一类特殊矩阵的逆特征值问题

吴春红, 卢琳璋*
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 讨论一类具有特殊形式的矩阵 A_n 的两类逆特征值问题. 问题 I 是由 A_n 的顺序主子阵 $A_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的最小、最大特征值来构造矩阵 A_n; 问题 II 是由 A_n 的顺序主子阵 $A_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的所有特征值来构造矩阵 A_n. 分别给出了两类逆特征值问题有解的充分必要条件且结果具有构造性, 另外提供了相应的算法和数值例子, 数值结果表明算法很有效.

关键词: 逆特征值问题; Jacobi 矩阵; 箭状阵; 最大特征值; 最小特征值
中图分类号: O 241.6　　文献标识码: A　　文章编号: 0438-0479(2009)01-0022-05

本文讨论的矩阵具有如下形式:

$$
\begin{pmatrix}
a_1 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & & & & \\
b_1 & a_2 & & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & & & \\
b_{m-1} & & & a_m & & & & & \\
b_m & & & & a_{m+1} & b_{m+1} & & & \\
 & & & & b_{m+1} & a_{m+2} & \ddots & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\
 & & & & & & b_{n-1} & a_n
\end{pmatrix} \tag{1}
$$

其中 $a_i, i=2,3,\cdots,m+1$ 互不相同, 且所有的 $b_i>0$. 当 $m=0$ 时, 具有形式(1) 的矩阵为 Jacobi 阵, Jacobi 矩阵的逆特征值问题具有广泛的应用, 关于这一问题的研究已有一些较好的结果[1-7]; 当 $m=n$ 时, 具有形式(1) 的矩阵就变成了除了第一行, 第一列及对角线元素外其余元素都为零的矩阵, 即箭状矩阵, 箭状矩阵在现代控制理论[8-9] 和星形弹簧质量系统的振动问题[10] 中有广泛应用, 文献[11] 讨论了其逆特征值问题. 本文研究具有形式(1) 的矩阵的逆特征值问题, 实际上是Jacobi阵和箭状矩阵逆特征值问题的进一步推广.

文章中用 A_n 表示具有形式(1) 的一类特殊矩阵; A_j 表示 A_n 的 $j\times j$ 阶顺序主子阵, 其特征值为 $\lambda_1^{(j)} \leqslant \lambda_2^{(j)} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j^{(j)}$; $\varphi_j(\lambda)$ 表示 A_j 的特征多项式; I_j 为 j 阶单位阵; e_j 为 I_n 的第 j 列.

本文讨论如下两类逆特征值问题:

问题 I　给定 $2n-1$ 个实数 $\lambda_1^{(j)}, \lambda_j^{(j)}(j=1,2,\cdots,n)$, 讨论什么条件下, 可构造出具有形式(1) 的矩阵 A_n, 使得 $\lambda_1^{(j)}, \lambda_j^{(j)}$ 分别为 A_j 的最小, 最大特征值.

问题 II　给定 $\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)} < \lambda_2^{(2)}, \cdots, \lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \cdots < \lambda_n^{(n)}$, 且 $\lambda_1^{(j)} < \lambda_1^{(j-1)} < \lambda_2^{(j)} < \lambda_2^{(j-1)} < \cdots < \lambda_{j-1}^{(j-1)} < \lambda_j^{(j)}$, 讨论什么条件下, 可构造出具有形式(1) 的矩阵 A_n, 使得 $\lambda_i^{(j)}(i=1,2,\cdots,j, j=1,2,\cdots,n)$ 为 A_j 的特征值.

文献[12] 中将 $\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)} < \lambda_2^{(2)}, \cdots, \lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \cdots < \lambda_n^{(n)}$ 共 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个数称为 A_n 的 Ritz 值, 因为当我们用 Rayleigh-Ritz 法求对称阵的特征值时, 通常将 A_n 投影到一个维数较小的子空间 S, 取 Q 为子空间 S 的标准正交基, 则 $H=Q^*AQ$ 的特征值称为 A_n 的 Ritz 值, 特别地, 若取 $Q=[e_1,e_2,\cdots,e_j]$, 则 $Q^*AQ=A_j$.

