

类岩石材料声发射参数与应力和应变耦合本构关系

薛云亮 李庶林✉ 林峰 徐宏斌

厦门大学建筑与土木工程学院, 厦门 361005

✉ 通信作者, E-mail: shulin.li@163.com

摘要 利用液压伺服试验系统和声波监测仪开展了岩石和混凝土材料声发射特性试验研究,并在试验基础上研究了损伤变量与声发射参数之间的量化关系。结果表明,损伤变量与声发射参数呈线性关系。采用基于 Weibull 分布的损伤本构模型及损伤变量与声发射数间的经验公式,推导出应力、应变参量与声发射数参量的耦合模型,该模型参数可以根据应力-应变全曲线及损伤变量与声发射数关系曲线的几何边界条件确定其表达式,方式简单适用。通过与岩石和混凝土试样单轴压缩试验实测结果对比,证实模型可以很好地反映单轴受压状态下岩石和混凝土的应力、应变与声发射数的耦合关系。

关键词 岩石; 混凝土; 声发射; 应力-应变曲线; 本构关系

分类号 TD 853.34

Coupling constitutive relations of AE parameter versus stress and strain for rock-like materials

XUE Yun-liang, LI Shu-lin✉, LIN Feng, XU Hong-bin

School of Architectural and Civil Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China

✉ Corresponding author, E-mail: shulin.li@163.com

ABSTRACT Experiments on acoustic emission characteristics of rock and concrete samples were carried out with a servo-hydraulic test system and a smart acoustic monitoring device. Based on these experiments, the relationship between damage variable and acoustic emission (AE) parameter was investigated, and the results showed a linear correlation between them. By using the damage constitutive model based on Weibull distribution and the empirical relationship of damage variable versus acoustic emission number, the coupling models of acoustic emission parameter versus stress and strain were formulated. Parameters in the models can be determined according to the geometric boundary conditions of the full stress-strain curve and the curve of damage variable versus acoustic emission number. The process for acquiring these model parameters is simple and easy to use. A comparison between the results of the coupling models and the measured data by uniaxial compression testing for rock samples and concrete samples proves that the coupling models can better reflect the relations of acoustic emission parameter versus stress and strain.

KEY WORDS rock; concrete; acoustic emissions; stress-strain curves; constitutive models

大量试验结果表明,声发射是材料或结构在外力或内力作用下,在产生变形或损伤的同时,以弹性波的形式释放出部分应变能的一种自然现象。因此声发射是粒状脆性材料在受载过程中的伴生现象,而且在不同的受力条件下,会表现出不同的声发射特征^[1-5]。一次声发射代表材料的一次微损伤,声发射事件表征着材料的微观破裂,因此声发射参量

(声发射事件数、能量等)可以用来表征材料的损伤程度,同应力、应变参量一样,声发射参量也应该属于一个本构参量。因此运用声发射试验对混凝土类材料损伤演化过程进行跟踪和分析,从微观上研究混凝土类材料损伤过程,分析混凝土类材料损伤的微观机理,探讨声发射参数与损伤变量的定量关系,继而研究应力、应变和声发射这几种信息参量的本

收稿日期: 2010-07-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 10572122); 国家高技术研究发展计划资助项目(No. 2006AA06Z117); 厦门大学人才引进资助项目(No. xk1005)

