

# 基于多因子 DTQTSM 模型的 动态利率期限结构研究

操君<sup>a</sup>, 吴吉林<sup>b</sup>, 江百灵<sup>c</sup>

(厦门大学 a.王亚南经济研究院 b.金融系 c.会计系, 福建 厦门 361005)

**摘要:**文章首次把离散时间下多因子二次形式的利率期限结构模型应用于上交所国债期限的研究,运用扩展的卡尔曼滤波法及拟极大似然法估计模型参数,并比较了常数型、仿射型和二次方市场风险函数对实际利率期限结构模型的拟合。发现在二次方利率期限结构模型下,二次方市场风险函数对1年期利率拟合的最好;对2年期利率的拟合,常数型和仿射型比二次方型表现更佳;而对3、4、5年期利率期的拟合,仿射模型表现最好。

**关键词:**二次方利率期限结构模型;扩展的卡尔曼滤波法;市场风险价格

**中图分类号:**F832.5 **文献标识码:**A **文章编号:**1002-6487(2009)12-0122-03

## 0 引言

近年来,随着复杂金融衍生品定价模型及实证计量方法的迅速发展,利率期限结构的研究成为金融学的主要研究领域之一。发达国家对利率期限结构的研究已经日趋成熟完善,许多动态模型能较好的反映其利率特征。但中国债券市场起步较晚,许多方面处在发展阶段,并且受国家政策影响较大。但随着我国金融体制改革的深入和完善,债券的市场化步伐逐步加快。自从1981年恢复国债发行以来,我国债券市场无论是从一级市场的发行规模、发行方式、发行品种和发行结构来看,还是从二级市场的组织形式、交易制度、参与者结构和交易品种来看都取得了较大的发展。2007年,我国债券发行量突破3.7万亿,债券发行人范围包括财政部、铁道部、政策性银行、商业银行、非银行金融机构、国际开发机构和企业等各类市场参与主体,债券种类日趋多样化,信用层次更加丰富。债券的期限从3个月到30年不等,发行品种包括国债、政策性金融债、央行票据、银行次级债、一般性金融债和企业债券等。交易类型包括现债交易、远期交易、质押式回购、开放式回购。并在银行间债券市场中引入了做市商制度,债券利率和交易价格主要依靠市场形成。因此,我国债券市场发展的现状能较好的满足利率期限结构研究的要求,也基本能满足样本数据要求。在这种情况下,研究中国的动态利率期限结构具有以下重要意义。本文引进一种新的动态利率期限结构模型:离散时间的二次方利率期限结构模型来研究中国国债市场收益率特征。QTSMs模型既能克服单因子模型和多因子仿射模型的缺陷,而且大大减少了限制性假设,拟合的效果要好于仿射模型。

## 1 离散时间下多因子 QTSMs 模型

本文在 Realdon 的基础上给出了离散时间的 QTSMs 模型。离散时间的 QTSMs 模型不仅能抓住利率期限结构中的

非线性,在状态变量方差和相关性设定方面也具有灵活性,并且能保持名义利率的非负性。即使是考虑状态变量间存在相关性,也能得到封闭解。另外,市场风险价格函数形式的选取上也不拘于仿射型,可以扩展到各种多项式形式。具体模型介绍如下:

设  $P_t^n$  为过  $n$  期到期的零息票债券在  $t$  时的价格,每期时间长度  $\Delta=1$ ,因此该债券在绝对时间  $n+t$  时到期。设下一期到期的无风险利率在  $t$  时为  $r_t$ , 设  $Q$  为风险中性测度,并用  $E_t^Q$  表示风险中性测度  $Q$  下在  $t$  时的条件期望,根据风险中性测度下的无套利定价公式得:

$$P_t^n = E_t^Q[\exp(-r_t) \cdot P_{t+1}^{n-1}] \quad (1)$$

定义 1:二次方利率期限结构模型(QTSMs)下  $r_t = \alpha + \beta'X_t + X_t' \Psi X_t$  (2)

定义 2:在风险中性测度  $Q$  下,状态变量为一个矢量自回归 VAR(1)过程:

$$X_{t+1} = (I - \phi)X_t + \phi\mu + \sum \xi_{t+1}, \xi_{t+1} \sim N(0, I) \quad (3)$$

