

# 对称域基本解函数的构造及应用

丁华建<sup>1</sup>, 魏海娥<sup>2</sup>, 吴莉娜<sup>2</sup>, 蒋泉<sup>1,2\*</sup>, 周志东<sup>3</sup>

(1. 南通大学 建筑工程学院, 江苏 南通 226019; 2. 南通大学 理学院, 江苏 南通 226007;

3. 厦门大学 材料学院, 福建 厦门 361005)

**摘要:**在对称区域中, 构造出满足对称边界条件的基本解函数, 并推广到基本解方法(MFS)中求解 Poisson 方程的边界值问题. 利用构造出的基本解, 输入数据和所求解的线性方程组数目可减少到原来(不利用对称性的基本解函数所需的方程组数目)的 1/2 或 1/4, 具有计算时间短、精度高、编程简单、输入数据少等优点. 通过数值计算可以看出, 计算结果与解析解之间的误差很小, 说明该方法值得推广使用.

**关键词:**基本解; 函数; 对称域; Poisson 方程

中图分类号: O343

文献标志码: A

文章编号: 1673-2340(2011)04-0058-06

## Reconstruction and Application of Fundamental Function in Symmetrical Region

DING Hua-jian<sup>1</sup>, WEI Hai-e<sup>2</sup>, WU Li-na<sup>2</sup>, JIANG Quan<sup>1,2\*</sup>, ZHOU Zhi-dong<sup>3</sup>

(1. School of Civil Engineering, Nantong University, Nantong 226019, China;

2. School of Sciences, Nantong University, Nantong 226007, China;

3. College of Materials, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** The method of fundamental solution (MFS) with reconstructed fundamental functions is introduced to solve the boundary problems of Poisson equations in the symmetrical region. With the help of these reconstructed functions, the amount of inputting data and linear equations are only the half or quarter of those which uses the original fundamental functions. MFS with reconstructed fundamental functions has the merits of less computing time, high accuracy and simple programming. The numerical examples show that the results of MFS are coincident with the analytical solutions.

**Key words:** fundamental solution; function; symmetrical region; Poisson equation

---

基本解方法(Method of Fundamental Solution, MFS)是边界值问题的经典解法之一, 其基本思想是由文献[1-5]提出的, 实际上是基本解函数的叠加, 系数矩阵的求解不需要积分, 极大地减少了所

收稿日期: 2011-09-27

基金项目: 国家自然科学基金项目(1172252, 10902055, 10802070); 2008 年江苏省“青蓝工程”青年骨干教师培养计划项目; 南通大学  
新人才基金项目

作者简介: 丁华建(1965—), 男, 实验师.

\* 通信联系人: 蒋泉(1974—), 男, 副教授, 博士, 主要从事固体力学方面的研究. E-mail: jiang.q@ntu.edu.cn

需处理的数据. 为了避免数值解的奇异性, 通常把奇异点设置在界外的虚拟边界上. 因此, MFS 的计算结果在边界的附近也有较高的精度.

MFS 是一种真正的无网格方法, 对解决复杂区域中的调和或重调和方程具有极大的优势. 利用 MFS, Webster<sup>[6]</sup>对任意三维问题的无黏性流动问题进行了研究; Simos 和 Sadegh<sup>[7]</sup>对任意边界壳体问题作了分析; Heise<sup>[8]</sup>利用本方法对弹性边界值问题进行了深入研究; 文献[9]对弹性问题进行了很好的综述; 文献[10]给出了关于其在 Laplace 方程的 Cauchy 边界上收敛性方面的很有价值的结论; Chen 和 Hon<sup>[11]</sup>在本数值方法上做了大量深入而卓有成效的研究.