本文首先讨论 A_n 的一些性质, 然后推出了问题 I 和问题 II 有解的充分必要条件, 最后分别给出了求解两类逆特征值问题的算法和数值例子.

1　A_n 的性质

令 $\varphi_j(\lambda)=\det(\lambda I_j-A_j)$, $\varphi_0(\lambda)=1$; $b_0=0$.

引理 1　对给定具有形式(1) 的矩阵 A_n, 其特征多项式序列 $\{\varphi_j(\lambda)\}_{j=1}^n$ 满足下列递推关系:

$$\varphi_j(\lambda)=(\lambda-a_j)\varphi_{j-1}(\lambda)-b_{j-1}^2\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda-a_i),\quad j=1,2,\cdots,m+1 \tag{2}$$

$$\varphi_j(\lambda)=(\lambda-a_j)\varphi_{j-1}(\lambda)-b_{j-1}^2\varphi_{j-2}(\lambda),\quad j=m+2,m+3,\cdots,n \tag{3}$$

证明　利用行列式展开易证.

因 $a_i(i=2,3,\cdots,m)$ 互不相同, 不妨假定 $a_2<a_3$

收稿日期: 2008-06-30
基金项目: 国家自然科学基金(10531080)资助
* 通讯作者: lzlu@xmu.edu.cn

$< \cdots < a_m$, 则

引理 2　若 $A_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的特征值为 $\lambda_1^{(j)} \leqslant \lambda_2^{(j)} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j^{(j)}$, 则 $\lambda_i^{(j)}(j=1,2,\cdots,m, i=1,2,\cdots,j)$ 为互不相同的实数, 且

$$\lambda_1^{(j)} < a_2 < \lambda_2^{(j)} < \cdots < \lambda_{j-1}^{(j)} < a_j < \lambda_j^{(j)} \tag{4}$$

证明　由式(2) 得

$$\varphi_j(\lambda) = (\lambda - a_j)\varphi_{j-1}(\lambda) - b_{j-1}^2 \prod_{i=2}^{j-1}(\lambda - a_i) = \prod_{i=1}^{j}(\lambda - a_i) - \sum_{k=1}^{j-1}\left(b_k^2 \prod_{i=2,\, i\neq k+1}^{j}(\lambda - a_i)\right),$$
$$j = 1,2,\cdots,m.$$

假定 $a_k(2 \leqslant k \leqslant j)$ 为 A_j 的特征值, 由上式可得

$$b_{k-1}^2(a_k - a_2)\cdots(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})\cdots(a_k - a_j) = 0,$$

即存在 $m \neq k$, 使得 $a_m = a_k$, 这与 $a_i(i=2,3,\cdots,m)$ 互不相同矛盾, 因此 $a_k(k=2,\cdots,j)$ 不为 A_j 的特征值. 又由柯西交错定理[13] 知: $\lambda_1^{(j)} \leqslant a_2 \leqslant \lambda_2^{(j)} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{j-1}^{(j)} \leqslant a_j \leqslant \lambda_j^{(j)}$, 因此 $\lambda_1^{(j)} < a_2 < \lambda_2^{(j)} < \cdots < \lambda_{j-1}^{(j)} < a_j < \lambda_j^{(j)}$.

引理 3　相邻的特征多项式序列 $\varphi_{j-1}(\lambda), \varphi_j(\lambda)(j=1,2,\cdots,n)$ 不能同时为零.

证明　直接计算可知 $\varphi_0(\lambda), \varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda)$ 无公共根. 假定存在实数 c 使得 $\varphi_{j-1}(c) = 0 = \varphi_j(c)$, 当 $2 \leqslant j \leqslant m+1$ 时, 由式(2) 及 $b_{j-1} > 0$, 可得 $\prod_{i=2}^{j-1}(c - a_i) = 0$, 即存在 $a_k = c(2 \leqslant k \leqslant j-1)$. 再由式(2) 可推得: $\varphi_{j+1}(c) = 0, \cdots, \varphi_{m-1}(c) = 0, \varphi_m(c) = 0$, 即 a_k 为 A_m 的特征值, 与引理 2 矛盾; 当 $j \geqslant m+2$ 时, 由式(3) 可推得: $\varphi_{j-2}(c) = 0, \cdots, \varphi_{m+1}(c) = 0, \varphi_m(c) = 0$, 再由式(2) 及 $b_{j-1} > 0$, 可得 $\prod_{i=2}^{m-1}(c - a_i) = 0$, 即存在 $a_k = c(2 \leqslant k \leqslant m-1)$, 使得 $\varphi_m(a_k) = 0$, 即 a_k 为 A_m 的特征值, 同样推得与引理 2 矛盾.

