

# 电致伸缩材料非线性力学计算中的几个问题

魏海娥<sup>1</sup>, 蒋 泉<sup>1, 2\*</sup>, 周志东<sup>3</sup>

(1. 南通大学 理学院, 江苏 南通 226007; 2. 南通大学 建筑工程学院, 江苏 南通 226019;  
3. 厦门大学 材料学院, 福建 厦门 361005)

**摘要:** 由于电致伸缩材料本构方程的非线性特性, 该材料在力学理论计算、材料参数测试中会出现一定的困难。同时, 电场体积力在计算与实验中也应纳入考虑范围。文章给出了一种合适的电致伸缩材料的本构方程, 并指出电场体积力的表达式取为 Maxwell 应力较为合适。利用一种简单模型, 给出了 0 阶近似下的 2 种处理方式(考虑电场体积力与否)的近似解以及一般处理方式下的解析解。利用推导结果得到了这 3 种不同处理方式下的位移、应力场数值算例。结果表明, 应根据不同条件, 在具体计算中合理地处理电场非线性效应以及电场体积力才能得到符合实际情况的结果。

**关键词:** 电致伸缩; 非线性效应; 应力场; 电场体积力

中图分类号: O343.5

文献标志码: A

文章编号: 1673-2340(2011)03-0046-07

## Some Problems of Nonlinear Mechanics for Electrostrictive Materials

WEI Hai-e<sup>1</sup>, JIANG Quan<sup>1, 2\*</sup>, ZHOU Zhi-dong<sup>3</sup>

(1. School of Sciences, Nantong University, Nantong 226007, China;

2. School of Architecture Engineering, Nantong University, Nantong 226019, China;

3. College of Materials, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** It is difficult to give the theoretical calculating and constants measuring for the electrostrictive materials, since the constitutive equations of this kind of materials are nonlinear. In addition, the electric body force should be taken into consideration. In this paper, the proper constitutive equations have been given. And it is suggested that Maxwell stress is suitable for the electric body force. According to the three different treatments, i.e., the two approximate solutions of 0 order (electrical body force considered or not) and analytical solution for general case, the general solutions for a simple model are worked out. Finally, several numerical examples of displacement and stress fields are listed in the table. The numerical results reveal that, the electric nonlinear effect and the electric body force should be considered properly according to the different conditions.

**Key words:** electrostriction; nonlinear effect; stress field; electric body force

不同于线性压电材料, 电致伸缩材料不仅其应力、应变与电场的平方成正比, 而且介电常数与材料应变也成正比, 因此, 电致伸缩材料本构方程呈非线性。由于电致伸缩材料贮能密度大, 机电转换

收稿日期: 2011-04-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(10902055, 10802070); 江苏省“青蓝工程”青年骨干教师培养计划项目; 南通大学创新人才基金项目

