

# 离散复数神经网络模型\*

帅建伟 陈振湘 刘瑞堂 吴伯僖

(厦门大学物理系, 361005)

## 摘要

把 Dirac 符号表示引入四态离散复数神经网络模型中,从理论和数值模拟上初步考察了模型的稳定性,存储容量和容错能力.四态离散复数神经网络模型可应用于四态灰度或彩色图象的识别中,该模型也可应用于具有矢量点特征的图象识别中.

关键词:复数神经网络模型; Hopfield 模型; 图象识别

## 1 前言

自 1982 年 Hopfield 提出了他的神经网络模型<sup>[1]</sup>后,神经网络成了一个世界性的跨学科的研究热点.由于 Hopfield 模型具有许多优点,如具有分布式存储、并行处理、联想记忆、分类与误差自动校正等智能功能,从而成为当前最主要的一种人工神经网络模型,人们在此基础上进行了大量的研究工作,如模型各种性质的理论和计算机模拟研究、各种改进、各学科中的应用、光电器件的实现<sup>[2]</sup>等.

二值 Hopfield 模型可应用于二值黑白图象的联想记忆识别中,文献[3,4]认为 Q 态模型有可能应用于灰度图象的联想记忆中.但对由 Hebb 规则连结的 Q 态模型,具有随  $0.3Q^{-2}$  下降的低存储容量和很小的容错能力<sup>[5]</sup>.神经元的取值可从实数推广到复数域,取值为  $(\pm 1 \pm i)$ ,其中  $i$  表示复数单位  $\sqrt{-1}$ ,也即神经元具有四种存在状态,从而可建立离散复数神经网络模型<sup>[6]</sup>.我们对该模型引进了 Dirac 符号表示,从理论上证明了当神经元数目远大于存储样本数时,存储样本为复动力学神经网络的稳定吸引子,并应用信噪比理论分析了模型的存储容量,结果与 Hopfield 模型的一样,同时用计算机模拟分析了模型在较少神经元数目时的存储容量和容错能力,且与 Hopfield 模型进行了比较.二值 Hopfield 模型把一维输入空间分为正负两半映射到输出空间;Q 态模型则把一维输入空间分为 Q 部分,从而增加了噪声,而要正确映射到输出空间 Q 段中的某一区间,也造成了对噪声的敏感性增加,且 Q 越大影响越大;而在本文提出的四态离散复数神经网络模型中,由于把输入输出空间扩展为二维,从而避开了 Q 态模型所面临的困难,使网络对噪声的敏感性与二值 Hopfield 模型相当,我们认为该模型可应用于四态灰度或彩色图象的识别中,本文运用该模型,进行了一些四态英文字符识别的计算机模拟,实数型神经网络能较好地应用于对由标量点所组成的图象的识别记忆中,而复数是一

文稿收到日期:1994-06-04

\* 国家自然科学基金资助项目

个二维矢量,所以该四态离散复数神经网络模型,也可应用于具有矢量点特征的图象,如二维运动图象或具有方向性的各种图象的识别中.

## 2 离散复数神经网络模型

设有  $N$  个神经元的复数神经网络,存储  $M$  个随机记忆模式  $S^\mu = \{\pm 1 \pm i\}^N$ , ( $\mu=1, 2 \dots M$ ),我们在神经网络中引入 Dirac 符号表示,即基态矢  $S^\mu = |\mu\rangle$ ,连接矩阵则表示为总投影算符:

$$J = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + \dots + |M\rangle\langle M| = \sum_{\mu=1}^M |\mu\rangle\langle \mu| \quad (1)$$

从量子力学来看,若  $|\mu\rangle$  为正空间的基矢,则  $\langle \mu|$  为共轭空间的基矢,对于实数空间来讲,正空间与共轭空间是同一个空间,但对于复空间来讲,则是两个不同的空间.这样由于引入了 Dirac 符号表示,我们自然在连接矩阵算符中引入了复数的共轭空间.当用复数阶跃算符  $\Theta$  表示复数阈值函数  $\Theta\{\}$  时,矩阵表示的网络的动力学方程则写为算符动力学方程:

$$|t+1\rangle = \Theta J |t\rangle \quad (2)$$

对于复数神经网络,态矢  $|\mu\rangle$  具有实部和虚部,故其模为:

$$\langle \mu | \mu \rangle = 2N \quad (3)$$

对随机存储基矢  $|\mu\rangle$ ,伪正交性表示为

$$\langle \mu | \nu \rangle = 0 \quad (\mu \neq \nu) \quad (4)$$

因分为实部和虚部两部分,则其伪正交性的均方误差为

$$\overline{\langle \mu | \nu \rangle \langle \nu | \mu \rangle} = \overline{\langle \nu | \mu \rangle^2} = \sqrt{2N} \quad (5)$$

下面我们应用信噪比理论,对模型的稳定性和存贮容量进行分析.