引理 4　设 A_{j-1} 的特征值为 $\lambda_1^{(j-1)}, \lambda_2^{(j-1)}, \cdots, \lambda_{j-1}^{(j-1)}$, A_j 的特征值为 $\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \cdots, \lambda_j^{(j)}$, 则

$$\lambda_1^{(j)} < \lambda_1^{(j-1)} < \lambda_2^{(j)} < \lambda_2^{(j-1)} < \cdots < \lambda_{j-1}^{(j-1)} < \lambda_j^{(j)} \tag{5}$$

证明　由柯西交错定理知: $\lambda_1^{(j)} \leqslant \lambda_1^{(j-1)} \leqslant \lambda_2^{(j)} \leqslant \lambda_2^{(j-1)} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{j-1}^{(j-1)} \leqslant \lambda_j^{(j)}$, 再由引理 3 得 $\lambda_i^{(j-1)} \neq \lambda_k^{(j)}$, 即可得证.

引理5　对 $j=1,2,\cdots,n$, 记 $\lambda_1^{(j)}, \lambda_j^{(j)}$ 分别为 A_j 的最小, 最大特征值, 则

(i) $\mu < \lambda_1^{(j)}$, $(-1)^j\varphi_j(\mu) > 0$

(ii) $\mu > \lambda_j^{(j)}$, $\varphi_j(\mu) > 0, j = 1,2,\cdots,n$　　(6)

证明　由 $\varphi_j(\lambda)$ 为 A_j 的特征多项式, 故 $\varphi_j(\lambda) = \prod_{i=1}^{j}(\lambda - \lambda_i^{(j)})$. 当 $\mu < \lambda_1^{(j)}$ 时, 若 j 是偶数, 则 $\varphi_j(\mu) > 0$; 若 j 是奇数, 则 $\varphi_j(\mu) < 0$, 因此 $(-1)^j\varphi_j(\mu) > 0$; 当 $\mu > \lambda_j^{(j)}$ 时, 不论 j 是偶数还是奇数, $\varphi_j(\mu) > 0$.

2　问题的解

首先证明问题 I 可解.

定理 1　给定 $2n-1$ 个实数 $\lambda_1^{(j)}, \lambda_j^{(j)}(j=1,2,\cdots,n)$ 存在唯一的 A_n, 使得 $\lambda_1^{(j)}, \lambda_j^{(j)}$ 分别为 $A_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的最小、最大特征值的充分必要条件为:

$$\lambda_1^{(n)} < \lambda_1^{(n-1)} < \cdots < \lambda_1^{(2)} < \lambda_1^{(1)} < \lambda_2^{(2)} < \cdots < \lambda_{n-1}^{(n-1)} < \lambda_n^{(n)} \tag{7}$$

证明　(充分性) 注意到 $\lambda_1^{(n)} < \lambda_1^{(n-1)} < \cdots < \lambda_1^{(2)} < \lambda_1^{(1)} < \lambda_2^{(2)} < \cdots < \lambda_{n-1}^{(n-1)} < \lambda_n^{(n)}$, 由引理 4 知, 若 $\lambda_1^{(j)}, \lambda_j^{(j)}$ 为 A_j 的特征值, 则分别为 A_j 的最小、最大特征值, 因此问题有解等价于方程:

$$\begin{cases} \varphi_j(\lambda_1^{(j)}) = 0 \\ \varphi_j(\lambda_j^{(j)}) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

存在解 a_j, b_{j-1} 且 $b_{j-1} > 0, j = 1,2,\cdots,n$.