构耦合关系,不仅是对基于损伤力学的损伤本构模型研究的进一步发展和完善,而且对于实际工程的稳定性监测与评价,都有很重要的实际价值。

声发射技术是借助专门的声发射仪器,将声发射信号检测出来,通过对检测信号或检测参数加以分析来推断材料内部所发生的变化^[6]。最利于声发射参数和力学参数沟通的是损伤力学的观点^[7],虽然对于力学参数与声发射参数的耦合关系研究的比较少,但还是取得了一些成就。Ohtsu 等^[8-10]和 Dai 等^[11]提出的关于应力与声发射数的经验公式,详细分析了声发射数与应力之间的关系,同时验证经验公式的适用性。纪洪广等^[12]通过试验研究验证了 Ohtsu 和 Dai 经验公式的适用性及实际工程的应用。朱宏平等^[13]通过 Ohtsu 和 Dai 的经验公式利用声发射信号与速率过程理论对混凝土损伤进行定量评估。张明等^[14]基于累积声发射数与损伤变量一致的观点,推导出了混凝土类材料声发射数与损伤变量之间的关系。但是, Ohtsu 和 Dai 的经验公式采用拟合求解参数,缺乏明确的物理意义。由于混凝土、岩石材料是由颗粒组成的一类脆性材料,都先天带有微裂隙(裂纹)等缺陷以及不均质性等特点,因此它们具有相近的力学性质。本文在前者的基础上,通过对岩石和混凝土试样室内试验的研究,基于损伤力学的观点出发,结合基于 Weibull 分布的岩石和混凝土损伤本构关系模型,推导出应力和应变与声发射数耦合关系,并通过几何边界条件求解参数,方法较为简单,更适用于工程应用。

1 室内试验研究

1.1 MTS 试验系统

加载设备是 MTS815-02 型液压伺服岩石力学试验机系统(图 1),其轴向静载 2 667 kN,加载框架刚度 $10.5 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$,侧向压力最大 150 MPa。该试验机控制系统经改造升级,将原来的模拟控制系统升级为全数字计算机自动控制系统。该系统配置了基于 Windows 平台的可视化操作软件,可跟踪记录当前荷载、应力、位移、应变值的大小、荷载-位移和应力-应变曲线等。特别是系统在试验测试过程中可以实现对轴向应变控制和环向应变控制的切换,灵活实现对试验测试过程的控制。

1.2 声发射试验设备

声发射试验采用 DYF-2 型智能声波监测仪(图 1),吸收了国内外各类地音仪和顶板监测仪的优点。该仪器可与计算机联机进行实时监测与分析,配备有对原始波形进行数字滤波、频谱分析、频

率开窗和技术资料管理等后续处理软件。该仪器功能齐全,对岩石等材料受载时产生变形或断裂等变化而伴随的声发射现象,能监测记录其能量值大于设置基准的声发射参数,并通过软件频率开窗、智能时域开窗以及人工智能识别等先进技术进行噪声滤波和信号分析。试验触发电平设置为 4.5 mV,采样间隔为 50 μs ,前置放大器增益选为 40 dB,主放大器增益选为 20 dB。

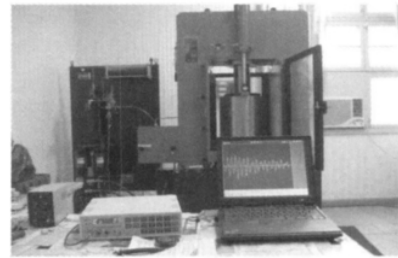


图 1 室内试验系统
Fig. 1 Indoor test system

1.3 试验内容

岩石试样材料取自四川会理的白云岩。根据有关规定,并基于试验设备对样品尺寸的要求,岩石采用直径为 50 mm,高度 110 mm 左右的圆柱形试件(图 2),采用 B 系列表示。混凝土试样材料采用普通混凝土试块,采用 C 系列表示,试块规格 5 cm \times 5 cm \times 5 cm,配合比为水泥:砂:石子:水 = 1:1.6:3.2:0.6,标准养护 28 d 龄期(图 3)。



图 2 岩石试样
Fig. 2 Rock samples

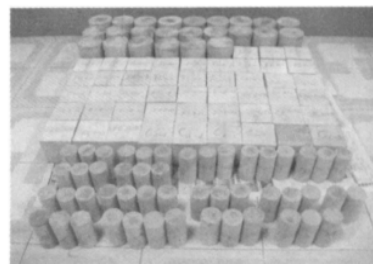


图 3 混凝土试样
Fig. 3 Concrete sample

1.4 试验测试方法

试验时保持加载过程与声发射监测同步. 对单轴试验的所有岩石试样采用轴向应变控制加载, 加载应变速率为 $2 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$; 对单轴试验的所有混凝土试样统一采用载荷加载控制方式, 加载应力速率为 $2 \times 10^{-2} \text{ MPa} \cdot \text{s}^{-1}$. 对声发射监测系统, 设定声发射监测的采样间隔为 $50 \mu\text{s}$, 频率为 $10^2 \sim 10^4 \text{ Hz}$, 为尽可能减少噪音的干扰, 选择高的声信号触发电平为 3.6 或 4.5 mV, 使试验只测定岩石和混凝土试样单轴受压破坏的声发射大事件.

