

应用信噪比理论分析复相角神经网络的存储容量*

郑金成 帅建伟 陈振湘 刘瑞堂 吴伯僖

(厦门大学物理系 厦门 361005)

摘 要

本文应用信噪比理论分析了复相角神经网络模型的存储容量。分析和研究结果表明,当神经元转动态的数目很小时,模型的存储容量与 Hopfield 神经网络模型的存储容量相同;当神经元转动态的数目很大时,存储容量与神经元转动态数目的平方成反比。

关键词 神经网络, 复相角, 信噪比理论, 存储容量

1 前 言

当前人工神经网络的研究主要围绕网络的基本特性和模型结构、网络的工程应用以及它的硬件实现等方面来进行。其中有关图像识别的神经网络模型的理论研究和工程应用研究是一个很活跃并很有意义的领域。对于多值图像识别的研究,国内外许多学者做了大量的工作^[1~5]。本文应用信噪比理论对 Q 态复相角神经网络模型^[1]的存储容量进行了详细的讨论。复相角模型能够模拟生物神经网络、电子极限环振荡器的某些性质,可用来处理具有循环值域的信号,如图像中的边缘定向或光流方向,或探测器阵列所探测的波相位图;也可以应用于彩色或灰度图像的识别。从光神经网络的技术实现来看,利用光束的相角对信息进行编码,也是具有吸引力的。这是复相角神经网络在应用方面的优点。从理论方面看,复相角模型是著名的 Hopfield 神经网络模型^[6]和四态复数神经网络模型^[2]的推广。

2 复相角神经网络模型

Noest 把平面转动引入神经网络^[1],每个神经元表示一个转动操作,令神经元为

$$S = Q(n\alpha + \beta) = \cos(n\alpha + \beta) + i \sin(n\alpha + \beta) \equiv [n]. \quad (1)$$

其中 $\alpha = 2\pi/q$, q 为正整数, $n = 0, 1, \dots, q-1$. 亦即神经元的取值为 q 个平面离散转动态 $Q(n\alpha + \beta)$, 而 β 为最小转动角,并把神经元的状态简记为 $[n]$ 。设网络有 N 个复相角神经元 S , 存储 M 个记忆模式 $S^u (u = 1, 2, \dots, M)$ 。其矩阵表示为:

* 国家自然科学基金重点项目 (19334032) 资助课题。

收稿日期: 1995-06-26

修改日期: 1995-11-10

$$J_{ij} = \sum_{u=1}^M S_i^u (S_j^u)^*, \quad (2)$$

其中 $(S_j^u)^*$ 表示取 S_j^u 的共轭, 且有 $i, j = 1, 2, \dots, N$. 则其有效局域场为:

$$H_i = \sum J_{ij} S_j, \quad (3)$$

该有效局域场 H_i 实际上为一合成转动。可以把有效局域场转换为归一化有效局域场:

$$h_i = \cos(x_i \alpha_i + \beta_i) + i \sin(x_i \alpha_i + \beta_i) = [x_i]. \quad (4)$$

这里把归一化有效局域场简记为 $[x_i]$, x_i 为实数, $x_i \alpha_i + \beta_i$ 表示合成转动角的大小。当用 Θ 表示输出函数时, 对任一输入态网络的动力学方程为:

$$S_i(t+1) = \Theta H_i = \Theta h_i. \quad (5)$$

输出函数的取值规则一般设在把某一转动操作范围内的所有转动操作映射到某一神经元的转动操作上。即设第 i 个神经元的归一化有效局域场为 $h_i(t) = [x_i]$, 则神经元输出为:

$$S_i(t+1) = [n_i]. \quad (6)$$

当且仅当 $-\frac{1}{2} \leq (n_i - x_i) \leq \frac{1}{2}$ 时, 这里有 $n_i = 0, 1, \dots, q-1$. 其几何意义是: 神经元把转动操作经输出函数作用后, 映射到 q 个平面离散转动态的最近邻态上。