当 $j = 1$ 时, $a_1 = \lambda_1^{(1)}$.

当 $2 \leqslant j \leqslant m+1$, 由式(8) 得:

$$\begin{cases} (\lambda_1^{(j)} - a_j)\varphi_{j-1}(\lambda_1^{(j)}) - b_{j-1}^2 \prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(j)} - a_i) = 0 \\ (\lambda_j^{(j)} - a_j)\varphi_{j-1}(\lambda_j^{(j)}) - b_{j-1}^2 \prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_j^{(j)} - a_i) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

令 $m_j = \varphi_{j-1}(\lambda_1^{(j)}) \prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_j^{(j)} - a_i) - \varphi_{j-1}(\lambda_j^{(j)}) \prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(j)} - a_i)$, 由引理 2 和引理 5 知 $(-1)^{j-1}m_j > 0$, 则方程(9) 存在唯一解 a_j, b_{j-1} 且

$$a_j = \frac{\lambda_1^{(j)}\varphi_{j-1}(\lambda_1^{(j)}) \prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_j^{(j)} - a_i) - \lambda_j^{(j)}\varphi_{j-1}(\lambda_j^{(j)}) \prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(j)} - a_i)}{m_j} \tag{10}$$

$$b_{j-1}^2 = \frac{(\lambda_j^{(j)} - \lambda_1^{(j)})\varphi_{j-1}(\lambda_1^{(j)})\varphi_{j-1}(\lambda_j^{(j)})}{m_j} \tag{11}$$

因为 $(-1)^{j-1}(\lambda_j^{(j)} - \lambda_1^{(j)})\varphi_{j-1}(\lambda_1^{(j)})\varphi_{j-1}(\lambda_j^{(j)}) > 0$, 所以 $b_{j-1}^2 > 0, j = 2,3,\cdots,m+1$.

当 $m+2 \leqslant j \leqslant n$, 由式(8) 得:

$$\begin{cases} (\lambda_1^{(j)} - a_j)\varphi_{j-1}(\lambda_1^{(j)}) - b_{j-1}^2\varphi_{j-2}(\lambda_1^{(j)}) = 0 \\ (\lambda_j^{(j)} - a_j)\varphi_{j-1}(\lambda_j^{(j)}) - b_{j-1}^2\varphi_{j-2}(\lambda_j^{(j)}) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

令 $n_j = \varphi_{j-1}(\lambda_1^{(j)})\varphi_{j-2}(\lambda_j^{(j)}) - \varphi_{j-1}(\lambda_j^{(j)})\varphi_{j-2}(\lambda_1^{(j)})$, 由引理 5 得 $(-1)^{j-1}n_j > 0$, 则方程(12) 存在唯一解 a_j, b_{j-1} 且

$$a_j = \frac{\lambda_1^{(j)}\varphi_{j-1}(\lambda_1^{(j)})\varphi_{j-2}(\lambda_j^{(j)}) - \lambda_j^{(j)}\varphi_{j-1}(\lambda_j^{(j)})\varphi_{j-2}(\lambda_1^{(j)})}{n_j} \quad (13)$$

$$b_{j-1}^2 = \frac{(\lambda_j^{(j)} - \lambda_1^{(j)})\varphi_{j-1}(\lambda_1^{(j)})\varphi_{j-1}(\lambda_j^{(j)})}{n_j} \quad (14)$$

因为$(-1)^{j-1}(\lambda_j^{(j)} - \lambda_1^{(j)})\varphi_{j-1}(\lambda_1^{(j)})\varphi_{j-1}(\lambda_j^{(j)}) > 0$, 所以 $b_{j-1}^2 > 0, j = m+2, m+3, \cdots, n$.

(必要性) 假定存在唯一的矩阵 A_n 使得 $\lambda_1^{(j)}, \lambda_j^{(j)}$ 分别为$A_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 的最小、最大特征值, 由柯西交错定理和引理 4 得 $\lambda_1^{(n)} < \lambda_1^{(n-1)} < \cdots < \lambda_1^{(2)} < \lambda^{(1)} < \lambda_2^{(2)} < \cdots < \lambda_{n-1}^{(n-1)} < \lambda_n^{(n)}$.