由图 4 可见, 各岩石试样的应变-时间关系基本是线性的, 即应变 ε 与时间 t 之间存在以下关系:

$$\varepsilon = k_1 t \tag{1}$$

式中 k_1 为常数, 即为加载应变速率. 本试验中 k_1 为 $2 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ 左右.

在图 5 中各混凝土试样的应力-时间关系基本是线性的, 即应力 σ 与时间 t 之间存在以下关系:

$$\sigma = k_2 t \tag{2}$$

式中 k_2 为常数, 即为加载应力速率. 本试验中 k_2 为 $2 \times 10^{-2} \text{ MPa} \cdot \text{s}^{-1}$ 左右.

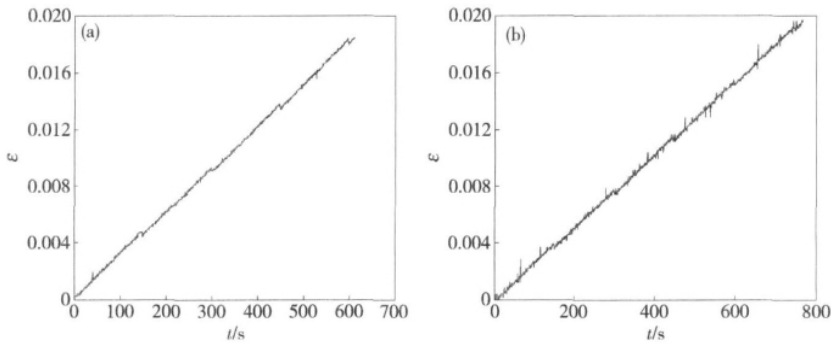


图 4 应变与时间的关系曲线. (a) B1 岩石试样; (b) B2 岩石试样

Fig. 4 Relationship curves between strain and time: (a) rock sample B1; (b) rock sample B2

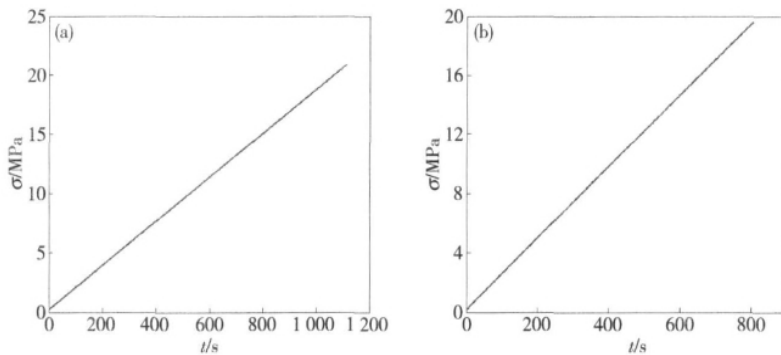


图 5 应力与时间的关系曲线. (a) C1 混凝土试样; (b) C2 混凝土试样

Fig. 5 Relationship curves between stress and time: (a) concrete sample C1; (b) concrete sample C2

2 声发射参量与损伤变量量化关系研究

文献 [12, 14] 通过对粒状脆性材料声发射机理的分析及累积声发射数与损伤变量一致的观点, 推导出了粒状脆性材料声发射数与损伤变量之间的关系, 即

$$D = KN \tag{3}$$

式中: D 为损伤变量, 取值 $[0 - 1]$; N 为声发射数; K 为常数.

图 6 为基于式 (3) 的损伤变量 D 值与声发射数 N 的关系曲线. 通过对计算出的 D 值曲线进行正

比例函数 $D = KN$ 回归分析, 可以看出两者基本呈线性关系. 图 6 可以验证文献 [12, 14] 关于粒状脆性材料声发射机理的分析及累积声发射数与损伤变量一致的观点, 即损伤变量与声发射呈线性关系, 且线性常数可采用边界条件计算.