3 存储容量分析

下面我们应用信噪比理论分析当神经元个数 N 较大时复相角神经网络模型的存储容量。

令 $S(0) = S^v$, 求其有效局域场为:

$$H_i = N \exp(i\theta_i^v) + K \exp(i\omega), \quad (7)$$

其中 N 表示向态 S^v 迭代的权重, K 为噪声项的模, 平均值为 0, 均方差 $\sigma = \sqrt{N(M-1)}$, 具有正态分布:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \quad (8)$$

角度 ω 在 $(0, 2\pi)$ 范围内均匀分布。由于该模型具有旋转对称性, 不失一般性, 可设 $\theta_i^v = 0$, 则得

$$H_i = N + K \exp(i\omega). \quad (9)$$

从图形上来看, N 表示在 x 轴 (实轴) 上的 \overrightarrow{OA} 矢量。 $K \exp(i\omega)$ 表示长度为 r , 且与 x 轴夹角为 ω 的 \overrightarrow{AB} 矢量。 H_i 即是矢量 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ 。要使神经元能够正确迭代, 即 $\Theta H_i = [0]$, 也即是点 B 落在张角为 $+\pi/q$ 与 $-\pi/q$ 的扇形 COD 之内。如图 1 所示的 \overrightarrow{OB} 矢量。 $\Theta H_i = [0]$ 的几率 (即神经元能够正确迭代的几率) 为 P 应在扇形 COD 之内的几率:

$$\begin{aligned}
 P &= 2 \int_0^{r_0} f(r)dr + 2 \int_{r_0}^N \left(1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{r_0}{r}\right) f(r)dr \\
 &+ 2 \int_N^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{r_0}{N} - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{r_0}{r}\right) f(r)dr.
 \end{aligned} \tag{10}$$

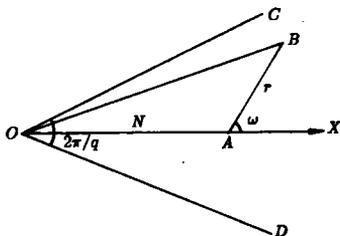


图 1

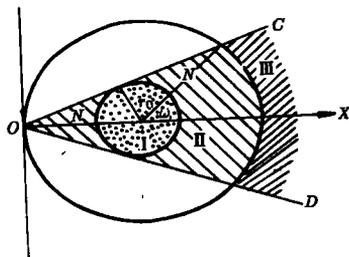


图 2

其中：第 1 项积分表示矢量 H_i 落在以 A 点为圆心，以 r_0 为半径的圆域 (即有黑点的圆域 I) 内的几率；第 2 项积分表示矢量 H_i 落在 $+\pi/q$ 与 $-\pi/q$ 的张角与以 A 点为圆心，以 r_0 为内半径且以 N 为外半径的圆带域相交的区域 (如图 2 所示的画有右斜线的区域 II) 内的几率；第 3 项积分表示矢量 H_i 落在 $+\pi/q$ 与 $-\pi/q$ 的张角与以 A 点为圆心、以 N 为内半径且外半径为无穷大的圆带域相交的区域 (如图 2 所示的画有左斜线的阴影部分 III) 内的几率。上式化简为：

$$\begin{aligned}
 P &= 2 \int_0^{\infty} f(r)dr - \int_{r_0}^N \frac{4}{\pi} \arccos \frac{r_0}{r} f(r)dr \\
 &- \int_N^{\infty} \frac{2}{\pi} \arccos \frac{r_0}{N} f(r)dr - \int_N^{\infty} \frac{2}{\pi} \arccos \frac{r_0}{r} f(r)dr.
 \end{aligned} \tag{11}$$

其中： $\frac{M-1}{N} \approx \frac{M}{N} = \alpha$ 为网络的存储容量， $r_0 = N \sin(\frac{\pi}{q})$ 为图 2 所示的小圆的半径， $\sigma = \sqrt{N(M-1)}$ 为噪声的均方差， $f(x)$ 为噪声的正态分布函数。