作者简介: 魏海娥(1985—), 女, 硕士研究生。

\* 通信联系人: 蒋泉(1974—), 男, 副教授, 博士, 主要从事固体力学方面的研究。E-mail: jiang.q@ntu.edu.cn

效率高, 其常被用来制造作动器、微机电系统 (MEMS) 和人工肌肉等。

在电致伸缩材料理论分析方面, Kuang<sup>[1]</sup>利用变分原理对电、磁弹性固体进行了深入的研究, 并对电致伸缩本构方程、电场体积力以及力学边界条件进行了详细的论述; Jiang 和 Gao<sup>[2]</sup>对空心电致伸缩圆筒中的轴对称应力进行了讨论; Gao 和 Mai<sup>[3]</sup>对机-电混合加载条件下电致伸缩介质的断裂进行了富有意义的探讨; Gao<sup>[4]</sup>等人还给出了电致伸缩固体中裂纹问题的解析解; Beom<sup>[5]</sup>在 2006 年对电致伸缩材料中绝缘裂纹端部渐进场进行了研究; Jiang<sup>[6]</sup>等人给出了该材料的位移函数基本解法。在电致伸缩材料参数测量方面, 国内外学者对包括陶瓷和聚合物在内大量电致伸缩材料的电致伸缩常数做了测量。Sunder 和 Newnham<sup>[7]</sup>对低介电常数材料的电致伸缩电致伸缩常数进行了测定; Cheng<sup>[8]</sup>等人研究了共聚合物的电致伸缩性能; Eury<sup>[9]</sup>讨论了高分子聚合物的电致伸缩性能; Shekel 和 Klingenberg<sup>[10]</sup>分别测定了 MP1495 和 MP1880 的电致伸缩常数。结果表明, 不同作者测量的电致伸缩常数数值差异很大。可以看出, 考虑不同的边界条件以及不同电场体积力表达形式, 都将导致电致伸缩力学理论计算和材料常数测定结果的多样性。

因此, 本文提出了一种较为合适的电致伸缩非线性本构方程以及电场体积力表达式。同时对一种理想的均匀电场加载模型分几种不同的处理方式进行了理论推导和数值计算。结果表明, 在变形与介电常数较大时, 电致伸缩非线性效应以及电场体积力对理论计算与常数测量影响很大。

## 1 电致伸缩材料基本方程

### 1.1 本构方程

Stratton<sup>[11]</sup>利用虚功原理给出了电场作用下的电致伸缩应力, Landau<sup>[12]</sup>推导了在电场中固体电介质的电致伸缩应力, 但均未给出本构方程; Kuang<sup>[13]</sup>对固体电介质在电场中受力进行了详细的分析。应用热力学的内分量理论, 定义电 Gibbs 自由能如下:

$$g^e = g^e(\mathbf{e}, T, \mathbf{E}) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} C_{ijkl}^{ET} e_{ij} e_{kl} - d_{kij}^T e_{ij} E_k - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{eT} E_i E_j - \\ & \frac{1}{3} C_{ijklmn}^{ET} e_{ij} e_{kl} e_{mn} - \frac{1}{2} P_{mijkl}^T E_m e_{ij} e_{kl} - \\ & \frac{1}{3} \varepsilon_{ijm}^{eT} E_i E_j E_m - \frac{1}{2} l_{ijkl}^T e_{ij} E_k E_l + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

式中,  $C_{ijkl}^{ET}$  和  $C_{ijklmn}^{ET}$  为等温、等电场强度的四、六阶刚度;  $e_{ij}$  和  $E_i$  分别是应变和电场强度;  $\varepsilon_{ij}^{eT}$  和  $\varepsilon_{ijm}^{eT}$  是等温、等应变的二阶和三阶介电常数;  $d_{kij}^T$ 、 $P_{mijkl}^T$  和  $l_{ijkl}^T$  分别为等温压电常数、电弹性常数和电致伸缩常数。

根据如下关系:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial g^e}{\partial e_{ij}}, \quad D_i = -\frac{\partial g^e}{\partial E_i} \quad (2)$$

在等温情况下, 应力和电位移为

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & C_{ijkl}^{ET} e_{kl} - d_{kij}^T E_k - C_{ijklmn}^{ET} e_{kl} e_{mn} - \\ & \frac{1}{2} P_{mijkl}^T E_m e_{kl} - \frac{1}{2} l_{ijkl}^T E_k E_l + \dots \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} D_k = & d_{kij}^T e_{ij} + \varepsilon_{ik}^{eT} E_i + P_{kijmn}^T e_{ij} e_{mn} + \\ & \varepsilon_{ijk}^{eT} E_i E_j + l_{ijkl}^T e_{ij} E_l + \dots \end{aligned} \quad (3b)$$