引理 6[14] 设 n 阶矩阵的特征多项式为 $\varphi(\lambda) = \lambda^n - t_1\lambda^{n-1} + t_2\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^n t_n$, 则$t_i$ 等于A_n 的所有 i 阶主子式之和, 即

$$t_i = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leqslant n} \left| A\begin{pmatrix} j_1 j_2 \cdots j_i \\ j_1 j_2 \cdots j_i \end{pmatrix} \right|, \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad (15)$$

其中 $A\begin{pmatrix} j_1 j_2 \cdots j_i \\ j_1 j_2 \cdots j_i \end{pmatrix}$ 表示A_n 中$j_1, j_2, \cdots, j_i$ 行和$j_1, j_2, \cdots, j_i$ 列组成的i 阶主子式.

下面讨论问题 II 的可解性.

定理 2 设

$$\varphi_{j-1}(\lambda) = \lambda^{j-1} - \alpha_1^{(j-1)}\lambda^{j-2} + \alpha_2^{(j-1)}\lambda^{j-3} - \cdots + (-1)^{j-1}\alpha_{j-1}^{(j-1)},$$

$$\prod_{i=1}^{j}(\lambda - \lambda_i^{(j)}) = \lambda^j - \beta_1^{(j)}\lambda^{j-1} + \beta_2^{(j)}\lambda^{j-2} - \cdots + (-1)^j\beta_j^{(j)},$$

给定

$$\lambda^{(1)}, \lambda_1^{(2)} < \lambda_2^{(2)}, \cdots, \lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \cdots < \lambda_n^{(n)},$$

且

$$\lambda_1^{(j)} < \lambda_1^{(j-1)} < \lambda_2^{(j)} < \lambda_2^{(j-1)} < \cdots < \lambda_{j-1}^{(j-1)} < \lambda_j^{(j)},$$

存在唯一的A_n, 使得 $\lambda_i^{(j)} (i = 1, 2, \cdots, j)$ 为$A_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 的特征值的充分必要条件为:

$$\alpha_2^{(j-1)} + a_j\alpha_1^{(j-1)} - \beta_2^{(j)} > 0, j = 1, 2, \cdots, n \quad (16)$$

且

$$\sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leqslant j} \left| A_j\begin{pmatrix} j_1 j_2 \cdots j_i \\ j_1 j_2 \cdots j_i \end{pmatrix} \right| = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leqslant j} \lambda_{j_1}^{(j)}\lambda_{j_2}^{(j)}\cdots\lambda_{j_i}^{(j)}, \quad i = 1, 2, \cdots, j \quad (17)$$

此时

$$a_j = \sum_{i=1}^{j}\lambda_i^{(j)} - \sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i^{(j-1)} \quad (18)$$

$$b_{j-1}^2 = \alpha_2^{(j-1)} + a_j\alpha_1^{(j-1)} - \beta_2^{(j)} \quad (19)$$

证明 (充分性) 当$j = 1$时, $a_1 = \lambda^{(1)}$. 假设已知 $A_{j-1}, \lambda_1^{(j)} < \lambda_2^{(j)} < \cdots < \lambda_j^{(j)}$, 要求 a_j, b_{j-1}. 由矩阵理论知 $a_j = \sum_{i=1}^{j}\lambda_i^{(j)} - \sum_{i=1}^{j-1}a_i = \sum_{i=1}^{j}\lambda_i^{(j)} - \sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i^{(j-1)}$; 当 $1 \leqslant j \leqslant m+1$, 由式(2) 得

$$\prod_{i=1}^{j}(\lambda - \lambda_i^{(j)}) = (\lambda - a_j)(\lambda^{j-1} - \alpha_1^{(j-1)}\lambda^{j-2} + \alpha_2^{(j-1)}\lambda^{j-3} - \cdots + (-1)^{j-1}\alpha_{j-1}^{(j-1)}) - b_{j-1}^2\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda - a_i),$$

比较两边 λ^{j-2} 的系数, 得

$$b_{j-1}^2 = \alpha_2^{(j-1)} + a_j\alpha_1^{(j-1)} - \beta_2^{(j)} \quad (20)$$

