 Hermite 有限元法相比, 考虑节点转角对挠度近似影响的 Hermite 无网格方法具有更高的精度, 为 Euler 梁振动分析提供了一种高精度的数值方法.

关键词: 无网格法; Euler 梁; Hermite 再生核近似; 自由振动; 固有频率

中图分类号: TU 31; O 242.21

文献标识码: A

文章编号: 0438-0479(2010)02-0223-05

自由振动条件下结构的固有频率反映了其振动特性, 对于结构动力分析设计至关重要. 对于连续体系, 大部分情况下结构的固有频率无法得到解析解, 需要采用有限元等数值解法. 然而有限元法受限于网格的有序拓扑连接, 难以简便直接地建立全域高阶协调近似, 进行自适应或大变形分析网格重剖分时较为繁琐费时, 通常无法直接求解薄板壳等阶问题. 最近 20 年来快速发展起来的无网格法^[1-6]将问题区域离散为一组节点, 然后基于节点位置通常采用移动最小二乘 (Moving least square, MLS) 或再生核方法 (Reproducing Kernel, RK) 来建立无网格近似, 将 MLS/RK 无网格近似和不同的加权残值方法相结合就形成了各具特色的无网格法. 这里我们讨论的是伽辽金无网格法. 由于无需节点的连接信息及容易建立全域协调近似函数, 无网格法对于有限元求解遇到困难的问题有着显著的优势.

Hermite 再生核 (Hermite reproducing kernel, HRK) 无网格法是在多项式再生条件的理论框架下, 同时将广义节点挠度和节点转角作为节点未知量来建立梁挠度的无网格近似, 进而与伽辽金法结合形成的无网格方法^[7-8]. 与传统只将广义节点挠度作为未知量的再生核无网格近似相比, HRK 近似具有更高的精度, 并降低了核函数最小影响域的要求. 本文针对 Euler 梁这一重要的结构形式, 采用 HRK 无网格法进行数值离散, 详细推导了动力离散方程, 然后对各种边界

条件下的振动频率进行了详细的比较分析, 并研究了基函数阶次及核函数影响域大小对求解结果的影响.

1 HRK 无网格近似

在 HRK 无网格近似中, 长度为 L 的 Euler 梁被离散为一组节点 $\{x_l\}_{l=1}^{NP}$, NP 是节点总数, 每个节点 l 有广义挠度系数及广义转角系数两个节点未知量, 梁的挠度的无网格近似可以表示为^[7-8]:

$$v^h = \sum_{l=1}^{NP} d_l^i(x) v_l + \sum_{l=1}^{NP} d_l^r(x) \theta_l = \sum_{l=1}^{NP} d_l(x) d_l = d, \quad (1)$$

式中, $d_l(x) = \{d_l^i(x), d_l^r(x)\}$, $d_l^i(x)$ 和 $d_l^r(x)$ 为节点 x_l 与挠度和转角相关联的形函数, 其构造如下:

$$d_l^i(x) = p^T(0) M^{-1}(x) p(x_l - x) a(x_l - x), \quad (2)$$

$$d_l^r(x) = p^T(0) M^{-1}(x) p_x(x_l - x) a(x_l - x), \quad (3)$$

式中 a 为影响域半径为 a 的三次 B 样条核函数^[3], 基函数向量 p 与 p_x , 矩量矩阵 M 为:

$$p(x) = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}^T, p_x(x) = \{0, 1, 2x, \dots, nx^{n-1}\}^T, \quad (4)$$

$$M(x) = \sum_{l=1}^{NP} [p(x_l - x) p^T(x_l - x) a(x_l - x) + p_x(x_l - x) p_x^T(x_l - x) a(x_l - x)]. \quad (5)$$

容易验证形函数 (2) 与 (3) 满足下面的阶单项式再生条件

$$\sum_{l=1}^{NP} \{d_l^i(x) (x_l - x)^i + d_l^r(x) [i(x_l - x)^{i-1}]\} = \delta_{0,i}, i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

另外值得指出的是, 与传统再生核形函数相比, HRK 形函数具有更好的稳定性和允许最小影响域, 例如, 当

收稿日期: 2009-06-16

基金项目: 国家自然科学基金 (10972188, 10602049); 福建省高等学校新世纪优秀人才支持计划

*通讯作者: ddwang@xmu.edu.cn

采用三阶基函数时,即 $n = 3$,传统再生核形函数的相对最小影响域半径为 3,而 HRK 为 1,图 1 为相对影响域半径为 $a = 1$ 时的 HRK 挠度与转角形函数,这样会大大提高矩阵及形函数的计算效率.