对于对称的晶体以及聚合物, 具有奇数项下标的常数退化为 0。忽略六阶以上的高阶小量, 得到电致伸缩本构方程如下:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ET} e_{kl} - \frac{1}{2} l_{ijkl}^T E_k E_l \quad (4a)$$

$$D_k = (\varepsilon_{kl}^{eT} + l_{mnkl}^T e_{mn}) E_l \quad (4b)$$

由式(4)可以看出, 应力与电场平方项成正比, 介电常数与应变有关。对各向同性材料, 本构方程可以表示为

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij} - \frac{1}{2} a_1 E_i E_j - \frac{1}{2} a_2 E_k E_k \delta_{ij} \quad (5a)$$

$$D_k = \varepsilon_{kl} E_l \quad (5b)$$

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^{eT} + a_1 e_{kl} + a_2 e_{kk} \delta_{kl} \quad (5c)$$

式中:  $a_1$  和  $a_2$  为相互独立的 2 个电致伸缩常数;  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 符号;  $\lambda$  和  $\mu$  是 Lamé 常数, 可以用 Young's 弹性模量  $Y$  和泊松比  $\nu$  表示为

$$\lambda = Y\nu / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)] \text{ 和 } \mu = Y / [2(1 + \nu)]$$

## 1.2 电场体积力

对于高介电常数电介质, 必须考虑电场体积力. 一般电荷库仑力为最直观的电场体积力, 但这一认识并不全面. 实验结果表明, 不含自由电荷的绝缘体在电场中也会存在电场体积力. Sitraton<sup>[11]</sup>利用能量守恒定律, 给出了笛卡尔坐标系中的电场体积力表达式如下:

$$f_i^e = \rho E_i - \frac{1}{2} E_k E_k \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_1 E_i E_j + a_2 E_k E_k \delta_{ij}) + \frac{\partial (C_{ijkl}^e e_{kl})}{\partial x_i} \quad (6)$$

式中, 首项是电荷所受库仑力, 第二项和第三项是由材料介电常数以及电场不均匀引起的电场体积力, 最后一项为纯弹性效应.

另外, Landau 和 Lifshitz<sup>[12]</sup>根据虚位移原理, 得到了如下形式的电弹性应力:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \frac{1}{2} (2\varepsilon_0 - a_1) E_i E_j - \frac{1}{2} (\varepsilon_0 + a_2) E_k E_k \delta_{ij} \quad (7)$$

式中  $\sigma_{ij}^0$  是纯弹性应力,  $\varepsilon_0$  是无应变时的介电常数. Landau 和 Lifshitz<sup>[12]</sup>同时指出电场体积力也可以表示为  $f_i^e = \partial \sigma_{ij}^e / \partial x_j$ , Kuang<sup>[13]</sup>和 Suo<sup>[14]</sup>等人也对上面电应力表达式进行讨论, 本文不再赘述.

事实上, 由式(6)和(7)表示的电场体积力为电弹性有质动力, 并非真正的电场体积力, 均包含了机械电弹性应力. 本文认为, 忽略介质的变形时(刚性介质), 电场体积力可以简单的表示一类应力的散度如下:

$$f_i^e = \frac{\partial \sigma_{ij}^M}{\partial x_j} \quad (8)$$

式中,  $\sigma_{ij}^M$  称为 Maxwell 应力, 可以表示为

$$\sigma_{ij}^M = \frac{1}{2} (D_i E_j + D_j E_i - D_k E_k \delta_{ij}) \quad (9)$$

这里特别指出, 以 Maxwell 应力张量表示的电场体积力形式比较合理, 其可通过 Minkowski 变换自然得到. 可变形固体的电场体积力同样可以表示为上面的形式, 可用刚性介质中的 Maxwell 应力进行推广, 即可变形介质所受的电场体积力也可以用

式(9)来表示. 但是需要指出的是, 由于变形, 介电常数将发生变化, 介质中的电场需要重新计算.