在 MFS 的具体计算中, 所取边界点及虚拟边界点需考虑全部边界, 所得线性方程组数量庞大, 此时在数据存储和计算时间上将面临较大的困难. 如果考虑在实际物理和工程问题的计算中, 所研究的区域具有对称轴, 则对称轴也可以看成为边界. 因此, 在对称条件下, 取合适的基本解函数就可以极大地减少线性方程组维数, 降低误差, 节约计算时间. 基于如上考虑, 笔者构造出满足对称边界条件的基本解函数, 结合 MFS 对 Poisson 的边界值问题进行了数值计算. 通过算例可以看出, MFS 结果与解析解之间的误差很小.

## 1 Poisson 方程的 MFS 解法

Poisson 方程一般形式为

$$\nabla^2 \varphi = q \quad (1)$$

式中  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ ,  $q$  是所定义区域中的已知函数. 其边界条件为  $\varphi = c_1$  (边界  $S_1$ ),  $\partial\varphi/\partial n = c_2$  (边界  $S_2$ ), 且  $S = S_1 \cup S_2$ ,  $n$  为边界法线.

函数  $\varphi$  基本解方法的级数形式可取为

$$\varphi(p) = \sum_{i=1}^n A_i G(P, Q_i) + \varphi^*(P) \quad (2)$$

式中:  $P$  为区域内的观察点;  $Q_i$  为边界上源点;  $A_i$  为待定系数, 可由边界条件定出;  $G(P, Q_i)$  为相应的齐次调和方程的基本解函数, 在二维和三维条件下可分别写成

$$G(P, Q_i) = -\frac{1}{2\pi} \ln r \quad (3a)$$

$$G(P, Q_i) = -\frac{1}{4\pi r} \quad (3b)$$

其中,  $r$  为  $P$  与  $Q_i$  之间的距离;  $\varphi^*(P)$  为非齐次调和方程的特解, 在  $q$  为常数时, 二维和三维问题的特解可分别取为

$$\varphi^*(P) = \frac{q}{4}(x^2 + y^2) \quad (4a)$$

$$\varphi^*(P) = \frac{q}{6}(x^2 + y^2 + z^2) \quad (4b)$$

为避免级数解的奇异性, 假想在域外取另一虚拟边界  $S'$ , 把边界上的点  $Q_i$  取在虚拟边界  $S'$  上以  $R_i$  表示, 则式(2)可写为

$$\varphi(P) = \sum_{i=1}^n A_i G(P, R_i) + \varphi^*(P) \quad (5)$$

式中待定系数  $A_i$  由下列方程组求解:

$$\sum_{k=1}^{n_1} A_k G(P_i, R_k) = c_1(P_i) - \varphi^*(P_i) \quad (6a)$$

$$\sum_{k=n_1+1}^n A_k \frac{\partial G(P_i, R_k)}{\partial n} = c_2(P_i) - \frac{\partial \varphi^*(P_i)}{\partial n} \quad (6b)$$

式中, 点  $R_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n_1$ ) 取在虚拟边界  $S'_1$  上, 点  $R_k$  ( $k = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n$ ) 取在虚拟边界  $S'_2$  上, 且  $S' = S'_1 \cup S'_2$ .

## 2 对称问题中基本解函数的构造

在实际物理和工程问题的计算中, 如果存在对称条件, 对称轴也可以看成为边界, 且在对称轴上一般满足如下边界条件:

$$\frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} = 0 \quad (7a)$$

或

$$G(P, Q) = 0 \quad (7b)$$

所以, 如果能构造出符合对称条件的基本解函数, 则所需要的边界点及虚拟边界点将成倍减少, 可以极大提高计算效率.

### 2.1 二维对称问题中基本解函数

在二维问题中, 如果所研究的区域关于轴对称, 此时可利用对称性, 按 1/2 区域, 即上半或下半区域求解. 此时, 所取的单元点和所需求解方程组数目可减至原来一半而不降低精度. 在图 1a 中,

设  $Q$  点有单位源, 其对观测点  $P$  产生的作用由前文基本解函数表示为

$$G(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} \ln r_1 \quad (8a)$$

式中,  $r_1 = [(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2]^{1/2}$ , 其中  $(x, y)$  为  $P$  点坐标,  $(x_Q, y_Q)$  为  $Q$  点坐标.

