

应用信噪比理论分析三维转动角神经网络模型的存储容量*

郑金成 帅建伟 陈振湘
刘瑞堂 吴伯信

厦门大学物理系, 厦门 361005

* 国家自然科学基金资助项目

关键词 神经网络 三维转动角 信噪比理论 存储容量

人工神经网络是最近发展起来的十分热门的交叉学科, 它涉及到生物、电子、计算机、数学和物理等学科, 有着非常广泛的应用前景. 本文讨论的是一类多值神经网络模型——Q 态三维转动角神经网络模型的存储容量. 该模型是 Hopfield 神经网络模型^[1]、四态复数神经网络模型^[2]、复相角神经网络模型^[3]和多态四元数神经网络模型^[4]的推广, 具有一定的理论研究价值; 可以在灰度或彩色图像识别中得到应用.

我们把三维转动引入神经网络, 每个神经元表示一个转动操作, 令神经元为

$$T = Q(\vec{n}, \theta_0) = \cos(\theta_0) + \sin\theta_0(\vec{i} \cos\theta_1 + \vec{j} \cos\theta_2 + \vec{k} \cos\theta_3)$$

其中 \vec{n} 表示神经元的旋转轴; θ_0 表示神经元的旋转角, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 表示三坐标轴基矢, 这里令旋转角 $0 \leq \theta_0 < 2\pi$, 方向角 $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi$, 坐标轴基矢之间的转换关系为:

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = -1, \quad \vec{i}\vec{j} = -\vec{j}\vec{i} = \vec{k}, \\ \vec{j}\vec{k} = -\vec{k}\vec{j} = \vec{i}, \quad \vec{k}\vec{i} = -\vec{i}\vec{k} = \vec{j}$$

神经元的取值在方向角构成 4π 的立体角域 q_m 等分; 在旋转角 θ_0 上, 把 0 到 2π 角度 q_0 等分, 三维转动角神经元为 $q_0 \times q_m$ 态神经元.

设网络有 N 个三维转动角神经元 T , 存储 M 个记忆模式 $T^u (u = 1, 2, \dots, M)$. 我们写为 $T^u = T^u = |u\rangle$, 为一基态矢, 其中 $| \rangle$ 为 Dirac 符号. 连接矩阵表示为由基矢构成的投影算符之和 $J = \sum_{u=1}^M |u\rangle\langle u|$. 其有效局域场为:

$\langle H \rangle = J|T\rangle$. 对任一输入态网络的动力学方程为:

$|T+1\rangle = \Theta|H\rangle = \Theta|h\rangle$ 输出的取值规则一般设为把某一转动操作范围内的所有转动操作映射到某一神经元的转动操作. 其几何意义是: 神经元把转动操作经输出函数作用后, 映射到 $q_0 \times q_m$ 个三维空间离散转动态的最近邻

态上.

我们应用信噪比理论对三维转动角神经网络模型的存储容量进行分析, 令 $|t\rangle = T^u = |v\rangle$, 得 $H = J|v\rangle = N$

$|v\rangle + \sum_{u \neq v}^M |u\rangle\langle u|v\rangle$. 得到每个神经元正确迭代的几率为:

$$P = (1 - \frac{4\wedge}{\pi} \int_{r_0}^{\infty} f(r)dr) \times (1 - \frac{4\wedge'}{\pi} \int_{r_{30}}^{\infty} f(r)dr);$$

其中 \wedge, \wedge' 均为常数; $f(r)$ 为正态分布函数, $r_0 = N \sin(\pi/q_0)$, $r_{30} = 2N\sqrt{(1/q_m) - (1/q_m^2)}$; N 为神经元个数. 出错的几率为: $\rho = 1 - P$. 我们假设出错的几率满足泊松分布, 即: N 个神经元能够稳定存储图像的条件为 $\exp(-N\rho) \rightarrow 1$. 经过计算得到网络的存储容量为:

$$\alpha \approx \frac{4(\frac{1}{q_m} - \frac{1}{q_m^2}) \sin^2 \frac{\pi}{q_0}}{2 \ln N}$$

其中 q_0 为旋转角域的个数, q_m 为方向立体角域的个数, 存储容量随着神经元离散转动态的个数 $q_0 \times q_m$ 的增大而减小.

当 $q_0 = q_m = 2$ 时, 即是 Hopfield 神经网络模型^[1], 它的存储容量为 $\alpha \approx (1/2 \ln N)$;

当 $q_m = 2, q_0$ 任取时, 即是复相角神经网络模型^[3], 它的存储容量为 $\alpha \approx \frac{\sin^2 \frac{\pi}{q_0}}{2 \ln N}$;

当 $q_0 = 2, q_m = 8$ 时, 即可得到十六态四元数神经网络模型^[4], 它的存储容量为 $1/4 \ln N$.

从转动角度来看, 双极型 Hopfield 模型是一维转动模型; 复相角模型是二维转动模型, 这里提出了三维转动角模型; 沿此思路, 从理论上我们似乎可统一提出 K 维转动神经网络模型, 对于具体的高维模型有待于进一步的探讨.

(1995 年 11 月 16 日收到)

- 1 Hopfield, J J. *Proc. Natl. Acad. Sci. U S A* 1982; **79**: 2554-2558
- 2 Zhou Changhe, Liu Liren. *Opt. Commun.* 1993, **103**: 29-32
- 3 Noest, A J. *Phys. Rev. A*, 1988; **38**(4): 2196-2199
- 4 帅建伟等. 厦门大学学报. 1995; **34**(3): 353-357
- 5 郑金成等. 自然杂志, 1995, **17**(5): 301-302

Analysis of Storage Capacity of 3-Dimension Rotation Angle Neural Network Using Signal-to-Noise Theory
Zheng Jin-cheng Shuai Jian-wei Chen Zhen-xiang
Liu Rui-tang Wu Bo-xi

Department of Physics, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005

Key words neural network; three-dimension rotation angle; signal-to-noise theory; storage capacity