## 1.3 平衡方程、几何方程及边界条件

与纯弹性材料类似, 电弹性材料的力学平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i^e = 0 \quad (10)$$

且几何关系如下:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

电致伸缩计算中的力学边界条件分为位移边界以及应力边界条件可写成以下形式:

$$u_i = \bar{u}_i \quad (12a)$$

$$(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^M) n_j = \bar{X}_i^M + \sigma_{ij}^{Mc} n_j \quad (12b)$$

式中,  $\bar{u}_i$  为已知位移边界值,  $\bar{X}_i^M$  为应力边界面的外加机械面力,  $\sigma_{ij}^{Mc}$  为外界环境的 Maxwell 应力.

## 2 3种典型计算条件下电致伸缩模型的位移、应力场

事实上, 在复杂边界条件、复杂机-电加载条件下, 由于非线性本构关系, 电致伸缩材料的力学计算在数学上存在着本质上的困难. 为了研究电致伸缩非线性应力与电场体积力在不同条件下对理论计算和电致伸缩常数测量的影响, 本文以上下涂有柔性电极涂层的电致伸缩块体(其尺寸为  $b \times c \times h$ )作为模型(见图1), 利用不同处理方式, 对模型的位移、应力场进行了计算. 在理论计算中, 同时假定模型为自由边界, 且不考虑电场、应力场的边缘效应.

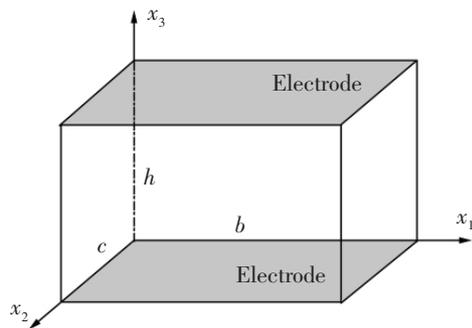


图1 上下表面涂有电极的电致伸缩块体模型示意图

对本文研究模型, 令上下板之间电势差恒为  $U$ . 基于前面假定, 模型中的电场与应力场在全区域均匀分布, 平衡方程自动满足. 因此, 在后面理论计算中, 仅需根据边界条件即可求出全区域电场、位移与应力分布. 介质中的电场强度可表示如下:

$$E_1 = 0, E_2 = 0, E_3 = \frac{U}{h} \quad (13)$$

在此电场加载下, 不计刚体平移与转动, 位移场可以假设为

$$u_1 = \gamma_1 x_1, u_2 = \gamma_2 x_2, u_3 = \gamma_3 x_3 \quad (14)$$

式中,  $\gamma_1, \gamma_2$  和  $\gamma_3$  为待定常数. 根据式(11), 应变为如下形式:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \gamma_1, e_{22} = \gamma_2, e_{33} = \gamma_3, \\ e_{12} &= 0, e_{13} = 0, e_{23} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

本文对 3 种典型的处理方式分别进行了理论计算:

- 1) 不计电场体积力及介电常数与应变的耦合;
- 2) 不计变形对介电常数的影响;
- 3) 全面考虑电场体积力和介电常数与形变之间的耦合.

当忽略电场体积力和应变对介电常数的影响时, 此为不计电场体积力的 0 阶近似计算 (计算方式(1)). 由式(12b)得

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 0, \sigma_{22} = 0, \sigma_{33} = 0, \\ \sigma_{12} &= 0, \sigma_{13} = 0, \sigma_{23} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

将式(13)、(15)和(16)代入本构方程(5a)中, 可以得到全空间各点位移如下

$$u_3 = \frac{a_1[a_2 U^2 - 2h^2(\lambda + \mu)] + 2[a_2^2 U^2 - a_2 h^2 \mu + \varepsilon_0 h^2(2\lambda + \mu)]}{2h^2[a_1 U^2(2\lambda + \mu) + \mu(6\lambda h^2 + 4\mu h^2 - a_2 U^2)]} U^2 x_3 \quad (20a)$$