同样, 在  $Q$  点关于  $x$  轴对称位置  $(x_Q, -y_Q)$  设置单位源, 其对  $P$  点产生作用的基本解函数为

$$G(P, Q_2) = -\frac{1}{2\pi} \ln r_2 \quad (8b)$$

式中,  $r_2 = [(x - x_Q)^2 + (y + y_Q)^2]^{1/2}$ , 其中  $(x, y)$  为  $Q$  点坐标,  $(x_Q, -y_Q)$  为  $Q_2$  点坐标.

如图 1a 所示, 当  $Q$  点和  $Q_2$  点源同时存在时, 它们对点  $P$  的影响可以通过式(8a), (8b)简单叠加即可, 基本解函数经过整理可以得到如下形式:

$$G(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r_1 r_2) \quad (9)$$

在对称轴上有

$$\frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{r_1} \left( \frac{\partial r_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) + \frac{1}{r_2} \left( \frac{\partial r_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \right] \quad (10)$$

当对称轴为  $x$  轴, 且点  $P$  在  $x$  轴上时有

$$\frac{\partial x}{\partial n} = 0, \frac{\partial y}{\partial n} = -1, r_1 = r_2 \quad (11)$$

将式(11)代入式(10)可以得到关系式(7a).

如果在  $Q$  对称点  $Q_2$  上施加一负单位源, 叠加后基本解函数  $G(P, Q)$  相应为

$$G(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \quad (12)$$

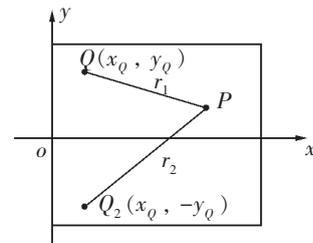
当点  $P$  在对称轴上时, 有  $r_1 = r_2$ . 因此, 由式(12)表示的基本解函数在对称轴上满足关系式(7b).

如果计算区域同时关于  $x$  和  $y$  轴对称, 可以按  $1/4$  区域计算, 如利用第一象限求解. 此时, 在计算过程中, 所取单元点数可极大减少而不致降低精度. 如图 1b 所示, 同样在  $Q$  及其对称点  $Q_2, Q_3$  和  $Q_4$  上布置正单位源, 考虑各正单位源对观察点的影响, 可构造出基本解函数为

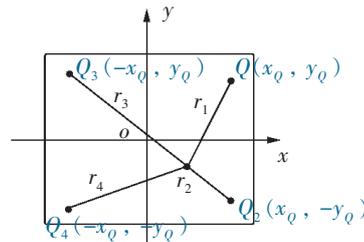
$$G(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r_1 r_2 r_3 r_4) \quad (13)$$

式中:

$$\begin{aligned} r_1 &= [(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2]^{1/2} \\ r_2 &= [(x - x_Q)^2 + (y + y_Q)^2]^{1/2} \\ r_3 &= [(x + x_Q)^2 + (y - y_Q)^2]^{1/2} \\ r_4 &= [(x + x_Q)^2 + (y + y_Q)^2]^{1/2} \end{aligned}$$



a 单对称轴



b 双对称轴

图 1 二维对称问题源点与镜像点分布图

当点  $P$  在对称轴  $x$  或对称轴  $y$  上时, 同样有

$$\frac{\partial x}{\partial n} = 0, \frac{\partial y}{\partial n} = -1, r_1 = r_2, r_3 = r_4 \quad (14a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial n} = -1, \frac{\partial y}{\partial n} = 0, r_1 = r_3, r_2 = r_4 \quad (14b)$$

所以, 在对称轴上基本解函数(13)同样满足关系式(7a).