表 1 为损伤变量与声发射数关系. 从表 1 及图 6 中可以发现: 通过公式 $K = D_{\text{max}} / N_{\text{max}}$ 计算得出的值与拟合出来的值基本相同, 即损伤变量与声发射数关系系数可采用其边界条件计算:

$$K = \frac{D_{\text{max}}}{N_{\text{max}}} \tag{4}$$

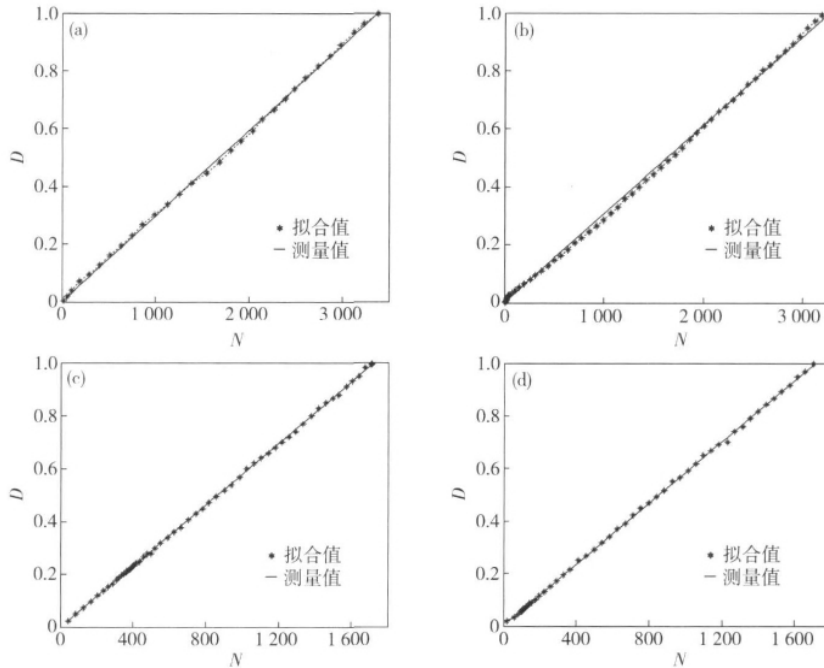


图 6 损伤变量 D 与声发射数 N 之间的关系曲线。(a) B1 岩石试样; (b) B2 岩石试样; (c) C1 混凝土试样; (d) C2 混凝土试样

Fig. 6 Curves of damage variable and AE number: (a) rock sample B1; (b) rock sample B2; (c) concrete sample C1; (d) concrete sample C2

表 1 损伤变量与声发射数的关系

Table 1 Relationship between damage parameter and AE number

试样	最大声发射数 N_{max}	损伤变量与声发射数的关系	相关系数, R
B1	3 172	$D = 3.06 \times 10^{-4} \times N$	0.998 38
B2	3 055	$D = 3.36 \times 10^{-4} \times N$	0.999 11
C1	1 714	$D = 5.80 \times 10^{-4} \times N$	0.999 05
C2	1 697	$D = 5.85 \times 10^{-4} \times N$	0.998 95

$$\sigma = E\varepsilon \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^m \right] \quad (7)$$

式中: E 为弹性模量; ε 为应变; m 、 a 为形状参数、尺度参数, 均为非负数。

曹文贵等通过应力-应变全曲线的几何边界条件求出损伤本构模型参数的表达式:

$$m = - \frac{1}{\ln \frac{\sigma_{pk}}{E\varepsilon_{pk}}} = \frac{1}{\ln \frac{E\varepsilon_{pk}}{\sigma_{pk}}} \quad (8)$$

$$a = \frac{\varepsilon_{pk}}{\left(\frac{1}{m} \right)^{\frac{1}{m}}} \quad (9)$$

式中 ε_{pk} 为峰值应变, σ_{pk} 为峰值应力。

具体过程见参考文献 [16]。从文献 [16-21] 中可以看出基于 Weibull 分布的岩石损伤本构模型能够较准确地描述压缩条件下岩石和混凝土的应力-应变全曲线。

其中当应变与时间呈线性关系时, 将式 (6) 代入式 (3) 得

$$N = \frac{1}{K} D = \frac{1}{K} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^m \right] \right\} \quad (10)$$

将式 (1) 代入式 (10) 得

$$N = \frac{1}{K} D = \frac{1}{K} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{k_1 t}{a} \right)^m \right] \right\} = \frac{1}{K} \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{k_1}{a} \right)^m t^m \right] \right\} \quad (11)$$