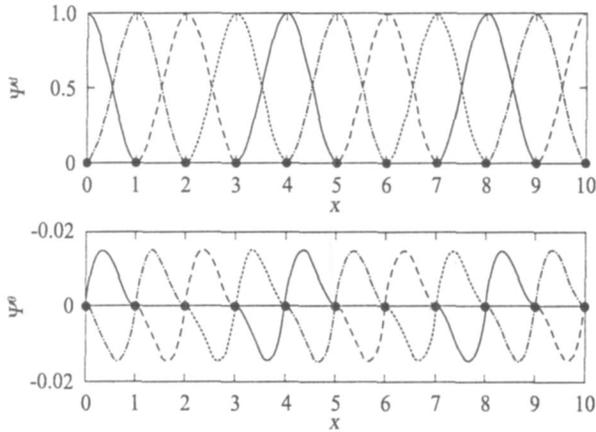


图 1 HRK 形函数 ($a = 1$)

Fig. 1 HRK shape functions ($a = 1$)

2 Euler 梁自由振动方程及无网格离散

考虑一悬臂 Euler 梁,其自由振动条件下的动能 T 与势能 V 分别为

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \int_0^L A \dot{v}^2 dx \\ V = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v_{,xx})^2 dx - v_v(0) - v_{,x}(0) \end{cases} \quad (7)$$

式中 L 为梁的长度, ρ 为梁的密度, A 为梁的横截面积, v 是梁的挠度, E 和 I 分别为梁的杨氏模量及截面惯性矩, v_v 和 $v_{,x}$ 为固定端的支座反力, $v_v = (EIv_{,xx})_{,x}(0)$, $v_{,x} = -EIv_{,xx}(0)$. 由于 HRK 形函数不是插值函数,不能直接满足位移边界条件,这里通过引入拉格朗日乘子 λ_v 和 $\lambda_{v,x}$ 来施加强制边界条件. 基于 Hamilton 原理,在任一给定时间区间 $[t_0, t_1]$, 梁的运动方程为

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0, \quad (8)$$

对式(8)进行变分运算可得梁自由振动的等效积分弱形式

$$\begin{aligned} & \int_0^L v A \ddot{v} dx + \int_0^L v_{,xx} EI v_{,xx} dx - v_v(0) v - \\ & v_{,x}(0) v_x - v_v(0) - v_{,x}(0) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

对式(9)中第二项再进行两次分部积分便可以得到梁的微分运动方程:

$$\begin{cases} A \ddot{v} + (EIv_{,xx})_{,xx} = 0 \\ EIv_{,xx}(L) = 0, - (EIv_{,xx})_{,x}(L) = 0 \\ v(0) = 0, v_{,x}(0) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

利用式(1)的 HRK 形函数引入下面的无网格离散:

$$\begin{cases} v^{,h} = \mathbf{d}^{,h}, v^h = \mathbf{d}^T \mathbf{T}, v^h_{,x} = \mathbf{d}^T \mathbf{T}_{,x} \\ v^h_{,xx} = \mathbf{B} \mathbf{d}, v^h_{,xx} = \mathbf{d}^T \mathbf{B}^T, \mathbf{B} = \mathbf{B}_{,xx} \end{cases} \quad (11)$$

将式(1)和(11)代入式(9)可以得到如下的自由振动离散方程:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{M}} \ddot{\hat{\mathbf{d}}} + \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \lambda \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \lambda \end{bmatrix} \end{cases} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{M} = \int_0^L \rho A \mathbf{T}^T \mathbf{T} dx$, $\mathbf{K} = \int_0^L \mathbf{B}^T EI \mathbf{B} dx$, $\mathbf{G} = [\lambda_v(0), \lambda_{v,x}(0)]^T$, $\lambda = [\lambda_v, \lambda_{v,x}]^T$. 式(12)对应的简谐振动特征值问题为:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{K}} - \omega^2 \hat{\mathbf{M}} \mathbf{q} = \mathbf{0} \\ \mathbf{q} = [\phi_d, \phi J^T]^T \end{cases} \quad (13)$$

式中 ω 和 ϕ_d 分别为自由振动的圆频率和振型, $\phi = [\phi_v, \phi J^T]^T$ 为广义特征向量中由于引入 λ_v 和 $\lambda_{v,x}$ 而产生的附加向量.