特别地，当 $q=2$ 时，若令 $\beta=0$ ，则神经元的操作态为：

$$S = \pm 1. \tag{12}$$

若令动力学方程 (5) 中的两个衍射区域以 i 轴为界，神经元迭代的区域为正负实轴，那么我们得到的神经网络模型就是双极型 Hopfield 神经网络模型。则可得存储容量的近似值 [7,8] 为：

$$\alpha \cong \frac{1}{2 \ln N}. \tag{13}$$

下面我们分析一下当 q 为大于 2 的任意正整数值的的情况下，复相角神经网络模型的存储容量的表达式。

因为正态分布函数 $f(x)$ 具有性质： $\int_{-\infty}^{+\infty} f(r)dr = 1$ ； $\int_0^{+\infty} f(r)dr = \frac{1}{2}$ 。所以在 (11) 式中 $2 \int_0^{+\infty} f(r)dr = 1$ 。(11) 式可以写为：

$$P = 1 - \frac{4}{\pi} \int_{r_0}^N \arccos \frac{r_0}{r} f(r)dr + \left[\int_N^{\infty} \frac{2}{\pi} \arccos \frac{r_0}{N} f(r)dr - \int_N^{\infty} \frac{2}{\pi} \arccos \frac{r_0}{r} f(r)dr \right]. \tag{14}$$

为便于数学分析，我们采取了几个近似处理：

(1) 当 N 很大时，积分 $\int_N^\infty \frac{2}{\pi} \arccos \frac{r_0}{N} f(r) dr \approx \int_N^\infty \frac{2}{\pi} \arccos \frac{r_0}{r} f(r) dr$ 。(如图 3 所示：二者的积分曲线重合) 这时几率 P 可简化为：

$$P = 1 - \frac{4}{\pi} \int_N^\infty \arccos \frac{r_0}{r} f(r) dr. \tag{15}$$

从图 4 中可以看出 (15) 式的曲线与 (14) 式的曲线能很好的重合，即 (15) 式是 (14) 式的近似。

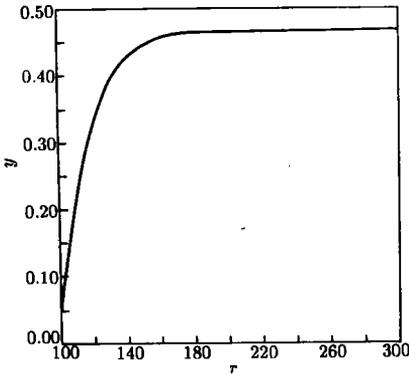


图 3 近似处理 (1) 的两条积分曲线

$$y_1 = \int_N^\infty \frac{2}{\pi} \arccos \frac{r_0}{N} f(r) dr \text{ 与}$$

$$y_2 = \int_N^\infty \frac{2}{\pi} \arccos \frac{r_0}{r} f(r) dr \text{ 重合}$$

$(r_0 = 10N = 100, \sigma = \sqrt{1000})$

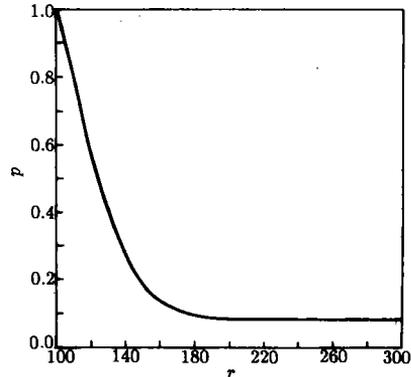


图 4 (14) 式与 (15) 式的曲线重合
($r_0 = 1.0$)