由式(16) 知 $b_{j-1}^2 > 0$. 同时 a_j, b_{j-1} 还要满足 $|\lambda I - A_j| = \prod_{i=1}^{j}(\lambda - \lambda_i^{(j)})$, 即 $\alpha_i^{(j)} = \beta_i^{(j)}$, 由式(15) 得

$$\alpha_i^{(j)} = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leqslant j} \left| A_j\begin{pmatrix} j_1 j_2 \cdots j_i \\ j_1 j_2 \cdots j_i \end{pmatrix} \right|, \quad i = 1, 2, \cdots, j \quad (21)$$

$$\beta_i^{(j)} = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leqslant j} \lambda_{j_1}^{(j)}\lambda_{j_2}^{(j)}\cdots\lambda_{j_i}^{(j)}, \quad i = 1, 2, \cdots, j \quad (22)$$

因此得式(17).

当 $m+2 \leqslant j \leqslant n$ 时, 由式(3), 得到

$$\varphi_j(\lambda) = \prod_{i=1}^{j}(\lambda - \lambda_i^{(j)}) = (\lambda - a_j)\varphi_{j-1}(\lambda) - b_{j-1}^2\varphi_{j-2}(\lambda),$$

比较两边 λ^{j-2} 的系数, 同样得式(20), 且 $b_{j-1}^2 > 0$, 同时 a_j, b_{j-1} 还要满足 $\varphi_j(\lambda) = |\lambda I - A_j| = \prod_{i=1}^{j}(\lambda - \lambda_i^{(j)})$ 即得式(17).

(必要性) 假定存在唯一的具有形式(1) 的矩阵 A_n, 使得 $\lambda_i^{(j)} (i = 1, 2, \cdots, j)$ 为$A_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 的特征值, 可推得 a_j 满足式(18); $b_{j-1}^2 = \alpha_2^{(j-1)} + a_j\alpha_1^{(j-1)} - \beta_2^{(j)}$ 满足式(16)、(19); 类似于充分性的证明, 不论当 $2 \leqslant j \leqslant m+1$ 还是 $m+2 \leqslant j \leqslant n$ 都得到式(17).

3 算法及数值例子

由定理 1 可得求解问题 I 的算法步骤如下:

输入 $\lambda_1^{(n)} < \lambda_1^{(n-1)} < \cdots < \lambda_1^{(2)} < \lambda^{(1)} < \lambda_2^{(2)} < \cdots < \lambda_{n-1}^{(n-1)} < \lambda_n^{(n)}$;

输出 A_n;

算法 1

1) 令 $a_1 = \lambda^{(1)}$;

2) 对 $j = 2, 3, \cdots, m+1$, 计算

$$m_j = \varphi_{j-1}(\lambda_1^{(j)})\prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_j^{(j)} - a_i) - \varphi_{j-1}(\lambda_j^{(j)}) \times \prod_{i=2}^{j-1}(\lambda_1^{(j)} - a_i);$$

由式(10) 计算 a_j, 由式(11) 计算 b_{j-1};

3) 对 $j = m+2, m+3, \dots, n$, 计算

$n_j = \varphi_{j-1}(\lambda_1^{(j)})\varphi_{j-2}(\lambda_j^{(j)}) - \varphi_{j-1}(\lambda_j^{(j)})\varphi_{j-2}(\lambda_1^{(j)})$;

由式(13) 计算 a_j, 由式(14) 计算 b_{j-1}.

例 1　给定实数 $\lambda_1^{(1)} = 3.9$; $\lambda_1^{(2)} = 2.75$, $\lambda_2^{(2)} = 4.39$; $\lambda_1^{(3)} = -2.5$, $\lambda_3^{(3)} = 6.1$; $\lambda_1^{(4)} = -4.7$, $\lambda_4^{(4)} = 7.8$; $\lambda_1^{(5)} = -6.64$, $\lambda_5^{(5)} = 10.53$; $\lambda_1^{(6)} = -7.58$, $\lambda_6^{(6)} = 11.8$; $\lambda_1^{(7)} = -8.3$, $\lambda_7^{(7)} = 13$; $\lambda_1^{(8)} = -9.2$, $\lambda_8^{(8)} = 15.7$, 利用算法 1 可求得矩阵 A_8, 使得其顺序主子阵 $A_j (j = 1, 2, \dots, 8)$ 的最小、最大正特征值分别为 $\lambda_1^{(j)}, \lambda_j^{(j)}$, 取 $m = 3$, 求得唯一解为