3 数值算例

本节中将通过求解不同边界条件的 Euler 梁振动问题,验证所述方法的有效性. 梁的几何与材料参数如下:长度 $L = 1.0$,宽度 $b = 0.01$,高度 $h = 0.02$,梁密度为 $\rho = 1.0$,方便起见取 $A/EI = 1$,无网格计算中采用两种不同计算方案:(a)基函数阶次为 $n = 3$,相对支撑域半径为 $a = 4.0$; (b)基函数阶次为 $n = 4$,相对支撑域半径为 $a = 6.0$. 相邻两节点组成一积分单元,为了精确地进行误差计算,每个积分单元内采用 10 点高斯积分. 为进一步验证 HRK 的精度,将 HRK 的结果与采用三次 Hermite 梁单元的有限元结果进行了对比,HRK 与 RK 无网格近似所取计算参数相同. 下述各图中工况(a)、(b)即为这两种不同计算条件下的误差结果. 为了验证算法的数值精度,计算中采用如下的误差计算公式:

$$E_{err} = | \frac{h}{\omega} - 1 |, \quad (14)$$

式中, h 、 ω 分别是自由振动圆频率的数值解及对应的精确解.

工况(a)条件下 HRK 无网格法、RK 无网格法、Hermite 有限元法(FEM) 3种计算方法的误差及收敛

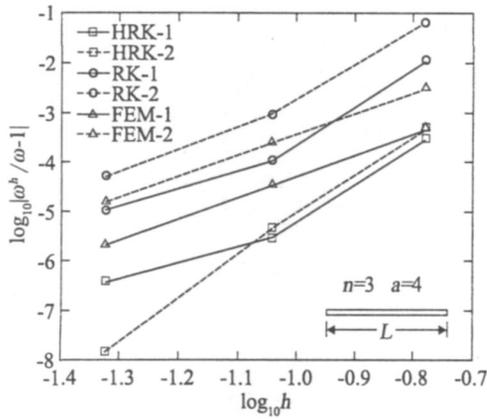


图 2 两端自由梁前二阶频率收敛图
Fig. 2 Convergence comparison of the first and second frequencies for free-free beam

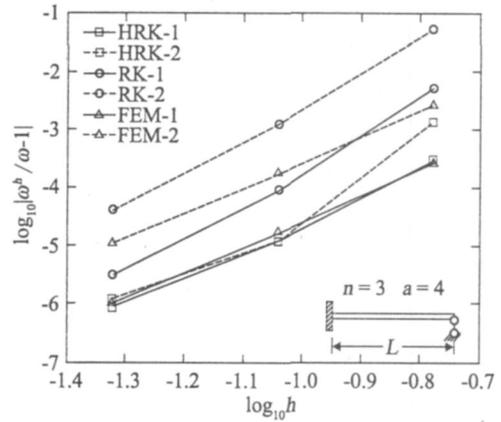


图 5 固支-简支梁前二阶频率收敛图
Fig. 5 Convergence comparison of the first and second frequencies for clamped-simply supported beam

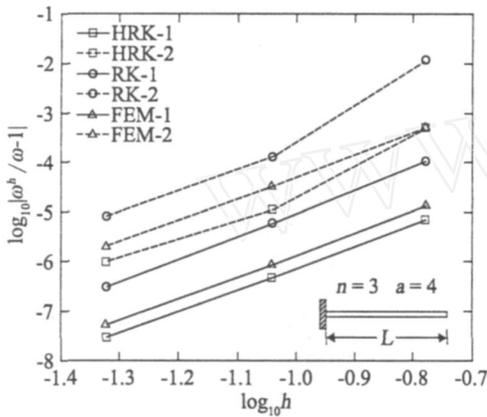


图 3 悬臂梁前二阶频率收敛图
Fig. 3 Convergence comparison of the first and second frequencies for clamped-free beam

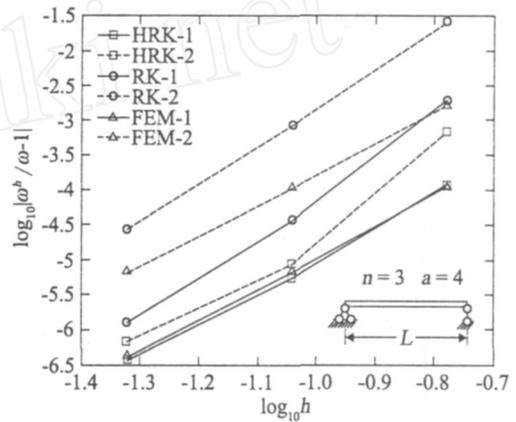


图 6 两端简支梁前二阶频率收敛图
Fig. 6 Convergence comparison of the first and second frequencies for simply supported-simply supported beam