## 3 复数神经网络的信噪比分析

为考察网络的稳定性,不失一般性,令态矢  $S = S^1 = |1\rangle$ ,代入(2)式得

$$S^1 = \Theta J S^1 = \Theta J |1\rangle = \Theta(2N|1\rangle + \sum_{\mu \neq 1} \langle \mu | 1 \rangle |\mu\rangle) \quad (6)$$

信号-噪声展开式(6)中右边第一项为信号项,第二项为噪声项.在信号项中,  $2N$  表示向基矢  $|1\rangle$  迭代的可能性大小,即向  $|1\rangle$  迭代的权重.在噪声项中,  $\langle \mu | 1 \rangle$  表示向  $|\mu\rangle$  ( $\mu \neq 1$ ) 迭代的权重,由式(4)(5)知该权重的平均值为 0,均方差为  $\sqrt{2N}$ .

下面以基态矢  $|1\rangle$  的各分量的实部为例,进行具体分析

$$S_m^{1Re} = \Theta(2NS_m^{1Re} + \Delta)$$

$$\Delta = \sum_{\mu \neq 1} [S_m^{\mu Re} \sum (S_n^{\mu Re} S_n^{1Re} + S_n^{\mu Im} S_n^{1Im}) + S_m^{\mu Im} \sum (S_n^{\mu Im} S_n^{1Re} - S_n^{\mu Re} S_n^{1Im})]$$

其中 Re 表示取实部,Im 取虚部.由于随机存储模式具有伪正交性,所以上式噪声项  $\Delta$  右边 2 ( $M-1$ ) 个小括号中为对具有随机分布的  $\pm 1$  求和,这些和值大小表示了复动力学系统向  $S_m^{\mu Re}$  和  $S_n^{\mu Im}$  ( $\mu \neq 1$ ) 迭代的权重.易知各权重的平均值为 0,均方差为  $\sqrt{2N}$ .则得  $\Delta$  平均值  $\gamma=0$ ,均方差  $\sigma = \sqrt{4N(M-1)}$ ,故信噪比 SNR 为

$$SNR = \frac{-2N - \gamma}{\sigma} = \sqrt{N/(M-1)} \quad (7)$$

当  $N \gg M$  时信噪比远大于 1, 网络向具有  $2N$  权重的信号  $S_m^R$  收敛, 于是有  $|1\rangle = \Theta J |1\rangle$ . 而当输入一个与存储基矢  $|1\rangle$  相差不大的图象时, 上述关系仍近似成立, 故经一次或数次迭代, 网络自动地收敛于存储基矢  $|1\rangle$ . 即存储样本为复动力学系统的稳定吸引子.

由于存贮模式的独立随机性, 得噪声项  $\Delta$  具有正态分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\gamma)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (8)$$

不失一般性, 令  $S_m^{Rk} = 1$ . 要  $S_m^{Rk}$  也为 1, 也即要求信号项与噪声项的和不小于零, 其几率为

$$\int_{-2N}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-SNR}^{\infty} dx \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$

当  $N, M$  远大于 1 时,  $SNR \approx \sqrt{N/M} = \sqrt{1/\alpha}$ , 这里  $\alpha = M/N$ , 表示存贮容量的大小. 所以  $S_m^{Rk}$  迭代错误, 为 -1 的几率  $P$  为:

$$P(\alpha) = 1 - \int_{-2N}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1/\alpha}^{\infty} dx \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \quad (9)$$