$$u_1 = \frac{a_1^2 U^2 + 2a_2^2 U^2 + a_1(3a_2 U^2 - 2h^2 \lambda) + 4a_2 h^2 \mu + 4\varepsilon_0 h^2(\lambda + \mu)}{4h^2[a_1 U^2(2\lambda + \mu) + \mu(6\lambda h^2 + 4\mu h^2 - a_2 U^2)]} U^2 x_1 \quad (20b)$$

$$u_2 = \frac{a_1^2 U^2 + 2a_2^2 U^2 + a_1(3a_2 U^2 - 2h^2 \lambda) + 4a_2 h^2 \mu + 4\varepsilon_0 h^2(\lambda + \mu)}{4h^2[a_1 U^2(2\lambda + \mu) + \mu(6\lambda h^2 + 4\mu h^2 - a_2 U^2)]} U^2 x_2 \quad (20c)$$

同样, 可以得到介质中的应力场如下

$$\sigma_{11} = \frac{U^2[2a_1 a_2 U^2 \mu + a_1^2 U^2(\lambda + \mu) + \mu(3a_2^2 U^2 + 2h^2 \varepsilon_0(3\lambda + 2\mu))]}{2h^2[a_1 U^2(2\lambda + \mu) + \mu(-a_2 U^2 + 2h^2(3\lambda + 2\mu))]} \quad (21a)$$

$$u_3 = \frac{U^2}{2h^2 \mu(2\mu + 3\lambda)} [a_1(\mu + \lambda) + a_2 \mu] x_3 \quad (17a)$$

$$u_1 = \frac{U^2}{4h^2 \mu(2\mu + 3\lambda)} (-a_1 \lambda + 2a_2 \mu) x_1 \quad (17b)$$

$$u_2 = \frac{U^2}{4h^2 \mu(2\mu + 3\lambda)} (-a_1 \lambda + 2a_2 \mu) x_2 \quad (17c)$$

当考虑电场体积力, 但忽略介质对介电常数的影响时, 此为计入电场体积力的 0 阶近似计算 (计算方式(2)). 由式(5)、(9)、(12b)和(13)得

$$\sigma_{11} = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2h^2}, \sigma_{22} = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2h^2}, \sigma_{33} = -\frac{\varepsilon_0 U^2}{2h^2} \quad (18a)$$

$$\sigma_{12} = 0, \sigma_{13} = 0, \sigma_{23} = 0 \quad (18b)$$

将式(13)、(15)和(18)代入本构方程(5a)中, 可以得到

$$u_3 = \frac{U^2}{2h^2 \mu(2\mu + 3\lambda)} [a_1(\mu + \lambda) + a_2 \mu - \varepsilon_0(\mu + 2\lambda)] x_3 \quad (19a)$$

$$u_1 = \frac{U^2}{4h^2 \mu(2\mu + 3\lambda)} [-a_1 \lambda + 2a_2 \mu + \varepsilon_0(\mu + \lambda)] x_1 \quad (19b)$$

$$u_2 = \frac{U^2}{4h^2 \mu(2\mu + 3\lambda)} [-a_1 \lambda + 2a_2 \mu + \varepsilon_0(\mu + \lambda)] x_2 \quad (19c)$$

当考虑电场体积力和应变对介电常数的影响时, 此为一般条件下的强非线性电弹性分析 (计算方式(3)). 由式(5)、(9)、(12b)、(13)和(15)得

$$\sigma_{22} = \frac{U^2 [2a_1 a_2 U^2 \mu + a_1^2 U^2 (\lambda + \mu) + \mu (3a_2^2 U^2 + 2h^2 \varepsilon_0 (3\lambda + 2\mu))]}{2h^2 [a_1 U^2 (2\lambda + \mu) + \mu (-a_2 U^2 + 2h^2 (3\lambda + 2\mu))]} \quad (21b)$$

