

# 四元数神经网络模型：彩色图象的识别

帅建伟 陈振湘 刘瑞堂 吴伯僖

(厦门大学物理系 厦门 361005)

**摘要** 本文首次把四元数(Hamilton量)引入到神经网络中,提出了四元数16态离散神经网络模型,应用信噪比理论和计算机模拟考察了该模型的存储稳定性和存储容量.该模型的存储容量比与Hopfield模型相同.该四元数神经网络模型可应用于16色的彩色图象识别中.

**关键词** 神经网络, 四元数, 图象识别.

## THE HAMILTON NEURAL NETWORK MODEL: RECOGNITION OF THE COLOR PATTERNS

Shuai Jianwei, Chen Zhenxiang, Liu Ruitang and Wu Boxi

(Department of Physics, Xiamen University, Xiamen 361005)

**Abstract** In this paper, the Hamilton number is introduced into the neural network model, and the discrete Hamilton neural network model is suggested, whereby a neuron is a 16-state ( $\pm 1 \pm i \pm j \pm k$ ). The signal-to-noise theory and the computer simulation are made to analyse the storage stability and the storage capacity of the model. The storage capacity ratio of the model equals to that of the Hopfield model. The 16-state Hamilton number neural network can be applied to recognize the 16-level color patterns.

**Keyword** Neural network, Hamilton number, pattern recognition.

## 1 前 言

自80年代始,神经网络成为一个世界性的跨学科的研究热点.人工神经网络由于模拟了人脑神经的基本功能和网络的基本结构特征,所以它具有了人脑所具有的分分布式记

---

本文1994年3月27日收到.本文得到国家自然科学基金重点项目资助.帅建伟,博士生,主要从事神经网络、图象识别和分形发光等的研究.陈振湘,副教授,主要从事半导体器件及发光、光电混合型神经网络计算机等的研究.刘瑞堂,教授,主要从事半导体器件及发光、光神经网络计算机等的研究.吴伯僖,教授,博士生导师,主要从事半导体器件、固体发光、神经网络、分形等的研究.

忆、并行处理、联想记忆、分类与误差自动校正等智能功能. 二值 Hopfield 模型<sup>[1]</sup>可应用于二值黑白图像的联想记忆识别中. 但对于人眼来说, 它所大量识别的图象是彩色图象, 建立自动识别彩色图象的人工神经网络模型, 无论从应用还是从理论上来看, 都是具有重要且广泛意义的.

建立多态神经网络模型, 基本上有两条思路: 一是直接利用 Hopfield 模型, 用多个二值神经元来表示一个多态象点<sup>[2-4]</sup>; 另一方案是建立多态神经网络, 用一个多值神经元表示一个多态象点. Noest 等提出了离散态复相角神经网络模型<sup>[5]</sup>, 用复平面单位元上的离散点表示多值象点. 文献<sup>[6]</sup>提出了  $Q$  态神经网络模型, 每个神经元可取  $Q$  个整数值. 文献<sup>[7,8]</sup>各自独立提出了四态复数神经网络模型. 本文首次把四元数(Hamilton 数)<sup>[9]</sup>引入神经网络中, 建立了 16 态离散四元数神经网络模型, 并应用信噪比理论和计算机模拟讨论了该模型的稳定性和存储容量, 该模型可应用于 16 色彩色图象识别中, 本文还给出了一个简单的彩色字符识别的计算机数值模拟实例.

## 2 四元数简介

从历史发展来看, 数经历了从自然数  $N$ 、分数、整数  $Z$  到实数  $R$ 、复数  $C$  的过程. 从  $R$  到  $C$ , 事实上是从实数轴扩张到复平面, 也即从一元数到了有实数单位 1 和复数单位  $i$  的二元数, 我们进而提出问题: 是否能在更高维的点集中, 引入加法和乘法, 使它们成为包含  $R$  和  $C$  的数集? 可以证明, 我们可以引进  $2^n$  元数<sup>[9]</sup>, 当  $n=0$  时和  $n=1$  时我们分别得到  $R$  和  $C$ ; 而当  $n=2, 3, 4$  时我们分别有四元数(Hamilton 代数), 8 元数(Cayley 代数)以及 16 元数(Clifford 代数).