文献[7]运用信噪比理论对 Hopfield 模型的存贮容量进行了分析, 这里我们运用该理论分析离散复数神经网络模型的存贮容量; 由式(9)可得态矢  $|S'\rangle$  中出错的总数约为  $2N \times P$ , 若假设  $|S'\rangle$  中负分量的个数具有 Poisson 分布, 可得非负分量个数的几率, 也即  $|S'\rangle$  为稳定吸引子的几率为

$$p = \exp\{-2NP(\alpha)\} \quad (10)$$

则

$$\sqrt{1/\alpha} = p^{-1}(-\ln p/2N) \quad (11)$$

若设  $p = 0.999999$ ,  $-\ln p/2N$  为一很小的正数, 由近似关系  $P^{-1}(x) \sim \sqrt{2\ln(1/x)}$  得

$$1/\alpha \sim 2\ln 2N$$

当  $N$  远大于 1 时,  $\ln 2N \approx \ln N$ , 则有

$$\alpha \sim \frac{1}{2\ln N} \quad (12)$$

该结论与文献[7]中所得的 Hopfield 模型的存贮容量  $1/2\ln N$  相同.

类似 Hopfield 网络, 若不考虑神经元的自反馈, 即连接矩阵的对角元  $J_{mm} = 0$ , 它对动力学方程的影响表现为信号项的权重是  $2(N-1)$ , 总噪声平均值为 0, 均方差为  $\sqrt{(N-1)(M-1)}$ , 信噪比  $SNR = \sqrt{(N-1)/(M-1)}$ . 当  $N \rightarrow \infty$  时, 信噪比与考虑反馈时的情况只相差  $1/N \rightarrow 0$  的量级, 所以结论与上面一样.

## 4 计算机数值模拟

下面我们用计算机数值模拟说明上述离散复数神经网络模型的联想能力. 计算中取对角元  $J_{mm} = 0$ .

网络中设有  $N$  个神经元, 多次随机产生  $M$  个存贮图象  $S^r = \{\pm 1 \pm i\}^N$ , 把存贮图象作为

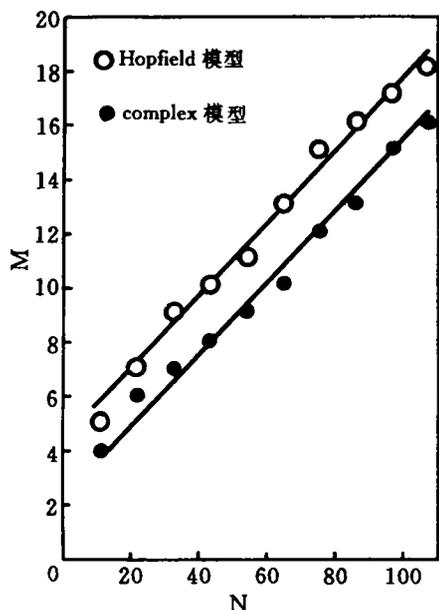


图1 临界值  $\beta=50\%$ ,  $N=10, \dots, 100$  时的  $M_{\max}$  -  $N$  存储容量统计曲线

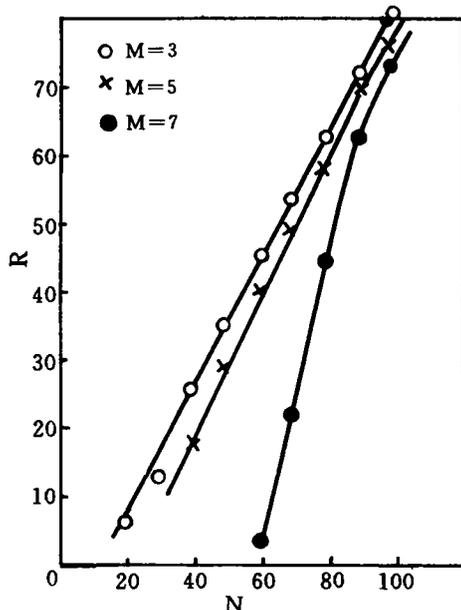


图2 临界值  $\rho=85\%$ ,  $M$  固定不变,  $N=10, 20, \dots, 100$  时的  $R \sim N$  容错半径统计曲线.