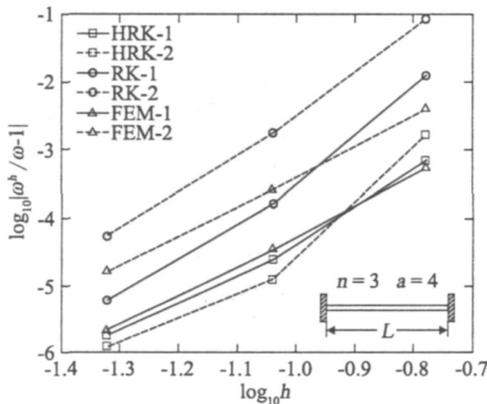


图 4 两端固支梁前二阶频率收敛图
Fig. 4 Convergence comparison of the first and second frequencies for clamped-clamped beam

率示于图 2~6,各种方法名后的“1”和“2”分别代表该方法求得的梁的基频和二阶频率, h 代表两相邻节点的间距. 结果表明,3种方法的收敛率大体相近,HRK

无网格法的误差均为最小. 对于后 3 种边界,由于约束的增强,HRK 无网格近似得到的基频精度优势有所减弱,但仍好于其余 2 种方法. 对于二阶频率,HRK 无网格法的误差明显小于有限元法(FEM)及 RK 无网格法,表明 HRK 无网格近似在求取高阶频率时存在显著的优势. 注意到自由边界条件下梁自由振动前二阶圆频率为零,分别代表 Euler 梁的平动及刚体转动,故在利用式(14)进行精度分析时略去前二阶圆频率,图 2 中 HRK-1、HRK-2 对应为 Hermite 无网格法第三、四阶的频率误差,其余方法类似. 结果同时表明这种工况下传统 RK 无网格法的计算误差大于 Hermite 有限元法,这是由于有限元法中挠度近似采用的也是考虑转角未知量的 Hermite 插值. 计算工况(b)对应的结果列于图 7~11. 这种计算方案下 HRK 无网格法的精度仍然明显高于 RK 无网格法和有限元法. 相比工况(a),RK 无网格法的基频精度有所提高,与

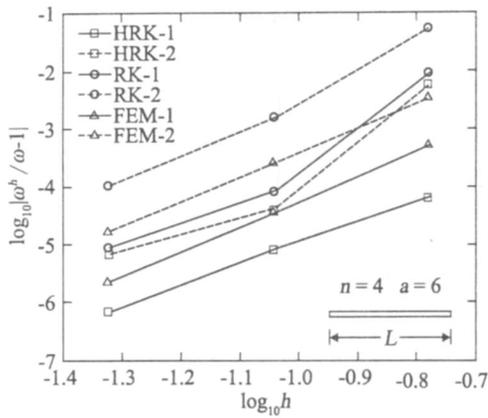


图 7 两端自由梁前二阶频率收敛图
Fig. 7 Convergence comparison of the first and second frequencies for free-free beam

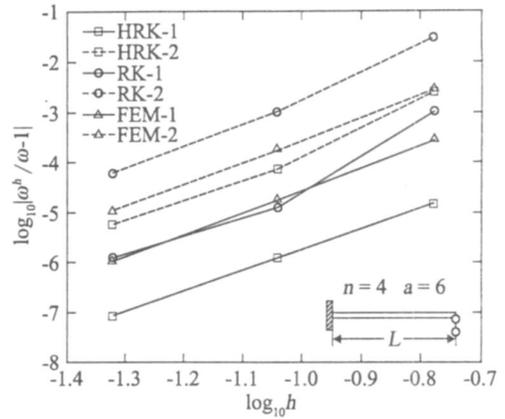


图 10 固支-简支梁前二阶频率收敛图
Fig. 10 Convergence comparison of the first and second frequencies for clamped-simply supported beam

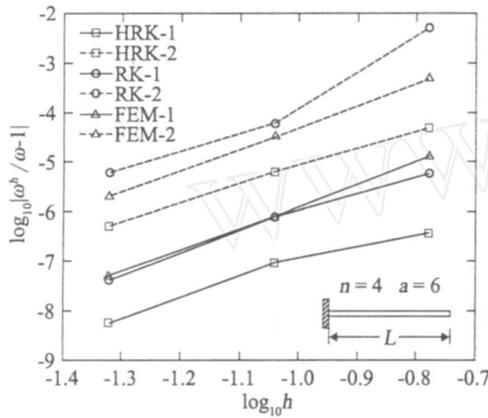


图 8 悬臂梁前二阶频率收敛图
Fig. 8 Convergence comparison of the first and second frequencies for clamped-free beam