$$A_8 = \begin{bmatrix} 3.9000 & 0.7507 & 3.6154 & 4.4196 & & & & \\ 0.7507 & 3.2400 & & & & & & \\ 3.6154 & & -0.4258 & & & & & \\ 4.4196 & & & -1.1297 & 6.2518 & & & \\ & & & 6.2518 & 5.6536 & 5.3711 & & \\ & & & & 5.3711 & -0.9972 & 6.6008 & \\ & & & & & 6.6008 & 6.5924 & 8.8193 \\ & & & & & & 8.8193 & 2.0783 \end{bmatrix}.$$

重新计算 A_8 的顺序主子阵 $A_j (j = 1, 2, \dots, 8)$ 的谱 $\sigma(A_j)$, 得:

$\sigma(A_1) = (\underline{3.9000})$,

$\sigma(A_2) = (\underline{2.7500}, \underline{4.3900})$,

$\sigma(A_3) = (\underline{-2.5000}, 3.1142, \underline{6.1000})$,

$\sigma(A_4) = (\underline{-4.7000}, -0.6921, 3.1766, \underline{7.8000})$,

$\sigma(A_5) = (\underline{-6.6400}, -1.7642, 3.1360, 5.9763, \underline{10.5300})$,

$\sigma(A_6) = (\underline{-7.5800}, -3.0930, -0.7864, 3.1560, 6.7442, \underline{11.8000})$,

$\sigma(A_7) = (\underline{-8.3000}, -4.7529, -1.4676, 3.1439, 6.0662, 9.1438, \underline{13.0000})$,

$\sigma(A_8) = (\underline{-9.2000}, -6.1746, -2.1725, -0.1933, 3.1547, 6.6108, 11.1866, \underline{15.7000})$,

以上数据表明算法 1 很有效.

基于定理 2, 给出求解问题 II 的算法:

输入　$\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)} < \lambda_2^{(2)}, \dots, \lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \dots < \lambda_n^{(n)}$, 且满足 $\lambda_1^{(j)} < \lambda_1^{(j-1)} < \lambda_2^{(j)} < \lambda_2^{(j-1)} < \dots < \lambda_{j-1}^{(j-1)} < \lambda_j^{(j)}$,

输出　A_n;

算法 2

1) 令 $a_1 = \lambda_1^{(1)}$;

2) $j = 2, 3, \dots, n$,

3) 由式(18) 计算 a_j, 由式(21) 计算 $\alpha_2^{(j-1)}, \alpha_1^{(j-1)}$, 由式(22) 计算 $\beta_2^{(j)}$;

4) 若 $\alpha_2^{(j-1)} + a_j \alpha_1^{(j-1)} - \beta_2^{(j)} \leqslant 0$, stop, 不满足条件, 问题无解;

5) 由式(19) 计算 b_{j-1}, 由式(21) 计算 $\alpha_i^{(j)}$, 由式(22) 计算 $\beta_i^{(j)} (i = 1, 2, \dots, j)$;

6) 若 $\alpha_i^{(j)} \neq \beta_i^{(j)} (i = 1, 2, \dots, j)$, stop, 不满足条件, 问题无解.

例 2　我们用例 1 计算出来的 $A_j (j = 1, 2, \dots, 8)$ 的谱 $\sigma(A_j) = \left\{\lambda_i^{(j)}\right\}$ 来构造 A_n, 此时 $\alpha_i^{(j)} = \beta_i^{(j)} (j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, j)$, 即满足定理 2 的式(17), 运用算法 2, 可求得 $a_1 = 3.9000$; $a_2 = 3.2400$, $b_1 = 0.7507$; $a_3 = -0.4258$, $b_2 = 3.6154$; $a_4 = -1.1297$, $b_3 = 4.4196$; $a_5 = 5.6536$, $b_4 = 6.2518$; $a_6 = -0.9972$, $b_5 = 5.3711$; $a_7 = 6.5924$, $b_6 = 6.6008$; $a_8 = 2.0783$, $b_7 = 8.8193$, 即同样求得例 1 的 A_8.