3 声发射数与应力、应变参量的耦合关系

本文从损伤力学的观点出发, 利用基于 Weibull 分布基础上的损伤本构模型及声发射数与损伤变量一致即二者呈线性关系模型, 联立室内试验特性即应变与时间呈线性关系模型或应力与时间呈线性关系模型, 推导出应力、应变参量与声发射数参量的耦合模型。

谢和平、董毓利、曹文贵等利用等效应变原理 [15] 提出了单轴压缩条件下的基于 Weibull 分布的岩石和混凝土损伤本构模型

$$\sigma = E\varepsilon (1 - D) \quad (5)$$

式中, 损伤变量的表达式为

$$D = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^m \right] \quad (6)$$

则式 (6) 代入式 (5) 最后得到

将式(11)变化得

$$\exp \left[- \left(\frac{k_1}{a} \right)^m t^m \right] = 1 - KN \quad (12)$$

则

$$- \left(\frac{k_1}{a} \right)^m t^m = \ln(1 - KN)$$

即

$$t^m = \frac{\ln(1 - KN)}{- \left(\frac{k_1}{a} \right)^m} = \frac{- \ln(1 - KN)}{\left(\frac{k_1}{a} \right)^m} = \frac{\ln \frac{1}{1 - KN}}{\left(\frac{k_1}{a} \right)^m} \quad (13)$$

$$t = \left[\frac{\ln \left(\frac{1}{1 - KN} \right)}{\left(\frac{k_1}{a} \right)^m} \right]^{\frac{1}{m}} = \frac{\left[\ln \left(\frac{1}{1 - KN} \right) \right]^{\frac{1}{m}}}{\left(\frac{k_1}{a} \right)} \quad (14)$$

将式(13)和式(14)代入应力-应变本构模型即式(7)得应力与声发射数耦合关系表达式

$$\begin{aligned} \sigma &= Ek_1 t (1 - KN) = \\ &Ek_1 \frac{\left[\ln \left(\frac{1}{1 - KN} \right) \right]^{\frac{1}{m}}}{\left(\frac{k_1}{a} \right)} (1 - KN) = \\ &Ea \left[\ln \left(\frac{1}{1 - KN} \right) \right]^{\frac{1}{m}} (1 - KN) = \\ &Ea(1 - KN) \left[\ln \left(\frac{1}{1 - KN} \right) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (15) \end{aligned}$$

将式(14)代入式(1)得应变与声发射数耦合关系表达式

$$\varepsilon = k_1 t = k_1 \left[\frac{\ln \left(\frac{1}{1 - KN} \right)}{\left(\frac{k_1}{a} \right)^m} \right]^{\frac{1}{m}} = a \left[\ln \left(\frac{1}{1 - KN} \right) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (16)$$

同理当应力与时间呈线性关系时,由式(5)变换后将式(2)、式(3)代入得

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E(1 - D)} = \frac{k_2 t}{E(1 - KN)} \quad (17)$$

将式(6)代入式(3)得

$$KN = D = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^m \right] \quad (18)$$

再将式(17)代入式(18)得

$$KN = 1 - \exp \left\{ - \left[\frac{k_2}{E(1 - KN)a} \right]^m t^m \right\} \quad (19)$$

式(19)整理后得

$$t^m = \frac{\ln(1 - KN)}{- \left[\frac{k_2}{Ea(1 - KN)} \right]^m} =$$

$$\frac{\ln(1 - KN) [Ea(1 - KN)]^m}{- (k_2)^m} \quad (20)$$

则

$$t = \frac{[\ln(1 - KN)]^{\frac{1}{m}} Ea(1 - KN)}{- (k_2)} \quad (21)$$

将式(21)代入式(2)得应力与声发射数耦合关系表达式

$$\begin{aligned} \sigma &= k_2 t = k_2 \frac{[\ln(1 - KN)]^{\frac{1}{m}} Ea(1 - KN)}{- (k_2)} = \\ &Ea(1 - KN) \left[\ln \left(\frac{1}{1 - KN} \right) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (22) \end{aligned}$$