输入, 计算其正确回忆率, 统计出对不同的  $N$  其正确回忆率大于某一临界值  $\beta$  的最大  $M$ , 可得临界值  $\beta$  下的  $M_{\max} - N$  统计曲线. 本文取  $\beta=50\%$ , 图1画出了当  $N=10, \dots, 100$  时的  $M_{\max} - N$  统计曲线, 由图可得离散复数神经网络当其复神经元的个数较小时, 其最大可存储的图象数近似为一直线: 即;

$$M \propto \alpha N \tag{13}$$

且有  $\alpha \approx 0.14$ , 它与 Hopfield 模型的结果一样<sup>[8]</sup>. 图中也画出 Hopfield 模型的数值模拟结果, 由图知, 两模型的存储容量曲线虽具有同样的  $\alpha$  值, 但复数模型比 Hopfield 模型的存储容量略低.

对于离散复数神经网络模型, 为表征输入图象  $S$  与存储样本  $S^*$  的差别大小, 须先定义一个距离函数  $D$ :

$$D = \sum_{i=1}^N |\operatorname{Re}(S_i - S_i^*)| + |\operatorname{Im}(S_i - S_i^*)| \tag{14}$$

它表示对矢量的实部和虚部的汉明距离求和.

为考察离散复数神经网络容错能力, 先定义容错半径  $R$ : 当系统存有  $M$  个图象, 分别用与存储图象相差的距离  $D$  为  $1, 2, 3, \dots$  的图象, 作为初态输入, 记下收敛到相应存储图象的比例, 以图象收敛百分数大于某一临界值  $\delta$  为标准所允许的最大  $D$  就是该临界值  $\delta$  下的容错半径  $R$ . 本文取  $\delta=85\%$ , 图2画出了当  $N \leq 100$  时, 对多次随机产生  $M=3, 5, 7$  个存储图象时的三条容错半径统计  $R \sim N$  曲线. 由图可知, 当  $N$  较小时, 容错半径  $R$  随  $M$  的增大而减小. 但当  $N$  远远大于  $M$  时, 容错半径  $R$  与  $M$  无关. 可知当网络中存储的图象数目  $M$  远小于其最大可存



力,该模型与 Hopfield 模型具有相同的存储容量和容错能力. 并运用该模型进行了四态灰度或彩色字符的识别模拟.

复数在物理学中有着广泛而深刻的应用,近代物理的发展离不开复解析函数,而在近些年来兴起的分形学和混沌学中,复动力系统也倍受重视. 从而我们认为,混沌现象在复数神经网络中也存在着,而这样一种混沌复数神经网络模型对于我们更好地认识生物大脑的复杂现象可能会有所启发,所以我们认为复数在神经网络中也将扮演一个重要的角色,值得我们从理论和应用上去认真研究和探讨.

### 参 考 文 献

- 1 Hopfield J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. Proc Natl Acad Sci U S A, 1982; 79: 2554~2558
- 2 David Rumelhart. International Joint Conference on Neural Networks. Seattle, WA, 1991
- 3 Rieger H. Storing an extensive number of grey-toned patterns in a neural network using multistate neurons. J Phys A, 1990; 23: L1273~L1279
- 4 Bolle D *et al.* Optimal storage capacity for diluted multi-state neural networks; continuous and discrete couplings. Physica A, 1992; 185: 357~362
- 5 Stiefvater T *et al.* A finite-size scaling investigation for Q-state Hopfield models; storage capacity and basins of attraction. J Phy A, 1992; 25: 5919~5929
- 6 Zhou Changhe, Liu Liren. The complex Hopfield model. Optics Communications, 1993; 103: 29~32
- 7 Mceliece R J. The capacity of the Hopfield associative memory. IEEE Tran Info Theory, 1987; IT-33: 461~482
- 8 Amit D J *et al.* Statistical mechanics of neural networks near saturation. Annals of Phys, 1987; 173: 30~67

## Discrete Complex Neural Network Model

*Shuai Jianwei    Chen Zhenxiang    Liu Ruitang    Wu Boxi*

Department of Physics, Xiamen University

### Abstract

A discrete complex-number neural network model with four states ( $\pm 1 \pm i$ ) is considered. Signal-to-noise theory and computer numerical solutions are made to analyse the stability, the storage capacity and the error-tolerance capacity of the model. This 4-state neural network model can be applied to recognize the four-level gray or color patterns.

**Key words:** complex neural network; Hopfield model    pattern recognition