在(2)、(3)中,  $\alpha$  为标量,  $\beta, X_t$  和  $\mu$  为  $N \times 1$  的矢量,  $I$  为  $N \times N$  单位矩阵,  $\Psi$  为  $N \times N$  对称矩阵,  $\phi, \Sigma$  为  $N \times N$  矩阵。

Ahn, Dittmar & Gallant 推导出连续时间下二次方利率期限结构对应的零息票债券价格为状态变量的指数二次方形式,由于连续时间下的债券价格是当  $\Delta \rightarrow 0$  时离散时间下债券价格的极限,所以猜测离散时间下零息票债券价格  $P_t^n$  也为状态变量  $X_t$  的指数二次方函数即:  $P_t^n = \exp(A_n + B_n'X_t + X_t' C_n X_t)$  (4)

把(2)、(4)代入(1)可知:

$$\begin{aligned} \exp(A_n + B_n'X_t + X_t' C_n X_t) &= E_t^Q[\exp(-(\alpha + \beta'X_t + X_t' \Psi X_t)) \\ &\exp(A_{n-1} + B_{n-1}'X_{t+1} + X_{t+1}' C_{n-1} X_{t+1})] \end{aligned} \quad (5)$$

(5)可重写为:

$$\begin{aligned} A_n + B_n'X_t + X_t' C_n X_t &= -\alpha - \beta'X_t - X_t' \Psi X_t + A_{n-1} + B_{n-1}'((I - \phi)X_t + \phi\mu) \\ &+ ((I - \phi)X_t + \phi\mu)' C_{n-1} ((I - \phi)X_t + \phi\mu) + \ln E_t^Q[\exp(B_{n-1}' + 2X_t'(I - \phi)' C_{n-1} + 2 \\ &(\phi\mu)' C_{n-1}) \sum \xi_{t+1} + \xi_{t-1}' \sum' C_{n-1} \xi \sum_{t+1}] \end{aligned} \quad (6)$$

在上式中,

$$\ln E_t^0 [\exp(B_{n-1} + 2X_t(I-\phi)'C_{n-1} + 2(\phi\mu)'C_{n-1}) \sum \xi_{t+1} + \xi_{t-1} \sum C_{n-1} \sum \xi_{t+1}]$$

$$= \ln \frac{|\gamma|}{|\text{abs}|\Sigma|} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N ((B_{n-1} + 2X_t(I-\phi)'C_{n-1} + 2(\phi\mu)'C_{n-1})\gamma_i)^2 \quad (7)$$

$\gamma_i$  是  $N \times N$  矩阵  $\gamma = ((\Sigma \Sigma')^{-1} - 2C_{n-1})^{-1/2}$  的第  $i$  列。从(6)、(7)推导出  $A_n, B_n, C_n$  的递归方程如下:

$$A_n = -\alpha + A_{n-1} + B_{n-1}'\phi\mu + (\phi\mu)'C_{n-1}\phi\mu + \ln \frac{|\gamma|}{|\text{abs}|\Sigma|} + \frac{1}{2} \sum_j (B_{n-1}'\gamma_j B_{n-1} \gamma_j + B_{n-1}'\gamma_j 2(\phi\mu)'C_{n-1}\gamma_j + 2(\phi\mu)'C_{n-1}\gamma_j B_{n-1} \gamma_j + 2(\phi\mu)'C_{n-1}\gamma_j^2)$$

$$B_n = -\beta' + B_{n-1}'(I-\phi) + 2(\phi\mu)'C_{n-1}(I-\phi) + \sum_i (B_{n-1}'\gamma_i (C_{n-1}\gamma_i)'(I-\phi) + B_{n-1}'\gamma_i \gamma_i' C_{n-1}(I-\phi) + 4(\phi\mu)'C_{n-1}\gamma_i \gamma_i' C_{n-1}(I-\phi))$$

$$C_n = -\Psi + (I-\phi)'C_{n-1}(I-\phi) + 2 \sum_i (I-\phi)'C_{n-1}\gamma_i \gamma_i' C_{n-1}(I-\phi)$$