将式(21)代入式(17)得应变与声发射数耦合关系表达式

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma}{E(1 - KN)} = \\ &\frac{Ea(1 - KN) \left[\ln \left(\frac{1}{1 - KN} \right) \right]^{\frac{1}{m}}}{E(1 - KN)} = \\ &a \left[\ln \left(\frac{1}{1 - KN} \right) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (23) \end{aligned}$$

室内试验的应变控制加载(位移控制加载)和应力控制加载(荷载控制加载)两种方法虽然有所不同,应变控制加载时应变与时间成正比,而应力控制加载时应力与时间成正比,但在推导应力和应变与声发射数的耦合关系过程中,笔者发现过程虽然不一样,但最后的应力与声发射数耦合关系表达式及应变与声发射数耦合关系表达式一致,且最终的表达式中与试验特性参数 k_1 、 k_2 无关,这也验证了声发射数同应力和应变一样,是一个本构参量,且也说明了声发射数同应力、应变一样是粒状脆性材料内部结构发生变化的标志,体现了时空不变性的特点,与试验特性无关。最终得到的基于室内试验的粒状脆性材料声发射数与应力、应变的耦合关系为

$$\varepsilon = a \left[\ln \left(\frac{1}{1 - KN} \right) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (24)$$

$$\sigma = Ea(1 - KN) \left[\ln \left(\frac{1}{1 - KN} \right) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (25)$$

式(24)、式(25)中系数 K 、 a 、 m 都是由边界条件的几何特征计算取得,即通过式(4)、(10)和(11)求得,与以往声发射数与应力和应变耦合关系的参数通过拟合求得相比,方法更为简单适用。

基于 Matlab 的室内试验声发射数和应力-应变曲线与本文建立的声发射数与应力和应变耦合关系曲线如图 7 所示。从图 7 可以看出本文建立的声发射数与应力和应变耦合关系能够较为准确地描述室

内试验测得的声发射数与应力和应变曲线.