令四元数系  $Q(R) = \{a; a = a + bi + cj + dk, a, b, c, d \in R\}$ , 其中  $i, j, k$  表示三个虚基矢, 用自然的方式定义它的元素的加法, 以及元素与实数的乘法, 它的元素间的乘法规定为用分配法去展开下式:

$$(a_0 + a_1i + a_2j + a_3k)(b_0 + b_1i + b_2j + b_3k)$$

而其中:

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = -1, & \quad ij = -ji = k, \\ jk = -kj = i, & \quad ki = -ik = j \end{aligned} \quad (1)$$

由上可知, 四元数中三个虚基元间的乘法是不可交换的, 乘法的不可交换性我们在量子力学中已很熟悉. 在引入超复数数系时,  $R$  和  $C$  的某些良好性质会丧失, 如四元数中虚基元间乘法的不可交换性. 但事实上, 放弃某些性质也不一定是坏事, 如实数  $R$  中有大小概念, 即实数是有序的, 而扩张到复数  $C$  时, 复数已不可能比较大小了, 即复数不是有序的, 但具有方向性的复数在近代物理学中得到了广泛深刻的应用. 在四元数中乘法是不可交换的, 而这一性质正好用来描述刚体的定点转动的结合性.

四元数虽不满足乘法交换律, 但满足结合律:  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ . 容易证明  $Q(R)$  是一个不可交换体, 且  $Q(R) - \{0\}$  是一个非 Abel 乘群.

可以看出, 三个虚基元间的乘法规则与 Pauli 矩阵的性质极为相似, 利用  $2 \times 2$  单位矩阵  $E_2$  以及 Pauli 矩阵:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(其中  $i$  表示复数单位  $\sqrt{-1}$ ) 我们可得到  $Q(R)$  的一个矩阵实现:

$$1 = E_2, \quad i = -i\sigma_x, \quad j = -i\sigma_y, \quad k = -i\sigma_z \quad (3)$$

对任一四元数  $\alpha = a + bi + cj + dk$ , 定义其四元共轭  $\alpha^* = a - bi - cj - dk$ . 故  $\alpha\alpha^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |\alpha|^2$ , 其中  $|\alpha|$  表示为  $\alpha$  的模.

据此我们还能证明刚体绕方向余弦为  $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$  的轴  $n$ , 转角为  $\theta$  的转动  $R(n, \theta)$ , 可以用

$$\pm Q(n, \theta) = \cos\theta + \sin\theta (\cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k) \quad (4)$$

表示, 如果要计算先进行转动  $R(n_1, \theta_1)$ , 然后进行转动  $R(n_2, \theta_2)$  的联合转动, 只要计算出  $Q(n_1, \theta_1)Q(n_2, \theta_2)$  并将它按式(5)形式表示, 便能得到合成转动的转轴  $n$  和转角  $\theta$ .

由复数与平面上的转动的对应关系, 我们可以定义复数的倒数、平方、开方等运算. 类似于此, 由四元数与三维刚体转动的关系, 我们可以定义四元数的倒数、平方、开方等运算. 如平方为  $\alpha^2 = 2a\alpha - |\alpha|^2$ , 倒数为  $1/\alpha = \alpha^* / |\alpha|^2$ .

### 3 四元数神经网络模型

我们设四元数神经网络模型有  $N$  个神经元, 每个神经元的状态为

$$(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)$$

设存储  $M$  个记忆模式  $S^\mu = \{\pm 1 \pm i \pm j \pm k\}^N (\mu = 1, 2, \dots, M)$ , 存储的样本由推广的 Hebb 学习规则构成连接矩阵, 即:

$$J_{mn} = \sum_{\mu} S_m^\mu (S_n^\mu)^* \quad J_{mm} = A \quad (5)$$

$(S_n^\mu)^*$  表示取  $S_n^\mu$  的四元共轭, 对角元  $A$  为实数. 若不考虑自反馈, 则令  $A=0$ ; 若考虑自反馈, 可令  $A=4$  等. 本文考虑  $A=0$  情况. 则网络的四元动力学方程为

$$S_m(t+1) = \Theta \left\{ \sum_n J_{mn} S_n(t) \right\} \quad (6)$$

四元函数  $\Theta\{x\}$  的取值规则如下: 当  $x$  的实部以及某一虚部不小于 0 时,  $\Theta\{x\}$  的对应部分取为正单位元, 当  $x$  的实部以及某一虚部小于 0 时,  $\Theta\{x\}$  的对应部分取为负单位元, 如:

$$\begin{aligned} \Theta\{2 - 5i + 7j + 3k\} &= 1 - i + j + k \\ \Theta\{-2 - 5i + 7j\} &= -1 - i + j + k \end{aligned}$$

下面我们来证明当存储  $M$  个随机样本, 且  $M \ll N$  时, 存储样本为该四元数神经网络的稳定吸引子, 即:  $S^v = \Theta\{JS^v\}$ .