如果在  $Q_2$  和  $Q_4$  上布置负单位源时, 可构造出的基本解函数如下:

$$G(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{r_1 r_2}{r_3 r_4}\right) \quad (15)$$

当点  $P$  在对称轴  $x$  上时, 有  $r_1 = r_2, r_3 = r_4$ ; 或当点  $P$  在对称轴  $y$  上时, 有  $r_1 = r_3, r_2 = r_4$ . 此时在对称轴上基本解函数(15)满足条件(7b).

### 2.2 三维对称问题中基本解函数

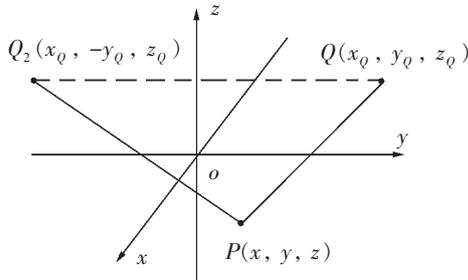
在三维问题中, 对称区域是关于面的对称. 如

果计算区域存在单对称面  $y = 0$ , 仅需考虑  $Q$  以及关于对称面  $y = 0$  的镜像点  $Q_2$  存在正单位源, 对观察点  $P$  同时作用 (如图 2a 所示), 基本解函数可写成

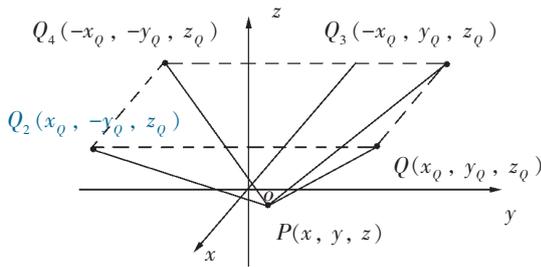
$$G(P, Q) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (16)$$

式中,  $r_1$  和  $r_2$  为  $P$  到  $Q$  和  $Q_2$  的距离. 对其他对称面, 例如  $x = 0$  或者  $z = 0$ , 同样可以得到其他形式的基本解函数, 这里不再写出具体表达式.

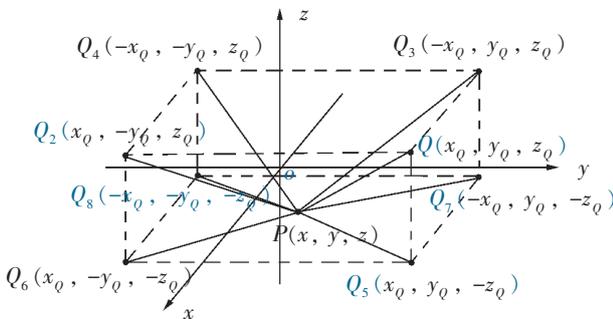
如果计算区域存在双对称面  $x = 0$  和  $y = 0$ , 源点  $Q_2$  及其对称点的设置如图 2b 所示, 基本解函数可以写成如下形式:



a 单对称面



b 双对称面



c 三对称面

图 2 三维对称问题源点与镜像点分布图

$$G(P, Q) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right) \quad (17)$$

同样, 如图 2c 所示, 如果存在三对称面  $x = 0$ ,  $y = 0$  和  $z = 0$ , 基本解函数为

$$G(P, Q) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^8 \frac{1}{r_i} \quad (18)$$

与二维问题推导类似, 不难得到在对称面上, 式(16), (17)和(18)满足关系式(7a).

在图 2a、b 和 c 中, 考虑在偶数下标源点处布置负单位源, 其余源点布置正单位源, 可以构造出如下 3 种对称条件下的基本解函数. 在单对称面  $x_2 = 0$  条件下, 基本解函数可写为

$$G(P, Q) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (19)$$

在双对称面  $x = 0$  和  $y = 0$  条件下, 基本解函数为如下形式:

$$G_1(P, Q) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_4} \right) \quad (20)$$

在三对称面  $x = 0$ ,  $y = 0$  和  $z = 0$  条件下的基本解函数为

$$G(P, Q) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^8 (-1)^{i-1} \frac{1}{r_i} \quad (21)$$

在对称面上, 很明显基本解函数(19), (20)和(21)满足关系式(7b). 因此, 根据不同对称性条件, 利用上述构造出的基本解函数可大大减少计算量, 节约计算时间.