(2) 当 r 从 r_0 变化到无穷大时， $\arccos(\frac{r_0}{r})$ 从 0 变化到 $\frac{\pi}{2}$ ，而且从计算机数值分析来看，(15) 式中 P 的变化主要取决于 r_0 和 $f(r)$ 的变化 (如图 5 所示)。当 r_0 取定值时， $f(r)$ 的变化比 $\arccos(\frac{r_0}{r})$ 的变化显著，这时 P 的变化主要取决于 $f(r)$ 的变化。而且我们可以看到，在图 5 中，我们把 $\arccos(\frac{r_0}{r})$ 用某些与 r 无关的常数来代替，所得到的几率 P 随着 r 变化的曲线与原来的曲线相当接近。因此我们就用一个常系数 $A(0 < A < \frac{\pi}{2})$ 来代替，把它提到积分号外。通过计算机数值模拟可以得到： A 在 0.5 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间取值 (如图 5 示)。这样我们就可以把积分写为：

$$\int_{r_0}^\infty \arccos(\frac{r_0}{r}) f(r) dr \simeq A \int_{r_0}^\infty f(r) dr, \tag{16}$$

因此， P 可以近似为：

$$P = 1 - \frac{4A}{\pi} \int_{r_0}^\infty f(r) dr. \tag{17}$$

(3) 我们应用了误差积分函数 (正态分布积分函数) 的近似公式 (如图 6 所示)：

$$\int_0^x f(x) dx = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) dx \approx \frac{1}{2} \sqrt{1 - \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})}. \tag{18}$$

通过上述 3 个近似处理，我们很容易得到几率 P 的具体表达式：

$$P = 1 - \frac{2A}{\pi} \left[1 - \sqrt{1 - \exp(-\frac{r_0^2}{2\sigma^2})} \right]$$

$$= 1 - \frac{2A}{\pi} \left[1 - \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \sin^2 \frac{\pi}{q}\right)} \right]. \tag{19}$$

由正确迭代几率 P 可得出错几率为:

$$\rho = \frac{2A}{\pi} \left[1 - \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \sin^2 \frac{\pi}{q}\right)} \right]. \quad (20)$$

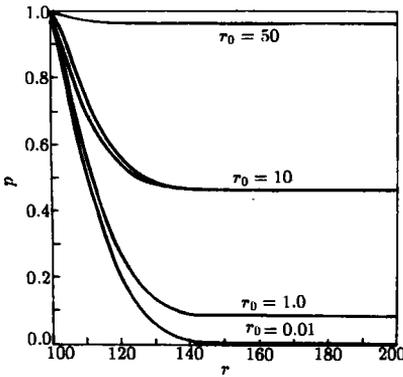


图 5 (15) 式与 (16) 式的曲线比较图

- (1) $\tau_0 = 0.01$, 当 $A = 1.57$, (14) 式与 (15) 式的曲线重合
- (2) $\tau_0 = 1.0$, 当 $A = 1.48$, (14) 式与 (15) 式的曲线重合
- (3) $\tau_0 = 10$, 当 $A = 1.13$, (14) 式与 (15) 式的曲线相当接近
- (4) $\tau_0 = 50$, 当 $A = 0.5$, (14) 式与 (15) 式的曲线重合
($N = 100, \sigma = \sqrt{1000}$)

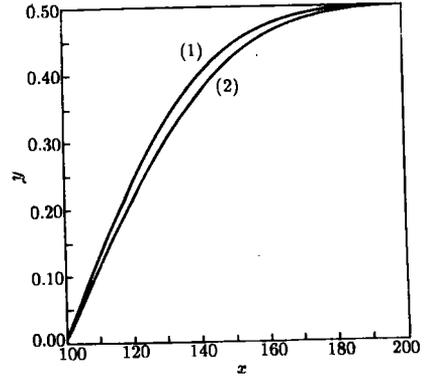


图 6 误差积分函数曲线与其近似公式曲线的比较

曲线(1) $y = \int_0^x f(r) dr$
 曲线(2) $y' = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}$
 ($N = 100, \sigma = \sqrt{1000}$)