$$\sigma_{33} = -\frac{U^2 [2a_1 a_2 U^2 \mu + a_1^2 U^2 (\lambda + \mu) + \mu (3a_2^2 U^2 + 2h^2 \varepsilon_0 (3\lambda + 2\mu))]}{2h^2 [a_1 U^2 (2\lambda + \mu) + \mu (-a_2 U^2 + 2h^2 (3\lambda + 2\mu))]} \quad (21c)$$

$$\sigma_{12} = 0, \sigma_{13} = 0, \sigma_{23} = 0 \quad (21d)$$

从上述3种典型的计算方式来看,前2种属于近似计算,与传统的热应力以及存在体积力的弹性问题相似,计算过程简单,结果简洁.这2种方式实质是将机-电解耦,先求电场,再求应力场,将问题作线性处理,属于0阶近似.第3种计算方式为全面考虑了电场体积力和介电常数与变形之间的耦合,计算过程复杂.由于本构方程的非线性,计算方式(3)仅能在极少数情况下得到解析解.同时可以看出,计算方式(3)所得位移场与应力场不仅与外界加载以及材料常数有关,还与材料的几何尺寸有关,呈很强的物理与几何非线性效应.

### 3 算例分析

很明显,前面给出的3种不同计算方式所得结果在表达式上有较大差异,在本部分以数值算例形式对这3种结果进行比较.本文中的模型取 $x_3$ 方向为单位厚度1并且在该方向上电场加载 $U = 10^5$  V,电致伸缩常数 $a_2 = -4.899 \times 10^{-6}$  Fm<sup>-1</sup>, $a_1 = 2a_2$ .

通过式(16)~(21)可知,各向同性电致伸缩材

料中的位移,应力场在3种计算方式上均满足如下条件 $u_1 = u_2, \sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = -\sigma_3, \sigma_{12} = 0, \sigma_{13} = 0, \sigma_{23} = 0$ .基于这些关系,本文仅给出在 $x_1 = b$ 和 $x_3 = h$ 时的位移 $u_1, u_3$ 以及全场 $\sigma_3$ 的数值.为了便于比较,本文对位移和应力做无量纲处理,即 $u_1^* = u_1/b, u_3^* = u_3/h$ ,以及 $\sigma_{33}^* = \sigma_{33}/[U^2 a_2/(4h_2)]$ .

表1给出了无量纲位移 $u_3^*, u_1^*$ 以及无量纲应力 $\sigma_{33}^*$ 在 $Y = 100$  MPa和 $\nu = 0.26$ 时不同介电常数下的数值.从数值结果可以看出,计算方式(1),由于未考虑电场体积力,在电场强度恒定条件下,位移与应力为常数.计算方式(2)与(3),由于考虑电场体积力,数值均变化明显.在介电常数小于电致伸缩常数2个数量级时,3种计算方式结果差别不大.此时计算可以忽略电场体积力,直接利用计算方式(1)进行分析,所得结果无较大差别.但是在介电常数与电致伸缩常数量纲相差不大,甚至大于电致伸缩常数时,3种计算方式下的 $u_1^*, u_3^*$ 和 $\sigma_3^*$ 的计算值