由  $P_t^1 = E_t^0[\exp(-r_t)P_{t+1}^0]$  和  $P_{t+1}^0 = 1$  可知初始条件

$$A_0 = 0 \quad B_0 = 0 \quad C_0 = 0 \quad A_1 = -\alpha \quad B_1 = -\beta \quad C_1 = -\Psi$$

根据上述递归方程及初始条件,可以逐一得到  $A_n, B_n$  和  $C_n$  的表达式。另外,设  $R_t^n$  为到期收益率,其上标  $n$ 、下标  $t$  和  $P_t^n$  中的含义一样。由定义  $R_t^n = -\frac{1}{n} \ln P_t^n$  得:

$$R_t^n = \frac{1}{n} (-A_n - B_n X_t - C_n X_t) \quad (8)$$

上述的推导在风险中性测度下进行的,但真正的金融定价是考察现实世界中的风险市场价格,所以引入实际测度用表示,依照 Ang&Piazzesi,假设 Radon-Nykodim 导数为

$$\frac{dP}{dQ} = \exp(\xi_{t+1} f(X_t) - \frac{1}{2} f(X_t)' f(X_t))$$

其中  $f(X_t)$  为  $N \times 1$  的矢量,因此  $\xi_{t+1}$  在实际测度  $P$  下的条件概率密度函数为

$$P(\xi_{t+1}) = Q(\xi_{t+1}) \frac{dP}{dQ} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}} \exp(-\frac{1}{2} \xi_{t+1}' \xi_{t+1} + \xi_{t+1}' f(X_t) - \frac{1}{2} f(X_t)' f(X_t))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}} \exp(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\xi_{t+1,i} - f(X_t)_i)^2) \quad (9)$$

因此实际测度下状态变量  $X_t$  自回归过程为

$$X_{t+1} = (I-\phi)X_t + \phi\mu + \sum (f(X_t) + \xi_{t+1}) = (I-\phi)X_t + \phi\mu + \sum f(X_t) + \sum \xi_{t+1} \quad (10)$$

从(9)、(10)可知  $f(X_t)$  实际为市场风险价格(MPR)。并且在  $t$  时  $f(X_t)$  为常数,  $X_{t+1}$  仍服从条件正态分布。因此只要满足无套利条件,  $f(X_t)$  的函数形式选择范围很自由。

## 2 计量方法

二次方利率期限结构模型的估计方法较多,但由于状态变量的不可观测性、到期收益率  $R_t^n$  与状态变量  $X_t$  间的非线性以及状态变量  $X_t$  自回归方程本身存在非线性的可能,本文选取扩展的卡尔曼滤子法来估计模型参数。由于其良好的性质,卡尔曼滤子在利率期限结构中得到了广泛的应用。令  $R_t = (R_t^{n_1}, R_t^{n_2}, \dots, R_t^{n_m})'$  为到期收益率,  $\varepsilon_t = (\varepsilon_t^{n_1}, \varepsilon_t^{n_2}, \dots, \varepsilon_t^{n_m})'$  为测量误差并且服从正态分布,  $\xi_{t-1}, \Omega_{t-1}$  分别为  $X_t$  在  $t-1$  时条件期望与条件方差。由(8)和(10)可得扩展的卡尔曼滤子的测量方程和过渡方程:

$$R_t = A + HX_t + \varepsilon_t, \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_t') = D$$

$$X_{t+1} = C + FX_t + \sum \xi_{t+1}, \xi_{t+1} \sim N(0, I)$$

对于模型估计先用卡尔曼滤子预测最优下一期收益率,得到相应预测误差,并计算预测误差的方差,从而得到相应的极大似然函数。用状态因子的无条件均值和方差作为卡尔曼滤子的初始值。其中状态因子均值和方差更新方程如下:

$$\xi_{t+1|t} = \phi\mu + (I-\phi)\xi_{t|t-1} + (I-\phi)\Omega_{t-1}B'F_{t-1}^{-1}(R_t - R_{t|t-1})$$

$$\Omega_{t+1|t} = (I-\phi)(I-\Omega_{t|t-1}B'F_{t-1}^{-1}B)\Omega_{t|t-1}(I-\phi)' + \Sigma \Sigma' \quad (11)$$