设任一模式  $S = a + ib + jc + kd$ , 其中  $a, b, c, d = \pm 1$ . 我们可以把四元数连接矩阵和迭代动力学方程分别展开为实部和各虚部部分. 当输入图象为某一存储样本  $S^v = \{a_m^v + ib_m^v + jc_m^v + kd_m^v\}_{m=1}^N$ , 即  $S(0) = S^v$  时, 各实虚部的动力学迭代方程为:

$$\begin{aligned} a_m' &= \Theta\{4(N-1)a_m + \Delta_0\} \\ b_m' &= \Theta\{4(N-1)b_m + \Delta_1\} \\ c_m' &= \Theta\{4(N-1)c_m + \Delta_j\} \\ d_m' &= \Theta\{4(N-1)d_m + \Delta_k\} \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \sum_{\mu \neq \nu} [a_m^\mu \sum_{n \neq m} (a_n^\mu a_n^\nu + b_n^\mu b_n^\nu + c_n^\mu c_n^\nu + d_n^\mu d_n^\nu) \\ &\quad + b_m^\mu \sum_{n \neq m} (b_n^\mu a_n^\nu - a_n^\mu b_n^\nu + c_n^\mu d_n^\nu - d_n^\mu c_n^\nu) \\ &\quad + c_m^\mu \sum_{n \neq m} (c_n^\mu a_n^\nu - a_n^\mu c_n^\nu + d_n^\mu b_n^\nu - b_n^\mu d_n^\nu) \\ &\quad + d_m^\mu \sum_{n \neq m} (d_n^\mu a_n^\nu - a_n^\mu d_n^\nu + b_n^\mu c_n^\nu - c_n^\mu b_n^\nu) \\ \Delta_1 &= \sum_{\mu \neq \nu} [b_m^\mu \sum_{n \neq m} (b_n^\mu b_n^\nu + c_n^\mu c_n^\nu + d_n^\mu d_n^\nu + a_n^\mu a_n^\nu) \\ &\quad + c_m^\mu \sum_{n \neq m} (c_n^\mu b_n^\nu - b_n^\mu c_n^\nu - d_n^\mu a_n^\nu + a_n^\mu d_n^\nu) \\ &\quad + d_m^\mu \sum_{n \neq m} (d_n^\mu b_n^\nu - b_n^\mu d_n^\nu - a_n^\mu c_n^\nu + c_n^\mu a_n^\nu) \\ &\quad + a_m^\mu \sum_{n \neq m} (a_n^\mu b_n^\nu - b_n^\mu a_n^\nu - c_n^\mu d_n^\nu + d_n^\mu c_n^\nu) \end{aligned} \quad (8)$$

虚部  $j$  和  $k$  的方程  $\Delta_j, \Delta_k$  与虚部  $i$  的类似, 由虚部  $b, c, d$  轮换可得.

这里实际求得的是信号-噪声展开式, (7)式中右边第一项为信号项, 第二项为噪声项. 因随机存储模式具有伪正交性, 所以(8)式噪声项  $\Delta_0, \Delta_1$  右边小括号为对具有随机分布的  $\pm 1$  求和, 而这些和值大小表示了该四元动力学系统向  $a_m^\mu, b_m^\mu, c_m^\mu, d_m^\mu$  ( $\mu \neq \nu$ ) 迭代的可能性大小, 即向  $a_m^\mu, b_m^\mu, c_m^\mu, d_m^\mu$  ( $\mu \neq \nu$ ) 迭代的权重. 易知该权重的平均值为 0, 均方差为  $\sqrt{4(N-1)}$ , 则得  $\Delta_0, \Delta_1$  的平均值为 0, 均方差为  $\sqrt{16(N-1)(M-1)}$ , 即  $4\sqrt{(N-1)(M-1)}$ , 对虚部  $j, k$  同样存在以上关系, 由此可得该模型的信噪比 SNR 为:

$$\text{SNR} = \sqrt{(N-1)/(M-1)} \quad (9)$$

当  $N \gg M$  时, 信噪比 SNR 远大于 1, 所以网络向具有  $4(N-1)$  权重的  $a_m^\nu, b_m^\nu, c_m^\nu, d_m^\nu$  收敛, 于是有  $S^\nu = \Theta\{JS^\nu\}$ . 而当输入一个与存储样本  $S^\nu$  相差不大的图象时, 上述关系仍近似成立, 故经一次或数次迭代, 网络自动地收敛于存储样本  $S^\nu$ . 即存储样本为该四元动力学系统的稳定吸引子.

该模型的信噪比等于 Hopfield 模型的信噪比. 而信噪比的大小决定了网络的存储容量, 所以该模型的存储容量与 Hopfield 模型相当. 下面我们应用信噪比理论求该模型的存储容量比  $\alpha = M/N$ .

由于存储模式的独立随机性, 得噪声项  $\Delta$  具有正态分布:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-\gamma)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (10)$$

不失一般性, 令  $a_m^\nu = 1$ . 要  $a_m^{\nu'}$  也为 1, 也即信号项与噪声项的和不小于零, 其几率为:

$$\int_{-2N}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-SNR}^{\infty} dx \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$

当  $N, M$  远大于 1 时,  $SNR \approx \sqrt{N/M} = \sqrt{1/\alpha}$ , 所以  $a_m'$  迭代错误, 使  $a_m' = -1$  的几率  $P$  为:

$$P(\alpha) = 1 - \int_{-SNR}^{\infty} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}^{\infty} dx \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] \quad (11)$$

由式(9)可得  $S'$  中出错的总数约为  $4N \times P$ , 若假设  $S'$  中负分量的个数具有 Poisson 分布, 可得非负分量个数的几率, 也即  $S'$  为稳定吸引子的几率为:

$$\rho = \exp\{-4NP(\alpha)\} \quad (12)$$

则:

$$\sqrt{1/\alpha} = P^{-1}(-\ln\rho/4N) \quad (13)$$

若设  $\rho$  为很接近于 1 的常数, 则  $-\ln\rho/4N$  为一很小的正数, 由近似关系  $P^{-1}(x) \sim \sqrt{2 \ln(1/x)}$  得:

$$1/\alpha \sim 2 \ln 4N$$

当  $N$  远大于 1 时,  $\ln 4N \approx \ln N$ , 则有

$$\alpha \sim \frac{1}{2 \ln 4N} = \frac{1}{2 \ln N} \quad (14)$$

该结论与文献[10, 11]中所得的 Hopfield 模型的存储容量比  $1/2 \ln N$  相同.

下面我们用计算机数值模拟说明上述离散四元数神经网络模型的联想能力. 网络中设有  $N$  个神经元, 多次随机产生  $M$  个存储图象  $S^u$ , 把存储图象作为输入, 统计出对不同的  $N$  其正确回忆率大于某一临界值  $\beta$  时的最大  $M$ , 可得该临界值  $\beta$  下的  $M-N$  统计曲线. 图 1, 2 画出了当  $N=10, \dots, 200$  且取  $\beta=50, 90\%$  时的  $M-N$  统计曲线, 由图可得该离散四元数神经网络当其神经元的个数较小时, 其最大可存储的图象数近似为一直线, 且与 Hopfield 模型的存储容量曲线平行, 即具有同样的存储容量比值. 且由图中可知, 四元数模型比 Hopfield 模型的存储容量略低.