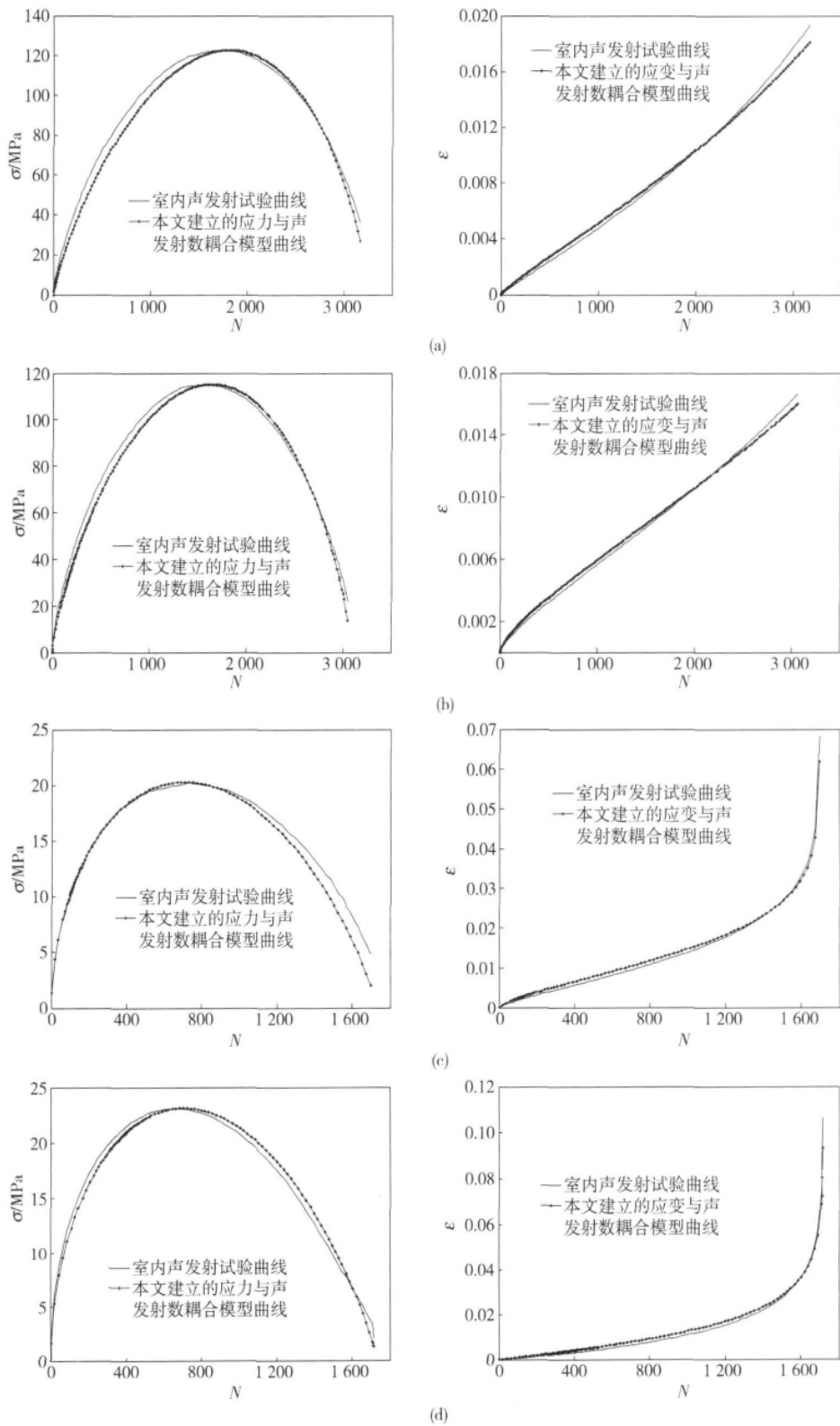


图 7 声发射数 N 与应力和应变的耦合关系. (a) B1 岩石试样; (b) B2 岩石试样; (c) C1 混凝土试样; (d) C2 混凝土试样

Fig. 7 Coupling relation between AE parameter and stress-strain; (a) rock sample B1; (b) rock sample B2; (c) concrete sample C1 (d) concrete sample C2

4 结论

(1) 利用 Weibull 分布的损伤本构模型及声发射数与损伤变量一致即二者呈线性关系模型, 联立室内试验特性即应变与时间呈线性关系及应力与时间呈线性关系模型, 推导出了应力、应变参量与声发射数参量的耦合模型。

(2) 建立的声发射数与应力和应变的耦合关系式与试验测得的应力和应变与声发射数曲线能够较好的吻合, 且本文建立的关系式中三个系数可以分别由应力-应变曲线、损伤变量与声发射数曲线的几何边界条件确定, 较为简单, 且具有普遍性。