表1 不同介电常数 $\varepsilon_0$ 时无量纲位移和应力数值

Log(  $\varepsilon_0/a_2$  )	无量纲位移 $u_3^*/u_1^*$ ( $10^{-6}$ )			无量纲应力 $\sigma_{33}^*$		
	计算方式(1)	计算方式(2)	计算方式(3)	计算方式(1)	计算方式(2)	计算方式(3)
-3.000 0	-607.476 0/9.798 0	-607.848 3/10.042 3	-608.520 2/10.485 0	0	0.002 0	0.005 6
-2.600 0	-607.476 0/9.798 0	-608.411 2/10.413 3	-609.083 5/10.855 6	0	0.005 0	0.008 6
-2.200 0	-607.476 0/9.798 0	-609.825 2/11.343 5	-610.498 3/11.786 4	0	0.012 6	0.016 2
-1.800 0	-607.476 0/9.798 0	-613.376 9/13.680 2	-614.052 3/14.124 5	0	0.031 7	0.035 3
-1.400 0	-607.476 0/9.798 0	-622.298 5/19.549 6	-622.979 4/19.997 6	0	0.079 6	0.083 3
-1.000 0	-607.476 0/9.798 0	-644.708 4/34.293 0	-645.403 4/34.750 3	0	0.200 0	0.203 7
-0.600 0	-607.476 0/9.798 0	-700.999 6/71.326 7	-701.729 9/71.807 1	0	0.502 4	0.506 3
-0.200 0	-607.476 0/9.798 0	-842.396 6/164.351 0	-843.215 6/164.889 9	0	1.261 9	1.266 3
0.200 0	-607.476 0/9.798 0	-1 197.569 8/398.017 6	-843.215 6/398.703 1	0	3.169 8	3.175 4
0.600 0	-607.476 0/9.798 0	-2 089.724 5/984.961 5	-2 091.326 3/986.015 3	0	7.962 1	7.970 7
1.000 0	-607.476 0/9.798 0	-4 330.716 0/2 459.298 0	-4 333.723 9/2 461.276 9	0	20.000 0	20.016 2

相差很大, 电场体积力必须纳入考虑范围. 同时, 从表 1 中可以看出, 无论介电常数取何值时, 计算方式(2)和(3)所得变形与应力数值相差不大. 这种现象表明, 在小变形条件下, 无论介电常数为何值时, 均可以利用计算方式(2)对电致伸缩理论问题进行分析, 此时计算误差不大.

表 2 给出了无量纲位移  $u_3^*$ ,  $u_1^*$  以及无量纲应力  $\sigma_{33}^*$  在  $\varepsilon_0 = 4.9 \times 10^{-6} \text{ Fm}^{-1}$ ,  $\nu = 0.26$  和  $Y_0 = 100 \text{ MPa}$

时不同 Young's 模量下的数值. 总体上, 当弹性模量较小(变形较大)时, 3 种计算方式下,  $u_1^*$ ,  $u_3^*$  和  $\sigma_{33}^*$  数值相差较大; 当弹性模量较大(变形较小)时, 3 种计算方式下,  $u_1^*$ ,  $u_3^*$  和  $\sigma_{33}^*$  数值相差较小. 这里需要指出的是, 在以上算例中少数无量纲位移数值较大, 已超出小变形范畴, 本文的基本方程对这些位移的计算不再有效. 但这些极少数量的数值结果并不影响整体数值分析.

表 2 不同 Young's 模量时无量纲位移和无量纲应力数值

Log( Y/Y <sub>0</sub>  )	无量纲位移 $u_3^*/u_1^*$ ( $\times 10^{-6}$ )			无量纲应力 $\sigma_{33}^*$		
	计算方式(1)	计算方式(2)	计算方式(3)	计算方式(1)	计算方式(2)	计算方式(3)
0	-607.476 0/9.798 0	-979.800 0/254.748 0	-980.705 3/255.343 6	0	2.000 0	2.004 9
0.300 0	-304.459 2/4.910 6	-491.063 3/127.676 4	-491.290 5/127.826 0	0	2.000 0	2.002 4
0.600 0	-152.591 1/2.461 1	-246.114 6/63.989 8	-246.171 7/64.027 4	0	2.000 0	2.001 2
0.900 0	-76.476 7/1.233 5	-123.349 5/32.070 9	-123.363 9/32.080 3	0	2.000 0	2.000 6
1.200 0	-38.329 1/0.618 2	-61.821 2/16.073 5	-61.824 8/16.075 9	0	2.000 0	2.000 3
1.500 0	-19.210 1/0.309 8	-30.984 0/8.055 8	-30.984 9/8.056 4	0	2.000 0	2.000 2
1.800 0	-9.627 8/0.078 4	-15.528 8/4.037 5	-15.529 0/4.037 6	0	2.000 0	2.000 1
2.100 0	-4.825 4/0.077 8	-7.782 8/2.023 5	-7.782 9/2.023 6	0	2.000 0	2.000 0
2.400 0	-2.418 4/0.039 0	-3.900 7/1.014 2	-3.900 7/1.014 2	0	2.000 0	2.000 0
2.700 0	-1.212 1/0.019 6	-1.955 0/0.508 3	-1.955 0/0.508 3	0	2.000 0	2.000 0
3.000 0	-0.607 5/0.009 8	-0.979 8/0.254 7	-0.979 8/0.254 7	0	2.000 0	2.000 0