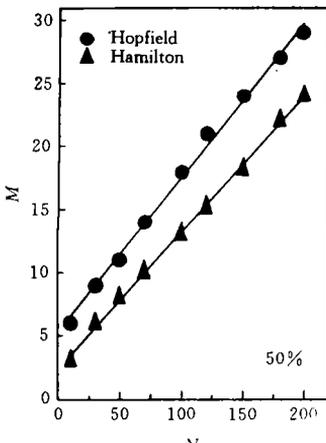


图 1 网络中设有  $N$  个神经元, 存储图象的正确回忆率大于 50% 时的最大  $M$  随  $N$  的统计曲线

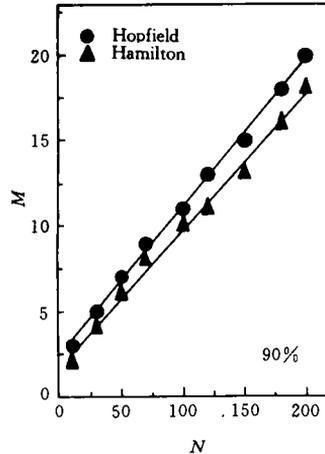


图 2 网络中设有  $N$  个神经元,  $M$  个存储图象, 存储图象的正确回忆率大于 90% 时的最大  $M$  随  $N$  的统计曲线

## 4 彩色图象的识别

在彩色显示屏中,所用的色彩混合方式为色彩光线的相加混色法,如红光加绿光得黄光.考虑到四元数具有三个虚部,很自然地我们可以把它和彩色显示屏上的三基色:红,兰,绿对应起来,而其实数部分可表示色饱和度的两个级别.由于该四元数离散神经网络模型有 16 个分量,则它可以存储由这三色复合成的 16 种色彩.由三色构成 16 种色彩来近似表示一幅彩色图象,这在计算机的 EGA/VGA 等 16 色图形显示卡中已得到了大量的应用.这样对于三基色:红,兰,绿可建立下面的对应表 1.可以看出,该 16 色神经网络编码与二进制的计算机 16 色编码存在着——对应关系.

表 1 由三基色红兰绿构成 16 色

0	$(-1-i-j-k)$	黑	8	$(+1-i-j-k)$	深灰
1	$(-1-i-j+k)$	兰	9	$(+1-i-j+k)$	淡兰
2	$(-1-i+j-k)$	绿	10	$(+1-i+j-k)$	淡绿
3	$(-1-i+j+k)$	青	11	$(+1-i+j+k)$	淡青
4	$(-1+i-j-k)$	红	12	$(+1+i-j-k)$	淡红
5	$(-1+i-j+k)$	紫	13	$(+1+i-j+k)$	淡洋红
6	$(-1+i+j-k)$		14	$(+1+i+j-k)$	黄
7	$(-1+i+j+k)$	淡灰	15	$(+1+i+j+k)$	白

对于该四元数离散神经网络模型的 16 色彩色图象识别我们也进行了初步的计算机模拟应用,如对图 3 所示的  $7 \times 10$  点阵字母 A 的识别:网络中存储有五种不同颜色(青 3,紫 5,深灰 8,淡洋红 13,黄 14)的字母 A,模拟表明,这五种不同颜色的 A(图 3)均为该网络的稳定存储图象.当输入一些稍有变形的字母 A,包括色彩改变或出现多余色彩斑点等,该模型均能正确识别.如若输入一些其汉明距离达 30(即噪声约 10%)的稍有变形的字母 A,该模型正确识别率约为 92%.若输入一些其汉明距离达 50(即噪声约 18%)的稍有变形的字母 A,正确识别率为 58%.图 4 为一些约具有 10%噪声的变色字符,该网络都能正确识别.

## 5 讨 论

本文首次提出了四元数离散神经网络模型,并从理论或数值模拟上初步考察了该模型的存储稳定性和存储容量能力.当网络存储  $M$  个随机样本,且样本数远小于神经元数时,存储样本为该四元数神经网络的稳定吸引子.该模型与 Hopfield 模型具有同样的存储容量比值,但比 Hopfield 模型的存储容量略低.我们认为该四元数神经网络模型,可应用于 16 色彩色图象的识别中.其 16 色的神经网络编码方式与二进制的计算机 16 色编码方式存在着——对应关系.

神经网络模型从数的推广上,由实数<sup>[1]</sup>,复数<sup>[7,8]</sup>到四元数(Hamilton量).四元数(Hamilton量)离散神经网络模型能识别 $2^4=16$ 种色彩,自然我们可进一步推广建立8元数以及16元数神经网络模型,对8元数神经网络模型<sup>[12]</sup>则可识别 $2^8=256$ 种色彩.由复数与平面的转动对应关系,Noest建立了复相角神经网络模型<sup>[5]</sup>;同理,由四元数与刚体三维转动的对应关系,我们也可建立四元数三维相角神经网络模型,该部分内容我们将另文讨论.