单个神经元能够正确迭代的条件为 $P \rightarrow 1$, 即 $\rho \rightarrow 0$ 。而 N 个神经元能够稳定存储图像的条件为 $\exp(-N\rho) = \beta \rightarrow 1$ (这里假设神经元的错误迭代满足泊松分布), 设 $C = -\ln \beta$, 则 $\rho = \frac{C}{N}$, 其中 C 、 β 是常数。即:

$$\frac{C}{N} = \frac{2A}{\pi} \left[1 - \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \sin^2 \frac{\pi}{q}\right)} \right], \quad (21)$$

也即:

$$\left(1 - \frac{\pi C}{2AN}\right)^2 \cong 1 - \frac{\pi C}{AN} = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \sin^2 \frac{\pi}{q}\right). \quad (22)$$

得存储容量比为:

$$\alpha = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{q}}{2 \ln \frac{NA}{\pi C}}. \quad (23)$$

对于一定的正确率, C 为小于 1 的一个常数, 因为 N 很大, A 的变化在 1 附近, 对存储容量的影响很小, 可以忽略。则可得存储容量的近似值为:

$$\alpha = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{q}}{2 \ln N}. \quad (24)$$

讨论: (1) 当 $q = 2$ 时, $\alpha \cong \frac{1}{2 \ln N}$ 即为 Hopfield 神经网络的最大存储容量的理论值^[7,8]。(2) 当 q (神经元的转动态数目) 很大时, $\alpha \approx \frac{\pi^2}{2q^2 \ln N}$ 存储容量不仅与 $\frac{1}{2 \ln N}$ 有关, 而且与 q 的平方值

成反比, 即 α 值随着 q 值的增大而减小。在 Q 态神经网络中, 用复平面单位圆上的等距的 q 个离散点表示 q 值像点, 即单位圆分成相等的 q 个角域, 角域内的任意点的位置数值经输出函数作用后, 收敛到该角域内的某一固定点上(即像点)。当 q 值增大时, 角域减小, 即能够收敛到某一固定点的区域减小, 正确迭代的几率减小, 存储容量减小。

作者感谢厦门大学学生科研基金会和厦门光电子公司的资助。

参 考 文 献

- 1 Noest A J. *Phys. Rev., (A)*, 1988, 38(4): 2196
- 2 Zhou Changhe, Liu Liren. *Optics Communications*, 1993, 103: 29
- 3 Rieger H. *J. Phys., (A)*, 1988, 21: 791
- 4 Kanter I. *Phys. Rev., (A)*, 1988, 37: 2739
- 5 帅建伟等. 厦门大学学报. 1995, 34(3): 353
- 6 Hopfield J J. *Proc. Natl Acad. Sci., U. S. A.*, 1982, 79: 2554
- 7 Bruce A D. *et al. J. Phys., (A)*, 1987, 20: 2909
- 8 Mceliece R. J. *et al. IEEE Tran. Info Theory*, 1987, IT-33(4): 461

The Analysis of the Storage Capacity of the Complex Phasor Neural Network Using Signal-to-Noise Theory

Zheng Jincheng Shuai Jianwei Cheng Zhenxiang Liu Ruitang Wu Boxi

(Department of Physics, Xiamen University Xiamen 361005)

Abstract

In this paper, using the signal-to-noise theory the storage capacity of the complex phasor neural network was analysed. The analysis indicates that the storage capacity of the network is equal to that of the Hopfield model if the number of the states of neurons is small; and the storage capacity of the network is inversely proportional to the square of the number of the states of neurons if the number of the states of neurons is large.

Key words: Neural network, Complex phasor, Signal-to-noise theory, Storage capacity.

郑金成 男, 22岁, 1995年毕业于厦门大学物理系, 获理学学士学位。现为厦门大学物理系95级硕士研究生。主要研究方向是神经网络、混沌、能带工程。