参 考 文 献

- [1] Ji H G. *Study on the Technique of Acoustic Emissions for Concrete Materials and Its Application* [Dissertation]. Shenyang: Northeastern University, 1996
(纪洪广. 混凝土材料声发射技术研究与应用[学位论文]. 沈阳: 东北大学, 1996)
- [2] Ji H G, Cai M F. Recognition characterization of acoustic emission self-similarity in concrete fracturing. *Chin J Rock Mech Eng*, 1999, 18(2): 157
(纪洪广, 蔡美峰. 混凝土材料断裂的声发射自相似性识别特征. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(2): 157)
- [3] Li S L, Yin X G, Wang Y J, et al. Study on acoustic emission characteristics of uniaxial compressive rock failure. *Chin J Rock Mech Eng*, 2004, 23(15): 2499
(李庶林, 尹贤刚, 王泳嘉, 等. 单轴受压岩石破坏全过程声发射特征研究. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(15): 2499)
- [4] Li S L, Tang H Y. Acoustic emission characteristics in failure process of rock under different uniaxial compressive loads. *Chin J Geotech Eng*, 2010, 32(1): 147
(李庶林, 唐海燕. 不同加载条件下岩石材料破裂过程的声发射特性研究. 岩土工程学报, 2010, 32(1): 147)
- [5] Lin F, Li S L, Xue Y L, et al. Study of number of acoustic emission with gray model in compression of concrete. *J Archit Civ Eng*, 2008, 25(3): 42
(林峰, 李庶林, 薛云亮, 等. 混凝土受压过程中声发射数的灰色模型研究. 建筑科学与工程学报, 2008, 25(3): 42)
- [6] Ji H G. *Some Problems on Parameter Statistics in Rock Mechanics*. Beijing: China Coal Industry Press, 2004
(纪洪广. 混凝土材料声发射性能研究与应用. 北京: 煤炭工业出版社, 2004)
- [7] Ji H G, Pei G W, Shan X Y. Technique of acoustic emission for concrete material. *Appl Acoust* 2002, 21(4): 1
(纪洪广, 裴广文, 单晓云. 混凝土材料声发射技术研究综述. 应用声学, 2002, 21(4): 1)
- [8] Ohtsu M. Acoustic Emission characteristics in concrete and diagnostic application. *J Acoust Emiss*, 1987, 6(2): 99
- [9] Ohtsu M. Rate process analysis of acoustic emission activity in core test of concrete. *Concr Lib JSCE*, 1992, 20: 143
- [10] Suzuki T, Ohtsu M. Quantitative damage evaluation of structural concrete by a compression test based on AE rate process analysis. *Constr Build Mater*, 2004, 18(3): 197
- [11] Dai S T, Labuz J F. Damage and failure analysis of brittle materials by acoustic emission. *J Mater Civ Eng*, 1997, 9(4): 200
- [12] Ji H G, Cai M F. Coupling constitutive relation between AE parameter and stress-strain and its application. *Chin J Rock Mech Eng*, 2003, 22(2): 227
(纪洪广, 蔡美峰. 混凝土材料声发射与应力-应变参量耦合关系及应用. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(2): 227)
- [13] Zhu H P, Xu W S, Chen X Q, et al. Quantitative concrete-damage evaluation by acoustic emission information and rate-process theory. *Eng Mech*, 2008, 25(1): 186
(朱宏平, 徐文胜, 陈晓强, 等. 利用声发射信号与速率过程理论对混凝土损伤进行定量评估. 工程力学, 2008, 25(1): 186)
- [14] Zhang M, Li Z K, Yang Q, et al. Damage model and statistical analysis of acoustic emission for quasi-brittle materials. *Chin J Rock Mech Eng*, 2006, 25(12): 2493
(张明, 李仲奎, 杨强, 等. 准脆性材料声发射的损伤模型及统计分析. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(12): 2493)
- [15] Lemaitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *J Eng Mater Technol*, 1985, 107(1): 83
- [16] Yang M H, Zhao M H, Cao W G. Method for determining the parameters of statistical damage softening constitutive model for rock. *J Hydraul Eng*, 2005, 36(3): 345
(杨明辉, 赵明华, 曹文贵. 岩石损伤软化统计本构模型参数的确定方法. 水利学报, 2005, 36(3): 345)
- [17] Cao W G, Zhao M H, Liu C X. Study on the model and its modifying method for rock softening and damage based on Weibull random distribution. *Chin J Rock Mech Eng* 2004, 23(19): 3226
(曹文贵, 赵明华, 刘成学. 基于 Weibull 分布的岩石损伤软化模型及其修正方法研究. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(19): 3226)
- [18] Xu W Y, Wei L D. Study on statistical damage constitutive model of rock. *Chin J Rock Mech Eng*, 2002, 21(6): 787
(徐卫亚, 韦立德. 岩石损伤统计本构模型的研究. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(6): 787)
- [19] Yang S Q, Xu W Y, Wei L D, et al. Statistical constitutive model for rock damage under uniaxial compression and its experimental study. *J Hohai Univ Nat Sci*, 2004, 32(2): 200
(杨圣奇, 徐卫亚, 韦立德, 等. 单轴压缩下岩石损伤统计本构模型与试验研究. 河海大学学报: 自然科学版, 2004, 32(2): 200)
- [20] Li S C, Xu J, Li K G, et al. Study on damages constitutive model of rocks based on Weibull distributing. *J Hunan Univ Sci Technol Nat Sci Ed*, 2007, 22(4): 65
(李树春, 许江, 李克钢, 等. 基于 Weibull 分布的岩石损伤本构模型研究. 湖南科技大学学报: 自然科学版, 2007, 22(4): 65)
- [21] Xue Y L, Li S L, Lin F, et al. Study of damage constitutive model of SFRC considering effect of damage threshold. *Rock Soil Mech* 2009, 30(7): 1987
(薛云亮, 李庶林, 林峰, 等. 考虑损伤阈值影响的钢纤维混凝土损伤本构模型研究. 岩土力学, 2009, 30(7): 1987)