其中  $F_{t-1} = B\Omega_{t-1}B' + D$ , 设预测误差为  $v_t$  并服从正态分布,因此

$$v_t \sim N(R_t - R_{t|t-1}, F_{t-1})$$

定义所有待估计参数集合为  $\theta$ , 最优化以下极大似然函数

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^T l(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T [N \ln(2\pi) + \ln(|F_{t-1}|) + (R_t - R_{t|t-1})' F_{t-1}^{-1} (R_t - R_{t|t-1})]$$

$$\text{并且 } \sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \sim N(0, \hat{H}^{-1}(\hat{\theta})V(\hat{\theta})\hat{H}^{-1}(\hat{\theta})), \hat{H}(\hat{\theta}) \approx -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \theta'} l(\hat{\theta}, F_t), \hat{V}(\hat{\theta}) \approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial l(\hat{\theta}, F_t)}{\partial \theta} \frac{\partial l(\hat{\theta}, F_t)}{\partial \theta'}$$

由于状态变量  $X_t$  不可观测,为了能确保所估计参数的唯一可辨认性,必须对 QTSMs 模型进行限制。Ahn, Dittmar & Gallant 给出了在连续时间下 QTSMs 参数的可辨认条件,这里给出类似的离散时间下的参数可辨认条件。(1)  $\Psi, \Sigma$  和  $\phi$  都为对角矩阵。(2) 名义利率  $r_t = \alpha + \beta X_t + X_t' \Psi X_t$  的非负数性要求  $\alpha \geq \frac{1}{4} \beta' \Psi^{-1} \beta$ , 为了便于模型的可估计性,设  $\alpha \geq 0, \beta = 0$ 。

## 3 实证结果与分析

本文考察上交所 2005 年 1 月 7 日到 2008 年 9 月 5 日,共计 179 周的 1、2、3、4 和 5 年期的国债利率期限结构,数据经过多项式样条法处理得到。主成份分析显示三因子可以解释上交所利率期限结构变化的 98.5%,因此本文中选用三状态变量即  $X_t = (x_{1t}, x_{2t}, x_{3t})'$ 。对于市场风险函数,本文分别选取常数型  $f(X_t) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)'$ , 仿射型  $f(X_t) = (\lambda_1 x_{1t}, \lambda_2 x_{2t}, \lambda_3 x_{3t})'$  和二次方型  $f(X_t) = (\lambda_1 x_{1t}^2, \lambda_2 x_{2t}^2, \lambda_3 x_{3t}^2)'$ 。表 1 给出了参数估计结果,极大似然值,括号内为值。其中模型 1、模型 2 和模型 3 分别对应市场风险函数为常数型、仿射型和二次方型下的参数估计。 $\Psi_i (i=1,2,3)$  为  $\Psi$  的对角线元素,  $\phi_i, u_i, \sigma_i, \lambda_i (i=1,2,3)$  决定第  $i$  个状态变量的运动,  $\mu_i$  表示风险中性测度下第  $i$  个状态变量的无条件均值,在模型 1 和模型 2 中,  $\mu_i$  都为正数,而在模型 3 中,  $\mu_1, \mu_3$  为正数,而  $\mu_2$  为负数。 $1-\phi$  为状态变量滞后一阶系数。无论在模型 1、模型 2 还是模型 3 下,  $1-\phi$  的对角线都接近于 1,说明三状态变量因子的影响较持久。 $\sigma_i$  为  $\Sigma$  的第  $i$  个对角线元素。在三个模型中,第一个市场风险价格系数  $\lambda_1$  都

表 1 离散时间三因子二次方模型参数估计

| 参数   | $\alpha$         | $\Psi_1$          | $\Psi_2$            | $\Psi_3$            | $\phi_1$          | $\phi_2$         | $\phi_3$         | $\mu_1$          |
|------|------------------|-------------------|---------------------|---------------------|-------------------|------------------|------------------|------------------|
| 模型 1 | 0.0052<br>(1.19) | 0.0231<br>(53.22) | -0.0025<br>(-32.34) | 0.0000<br>(0.04)    | 0.0289<br>(99.76) | 0.0061<br>(5.76) | 0.0135<br>(0.04) | 0.0112<br>(6.65) |
| 模型 2 | 0.0028<br>(0.97) | 0.0023<br>(42.65) | -0.0011<br>(-10.47) | 0.0348<br>(5.85)    | 0.0046<br>(32.33) | 0.0056<br>(7.21) | 0.0235<br>(2.32) | 0.0101<br>(5.06) |
| 模型 3 | 0.0045<br>(0.84) | 0.0733<br>(68.25) | 0.0400<br>(21.90)   | -0.0876<br>(-27.89) | 0.0427<br>(43.62) | 0.0034<br>(8.86) | 0.0472<br>(3.36) | 0.1021<br>(3.81) |