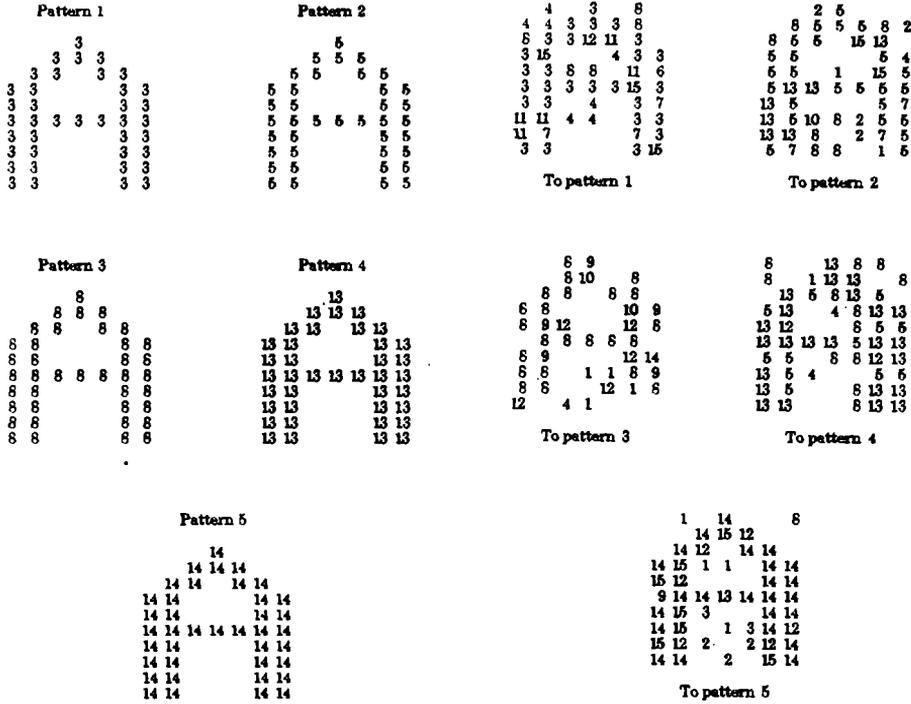


图3

图4

7×10点阵的彩色字母A.网络中存储有五种不同颜色字母A:青3,紫5,深灰8,淡洋红13,黄14

随机产生的五个具有约10%噪声的彩色字母A,网络能正确识别(各数字代表的颜色见表1)

### 参 考 文 献

[1] Hopfield J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. In: Proc Natl Acad Sci U S A, 1982, 79:2554-2558.

[2] Taketa W, Goodman J W. Neural networks for computation: number representations and programming complexity. *Appl Opt*, 1986, 25(17), 3033-3046.

[3] Zhang W, Ltoh K, Tanida J, Lchioka Y. Hopfield model with multistate neurons and its optoelectronic implementation. *Appl Opt*, 30(2), 195-200.

[4] Yu F T S, Uang C M, Yin S. Gray-level discrete associative memory. *Appl Opt*, 1993, 32(8): 1322-1329.

- [5] Noest A J. Discrete-state phasor neural networks. *Phys Rev A*, 1988, 38(4): 2196-2199.
- [6] Rieger H. Storing an extensive number of grey-toned patterns in a neural network using multistate neurons. *J Phys A*, 1990, 23(23), L1273-L1279.
- [7] Zhou C H, Liu L R. The complex Hopfield model. *Opt Comm*, 1993, 103(1,2): 29-32.
- [8] Shuai J W, Chen Z X, Liu R T, Wu B X. The storage capacity of the complex neural network. In: Proceedings of International Conference on Electronics and Information Technology, 1994, Beijing, China, 463-466.
- [9] Condon E U *et al.* Handbook of Physics. New York(Second Edition); McGraw-Hill, 1967, 1: 22.
- [10] Bruce A D, Gardner E J, Wallace D J. Dynamics and statistical mechanics of the Hopfield model. *J Phys A*, 1987, 20(10): 2909-2934.
- [11] McEliece R J, Posner E C, Rodemich E R, Venkatesh S S. The capacity of the Hopfield associative memory. *IEEE Tran Info Theory*, 1987, IT-33(4): 461-482.
- [12] 帅建伟, 陈振湘, 刘瑞堂, 吴伯僖. 八元数神经网络模型: 256 色图象的识别. 光学学报, 1995, 15(3).