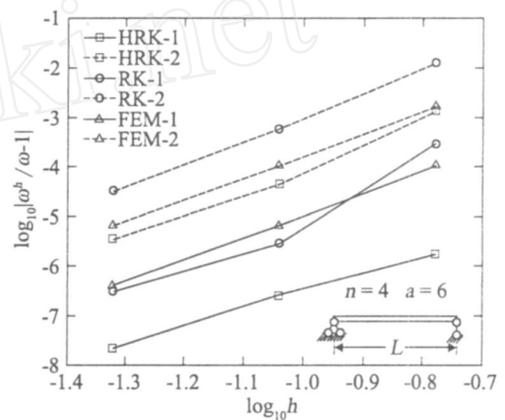


图 11 两端简支梁前二阶频率收敛图
Fig. 11 Convergence comparison of the first and second frequencies for simply supported-simply supported beam

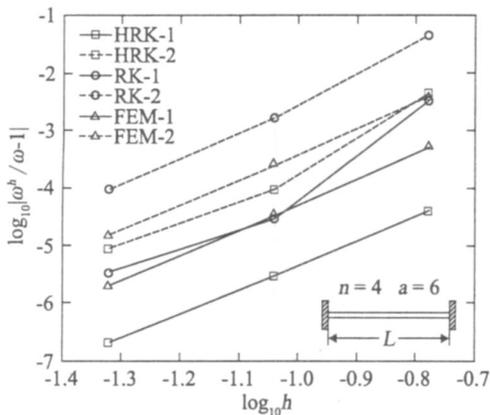


图 9 两端固支梁前二阶频率收敛图
Fig. 9 Convergence comparison of the first and second frequencies for clamped-clamped beam

构造了 HRK 无网格法求解 Euler 梁自由振动的无网格离散方程,详细分析了自由-自由、固支-固支、固支-自由、固支-简支、简支-简支等典型约束情况下梁的前二阶振动频率,进行了误差和收敛特性的比较分析,并进一步分析了基函数阶次及核函数影响域大小的影响。结果表明,与传统 RK 无网格法及 Hermite 有限元法相比,各种工况下 HRK 无网格法均具有最高的精度,为 Euler 梁振动分析提供了一种非常有效的数值方法。

有限元法较为接近。

4 结论

参考文献:

[1] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37: 229-256.
[2] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods[J]. International Journal for Numerical Methods

- in Fluids, 1995, 20:1081-1106.
- [3] Chen J S, Pan C, Wu C T, et al. Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of nonlinear structures [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139:195-227.
- [4] Zhou J X, Zhang H Y, Zhang L. Reproducing kernel particle method for free and forced vibration analysis[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 279:389-402.
- [5] 张雄, 刘岩. 无网格法的理论及应用[J]. 力学进展, 2009, 39(1):1-36.
- [6] Wang D, Chen J S. A locking-free meshfree curved beam formulation with the stabilized conforming nodal integration[J]. Computational Mechanics, 2006, 39:83-90.
- [7] 王东东, 张灿辉, 李庶林. Euler 梁的无网格求解方法探讨[J]. 厦门大学学报:自然科学版, 2006, 45(2):206-210.
- [8] Wang D, Chen J S. A Hermite reproducing kernel approximation for thin-plate analysis with sub-domain stabilized conforming integration[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, 74:368-390.

Free Vibration Analysis of Euler Beam Using Hermite Reproducing Kernel Meshfree Method

L IN Zhen-ting, WANG Dong-dong^{*}, XUAN Jun-chang

(School of Architecture and Civil Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: A free vibration analysis of Euler beam using a Galerkin meshfree formulation with the Hermite reproducing kernel approximation is presented. Based upon the proposed approach the free vibration analysis of Euler beam with various typical boundary conditions is performed and the error and convergence behavior of the fundamental and second frequencies are studied in details. It is uniformly confirmed that compared with the conventional reproducing kernel meshfree method and the Hermite finite element method, the present method that incorporates the slope influence into the deflection approximation shows the most favorable solution accuracy and thus provides a very effective numerical tool for accurate vibration analysis of Euler beam.

Key words: meshfree methods; Euler beam; Hermite reproducing kernel approximation; free vibration; natural frequencies