| $\mu_2$            | $\mu_3$          | $\sigma_1$        | $\sigma_2$        | $\sigma_3$       | $\lambda_1$        | $\lambda_2$      | $\lambda_3$       | lnL    |
|--------------------|------------------|-------------------|-------------------|------------------|--------------------|------------------|-------------------|--------|
| 0.0113<br>(2.23)   | 0.0356<br>(7.91) | 0.0672<br>(56.84) | 0.0429<br>(16.14) | 0.0000<br>(0.00) | -0.0657<br>(-5.41) | 0.0362<br>(0.05) | 0.0058<br>(3.27)  | 5199.7 |
| 0.0297<br>(3.54)   | 0.0295<br>(6.21) | 0.0014<br>(0.68)  | 0.0640<br>(20.69) | 0.0405<br>(4.69) | -0.0223<br>(-2.70) | 0.0230<br>(9.12) | 0.0182<br>(5.73)  | 5343.7 |
| -0.0134<br>(-2.48) | 0.0205<br>(3.41) | 0.0462<br>(20.54) | 0.0357<br>(9.06)  | 0.0411<br>(5.20) | -0.0634<br>(-3.06) | 0.0276<br>(6.51) | 0.0179<br>(12.79) | 5372.8 |

为负,而其余两市场风险价格系数  $\lambda_2, \lambda_3$  都为正。

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\hat{R}_{t-1}^n - R_t^n)^2}$$

大小的均方误差来比较不同市场风险函数对上交所国债利率期限结构的拟合效果,  $\hat{R}_{t-1}^n$  表示期限为  $n$  的即期利率在  $t-1$  时期对  $t$  期的预测值。表 2 给出了各模型对实际利率的拟合能力。从 1 年期均方根误差可知,模型 3 拟合的最好,其次是

表 2 各模型均方根误差 (单位:万分之一)

| 期限(年) | 模型 1    | 模型 2    | 模型 3    |
|-------|---------|---------|---------|
| 1     | 40.7231 | 45.7927 | 35.7265 |
| 2     | 19.8744 | 19.4561 | 25.4379 |
| 3     | 14.9503 | 12.0185 | 22.5810 |
| 4     | 14.4887 | 10.5641 | 20.6947 |
| 5     | 16.1930 | 11.1705 | 17.6780 |

模型 1,最后是模型 2。由于 1 年期利率的波动较大,存在较多的突变,因此市场风险也变化较快。二次方市场风险价格能够较好的反应市场风险的非线性变化。另外,从 1 年期实际利率和拟合利率图上也可以看出,模型 3 比模型 1 和模型 2 对实际 1 年期利率拟合的要好。从表 2 中可知,模型 1 和模型 2 对 2 年期实际利率的预测误差相差不多,但模型 3 表现较差。从图中发现,模型 3 的拟合能力在大多数的时间里并不比模型 1 和模型 2 差,但两个较大的跳跃对均方根误差影响较大,所以影响了模型的综合拟合能力。对于 3、4、5 年期的实际利率的拟合,模型 2 表现最佳,模型 1 其次,而模型 3 的表现也最差。这里一部分原因