参考文献:

[1] 周树荃, 戴华. 代数特征值反问题[M]. 郑州: 河南科学技术出版社, 1991.

[2] 徐寅峰. 一类特殊矩阵的逆特征值问题[J]. 应用数学, 1993, 6(1): 68-75.

[3] C de Boor, Golub G H. The numerical stable reconstruction of a Jacobi matrix from spectral data[J]. Linear Algebra Appl, 1978, 21: 245-260.

[4] Hald O H. Inverse eigenvalue problems for Jacobi matrix[J]. Linear Algebra Appl, 1976, 14: 63-85.

[5] Hochstad H. On the construction of a Jacobi matrix from spectral data[J]. Linear Algebra Appl, 1974, 8: 435-446.

[6] Hochstad H. On the construction of a Jacobi matrix from mixed given data[J]. Linear Algebra Appl, 1979, 28: 113-115.

[7] Peng Z Y, Hu X Y, Zhang L. On the construction of a Jacobi matrix from its mixed-type eigenpairs[J]. Linear Al-

gebra Appl, 2003, 362: 191– 200.
[8] 高为炳. 非线性控制系统导论[M]. 北京: 科学出版社, 1988.
[9] Lietuofu A M. The stability of the nonlinear adjustment systems[M]. 北京: 科学出版社, 1959.
[10] Gladwell G M L. 振动中的反问题[M]. 王大钧, 何北昌, 译. 北京: 北京大学出版社, 1991: 20– 80.
[11] Peng J, Hu X Y, Zhang L. Two inverse eigenvalue problems for a special kind of matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2006, 416: 336– 347.
[12] Baresford Parlett, Gilbert Strang. Matrices with preacribed Ritz values[J]. Linear Algebra Appl, 2008, 428: 1725– 1739.
[13] Augustin Cauchy. Sur l´quation l'Aide de Laquelle on D termine les Inegalit s S culaires des Mouvements des Plan tes[J]. Oeuvres Compl tes, S conde S rie, 1929, 9: 174– 195.
[14] 姚慕生. 高等代数[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2002: 71 – 72.

The Inverse Eigenvalue Problem of a Special Kind of Matrices

WU Chun-hong, LU Lin-zhang*
(School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: Two inverse eigenvalue problems of a special kind of matrices A_n are discussed in this paper. Problem I is to construct A_n by the minimal and maximal eigenvalues of its all leading principal submatrices A_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$. Problem II is to construct A_n by all eigenvalues of its all leading principal submatrices A_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$. The necessary and sufficient conditions for the solvability of the two problems are derived, respectively, and results are constructive. Furthermore, corresponding numerical algorithms and examples are given, numerical results show good efficient of the algorithms.

Key words: inverse eigenvalue problem; Jacobi matrix; arrow matrix; minimal eigenvalue; maximal eigenvalue

· 简　讯 ·

《厦门大学学报(自然科学版)》荣获“第二届中国高校精品科技期刊”奖

2008 年 9 月, 由教育部科学技术司组织的“第二届中国高校精品 · 优秀 · 特色科技期刊”评比活动揭晓。在此次评比活动中, 《厦门大学学报(自然科学版)》被评为“中国高校精品科技期刊”.

此次全国共评出精品期刊 76 种, 这是《厦门大学学报(自然科学版)》继 2006 年获“首届中国高校精品科技期刊”奖后再次获此殊荣. 与此同时, 学报编辑部也被评为“高校科技期刊先进集体”.

学报蝉联获奖, 一方面, 表明校党政领导对期刊工作的重视, 创造了期刊发展的良好氛围; 另一方面, 表明编辑部狠抓期刊学术与出版质量, 期刊审读、编排规范等各项办刊指标稳步提升.

本刊编辑部
2008 年 11 月