#### 4 结论

本文首先对电致伸缩材料力学计算基本方程进行了讨论, 提出了一种合适的电致伸缩材料的本构方程以及电场体积力的表达式. 其次, 通过上下表面涂有柔性电极涂层的电致伸缩块体作为模型, 对不同计算方式下的位移和应力场进行了理论计算. 最后给出了 3 种计算方式的数值算例. 结果表明, 在变形与介电常数较大时, 电致伸缩非线性效应对理论计算与参数测量影响较大. 对电致伸缩材料应力场进行理论计算时, 在介电常数小于电致伸缩常数 2 个量级条件下, 可不考虑电场体积力(计算方式(1)); 其它条件下, 原则上必须考虑电场体积力效应, 但可进行机-电解耦进行理论计算(计算方式(2)).

#### 参考文献:

- [1] Kuang Z B. Some variational principles in elastic dielectric and elastic magnetic materials[J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2008, 27(3):504-514.
- [2] Jiang Quan, Gao Cunfa. Axisymmetric stress in an electrostrictive hollow cylinder under electric loading[J]. *Acta Mechanica*, 2010, 211(3/4):309-321.
- [3] Gao Cunfa, Mai Y W. Fracture of electrostrictive solids subjected to combined mechanical and electric loads[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2010, 77(10):1503-1515.
- [4] Gao Cunfa, Mai Y W, Zhang Ning. Solution of a crack in an electrostrictive solid[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, 47(3/4):444-453.
- [5] Beom H G, Kim Y H, Cho C, et al. Asymptotic analysis of an impermeable crack in an electrostrictive material subjected to electric loading[J]. *International Journal of Solids and*

- Structures, 2006, 43(22/23):6869-6886.
- [6] 蒋泉, 许薇, 毛贤君. 电致伸缩材料力学问题的位移函数解法[J]. 南通大学学报:自然科学版, 2008, 7(4):56-60.
- [7] Sundar V, Newnham R E. Converse method measurements of electrostriction coefficients in low-K dielectrics[J]. Material Research Bulletin, 1996, 31(5):545-554.
- [8] Cheng Z Y, Bharti V, Xu T B, et al. Electrostrictive poly(vinylidene fluoride-trifluoroethylene) copolymers[J]. Sensors and Actuators A:Physical, 2001, A90(1/2):138-147.
- [9] Eury S, Yimnirun R, Sundar V, et al. Converse electrostriction in polymers and composites[J]. Materials Chemistry and Physics, 1999, 61(1):18-23.
- [10] Shkel Y M, Klingenberg D J. Material parameters for electrostriction[J]. Journal of Applied Physics, 1996, 80(8):4566-4571.
- [11] Stratton J A. Electromagnetic Theory[M]. New York: McGraw-Hill, 1941.
- [12] Landau L D, Lifshitz E M. Electrodynamics of Continuous Media[M]. Oxford: Pergamon Press, 1960.
- [13] 匡震邦. 非线性连续介质力学[M]. 上海:上海交通大学出版社, 2002.
- [14] Suo Zhigang, Zhao Xuanhe, Greene W H. A nonlinear field theory of deformable dielectrics[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2008, 56(2):467-486.

(责任编辑:仇慧)