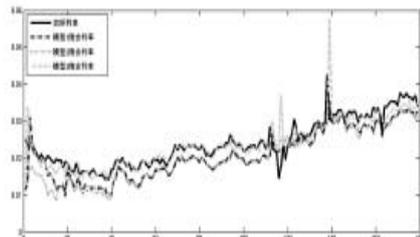


图 1 一年期实际利率和模型拟合利率比较

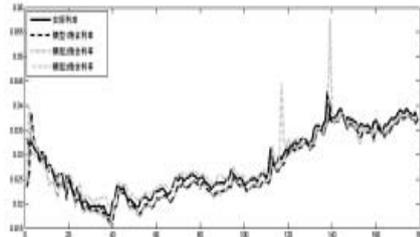


图 2 二年期实际利率和模型拟合利率比较

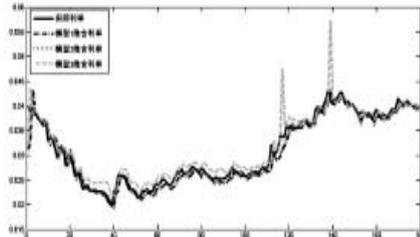


图 3 三年期实际利率和模型拟合利率比较

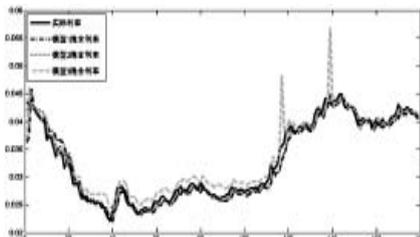


图 4 四年期实际利率和模型拟合利率比较

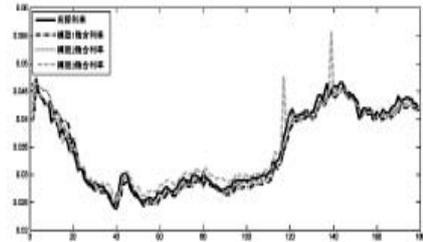


图 5 五年期实际利率和模型拟合利率比较

是随着利率期限的变长,利率曲线变得较光滑,波动也较小,市场价格风险接近线性或常数,因此二次方型不能再较好的反应市场风险价格的变化;另外一方原因是仿射型市场风险函数  $f(X_t) = (\lambda_1 X_{1t}, \lambda_2 X_{2t}, \lambda_3 X_{3t})'$  是状态变量的线性函数,因此能随着状态变量正负方向的改变而改变,而二次方市场风险函数  $f(X_t) = (\lambda_1 X_{1t}^2, \lambda_2 X_{2t}^2, \lambda_3 X_{3t}^2)'$  和常数型的市场风险价格  $f(X_t) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)'$  不能随着状态变量正负方向的改变而改变,因此模型 2 的拟合能力更佳。

实际利率和模型隐含利率图如示:

#### 4 结论

本文把离散时间二次方形式的利率期限结构模型应用于上交所国债期限的研究,运用扩展的卡尔曼滤波法及极大似然法估计该模型参数,发现二次方型模型能基本反映上交所 2005 年 1 月 7 日到 2008 年 9 月 5 日利率期限结构变化特征。并比较了常数型、仿射型和二次方型市场风险函数对实际利率期限结构模型的拟合效果。在二次方利率期限结构模型下,二次方市场风险函数对 1 年期利率拟合的最好;对 2 年期利率的拟合,常数型和仿射型表现相当,都比二次方型市场风险函数拟合的更佳;而对 3、4、5 年期利率期的拟合,仿射型市场风险函数表现最好。

#### 参考文献:

- [1]AhnD,DittmarR,GallantR.Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence[J]. The Review of Financial Studies,2002,(15).
- [2]AngA,PiazziM. A Non-arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variable[J]. Journal, of Monetary Economics,2003,(50).
- [3]BollerslevTP ,WooldridgeJM. Quasi maximum Likelihood Estimation of Dynamic Models with Time Varying Covariances [J]. Econometric Review ,1992,(11).
- [4]Realdon M. Quadratic Term Structure Models in Discrete Time[J]. Financial Research Letters,2006,(3).
- [5]范龙振.上交所债券利率期限结构与两因子 Vasicek 模型[J].复旦学报(自然科学版),2003,(5).
- [6]洪永森,林海.中国市场利率动态研究—基于短期国债回购利率的实证分析[J].经济学(季刊),2006,(2).
- [7]马晓兰,潘冠中.单因子利率期限结构模型的广义距估计及对中国货币市场的实证检验[J].数量经济技术经济研究,2006,(1).
- [8]李和金,郑兴山,李湛.非参数利率期限结构模型的实证分析 [J]. 上海交通大学学报,2003,(4).
- [9]吴冲锋,王海成,吴文锋.金融工程研究[M].上海:上海交通大学出版社,2000.

(责任编辑/浩 天)