### 3 MFS 在矩形各向同性薄板弯曲问题中的应用

以各向同性薄板的小挠度弯曲问题作为基本解方法的实例应用. 设在垂直于中面载荷  $q$  作用下的中面产生挠度  $w(x, y)$ , 以挠度表示的内力矩和内力为<sup>[12]</sup>

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (22a)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (22b)$$

$$M_{xy} = -2D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (22c)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (22d)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (22e)$$

式中:  $D$  为薄板的抗弯刚度, 且  $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ ;  $E$  和  $\nu$  为板的弹性模量和 Poisson 比.

令  $M = (M_x + M_y)/(1 + \nu)$ , 则  $M$  满足有如下 Poisson 方程

$$M = -D \nabla^2 w \quad (23a)$$

此外, 还有如下关系

$$\nabla^2 M = -q \quad (23b)$$

当然, 板的小挠度微分方程在大多数情况下写成四阶微分方程  $\nabla^2 \nabla^2 w = q$ . 本文着重于 MFS 在 Poisson 方程中应用, 因此将四阶微分方程写成 2 个 Poisson 方程(式(23a)和(23b)), 并对其进行分析计算. 对于给定边界力矩  $M$  和挠度的边界条件, 可对薄板弯曲问题 2 个联立的 Poisson 方程进行求解.

对四边简支矩形各向同性薄板, 在边界上, 有边界条件  $M = 0$ . 因此, 式(23a)的数值解可写为

$$M(P) = \sum_{i=1}^n B_i G(P, R_i) + M^*(P) \quad (24)$$

式中  $M^*(P)$  为特解, 可以写成

$$M^*(P) = -\frac{q}{4}(x^2 + y^2) \quad (25)$$

系数满足  $B_i$  如下条件:

$$\sum_{k=1}^n B_k G(P_i, R_k) = -M^*(P_i) \quad (26)$$

式中,  $P_i (i = 1, 2, \dots)$  为边界点. 在力矩  $M$  计算出来之后, 板弯曲挠度可由式(23b)进行数值求解, 可写为

$$w(P) = \sum_{i=1}^n F_i G(P, R_i) + w^*(P) \quad (27)$$

式中  $w^*(P)$  为特解, 其形式如下:

$$w^*(P) = \frac{1}{D} \left[ \frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^n B_i r_i (\ln r_i - 1) + \frac{q}{64} (x^2 + y^2)^2 \right] \quad (28)$$

根据边界条件  $w = 0$ , 系数  $F_i$  由下列线性方程组给出:

$$\sum_{i=1}^n F_i G(P_j, R_i) + w^*(P_j) = 0 \quad (29)$$

设正交各向同性矩形薄板两边长度为  $40 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ ; 受均匀载荷  $q = 100 \text{ N}$ . 其中与弹性常数相关的系数  $D = 8 \times 10^6 \text{ N}$ .

根据对称条件, 仅考虑关于  $x$  轴对称(如图 3a 所示), 式(24), (26), (27)和(29)中的基本解函数  $G(P, R_i)$  应取为式(9)形式; 当同时考虑关于  $x$  和  $y$  轴对称时(如图 3b 所示), 式(24), (26), (27)和(29)中的基本解函数  $G(P, R_i)$  则应该由式(13)表示. 在边界和虚拟边界上分别同时取 40 和 20 点进行计算, 所得数值结果如表 1 所示.

通过重新构造出的基本解函数, 对 Poisson 方程的一类边界值问题进行了计算, 取点数仅为不考虑对称条件计算量的 1/2 和 1/4. 由表 1 可知, 利用对称关系构造出的基本解函数可降低所求解的方程组维数, 用时可保持同样的精度. 因此, 在使用极少边界点的情况下, 本文得到的四边简支结果与解析解<sup>[12]</sup>误差很小.

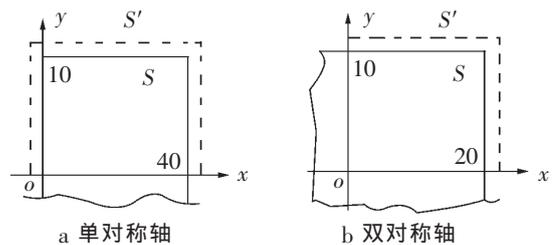


图 3 矩形薄板基本解方法数值计算中所取区域与边界示意图

表 1 矩形各向同性薄板沿轴挠度分布

| $x/\text{mm}$ | 数值解/( $\times 10^{-3} \text{ mm}$ ) |           | 解析解 <sup>[12]</sup> /<br>( $\times 10^{-3} \text{ mm}$ ) |
|---------------|-------------------------------------|-----------|--|
|               | 单对称轴                                | 双对称轴      |  |
| 5             | 9.045 06                            | 9.045 57  | 9.045 96   |
| 10            | 15.692 91                           | 15.692 83 | 15.693 62  |
| 15            | 19.170 25                           | 19.169 42 | 19.170 41  |
| 20            | 20.151 94                           | 20.150 61 | 20.151 63  |
| 25            | 19.171 12                           | 19.169 42 | 19.170 41  |
| 30            | 15.694 52                           | 15.692 83 | 15.693 62  |
| 35            | 9.045 12                            | 9.045 57  | 9.045 96   |

## 4 结论

MFS 是一种无网格计算方法, 不需要经过繁琐的积分运算, 计算维数低, 计算精度高. 文章将满足对称条件的基本解函数引入 MFS 中, 在自然满足条件(对称轴上)的边界上免于取点, 使方程组的数目大大减少. 计算时需输入的数据极大减少, 计算时间短, 精度得到保持. 总之, MFS 是计算小挠度板弯曲问题的有力工具, 而且此方法也很容易推广到其他关于调和或双调和方程的各领域数值计算中.

### 参考文献:

- [1] Aleksidze M A. On approximate solutions of a certain mixed boundary value problem in the theory of harmonic functions [J]. *Differential Equations*, 1966, 2(4):515-518.
- [2] Kupradze V D. A method for the approximate solution of limiting problems in mathematical physics [J]. *Comput Math Math Phys*, 1964, 4(6):199-205.
- [3] Kupradze V D. Potential methods in the theory of elasticity [M]. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1965.
- [4] Kupradze V D. On the approximate solution of problems in mathematical physics [J]. *Russian Math Surveys*, 1967, 22(2):58-108.
- [5] Kupradze V D, Aleksidze M A. The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems [J]. *Comput Math Math Phys*, 1964, 4(4):82-126.
- [6] Webster W C. The flow about arbitrary, three-dimensional smooth bodies [J]. *Journal of Ship Research*, 1975, 19(4):206-218.
- [7] Simos N, Sadegh A M. An indirect BIM for static analysis of spherical shells using auxiliary boundaries [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, 32(2):313-325.
- [8] Heise U. Application of the singularity method for the formulation of plane elastostatical boundary value problems as integral equations [J]. *Acta Mechanica*, 1978, 31(1/2):33-69.
- [9] Redekop D, Cheung R S W. Fundamental solutions for the collocation method in three-dimensional elastostatics [J]. *Computers & Structures*, 1987, 26(4):703-707.
- [10] Shigeta T, Young D L. Method of fundamental solutions with optimal regularization techniques for the Cauchy problem of the Laplace equation with singular points [J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228(6):1903-1915.
- [11] Chen W, Hon Y C. Numerical investigation on convergence of boundary knot method in the analysis of homogeneous Helmholtz, modified Helmholtz, and convection-diffusion problems [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, 192(15):1859-1875.
- [12] 吴连元. 板壳理论 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1989.

(责任编辑: 仇慧)