# 一类矩阵的逆奇异值问题

吴春红*, 卢琳璋**
(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 讨论了一类矩阵的逆奇异值问题. 给定非负实数 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, 两非零实向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, 求 $m \times n$ 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$, 使得 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值, 并且 $x$, $y$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的左右奇异向量. 基于 Householder 变换和矩阵秩 1 的修正方法得到了问题的算法, 而且算法比较经济且易于并行, 同时给出了相应的数值例子.

关键词: 反问题; 奇异值; Householder 变换; 秩 1 修正

中图分类号: O 241.6　　文献标识码: A　　文章编号: 0438-0479(2010)03-0308-04

逆奇异值问题为矩阵逆特征值问题的推广, 通常考虑的是由给定的奇异值来构造结构矩阵. 逆奇异值问题在确定物体的质量分布、轨道力学、灌溉理论、断层扫描、电路理论等领域有重要的应用[1-3]. 若要构造的矩阵为对称阵, 则逆奇异值问题就转化为逆特征值问题, 其应用参见文献[4-8], 因此逆奇异值问题要求构造的矩阵不为对称阵, 但可以是长方阵, 这使得逆奇异值问题更为复杂. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值为 $\sigma_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, 则对称阵 $\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^T & 0 \end{bmatrix}$ 的特征值为 $\sigma_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, 即可将逆奇异值问题转化为一类特殊的逆特征值问题, 因此常将逆奇异值问题归类为逆特征值问题.

本文中 $e_j$ 在有意义的前提下为相应阶数单位阵的第 $j$ 列; $\mathbf{R}^{m\times n}$ 表示 $m \times n$ 阶实矩阵.

Chu 在 1992 年讨论了如下逆奇异值问题[9]:

给定矩阵 $\{\boldsymbol{A}_i\}_{i=0}^n \in \mathbf{R}^{m\times n}$ $(m \geqslant n)$ 及非负实数 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \dots \geqslant \sigma_n$, 求 $\boldsymbol{c} := (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbf{R}^n$ 使得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{A}_0 + \sum_{i=1}^n c_i \boldsymbol{A}_i$$

的奇异值为 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$.

Chu 提出了两种数值方法来求解上述逆奇异值问题: 其一是用投影梯度法来求解目标函数的常微分方程的; 另一种将 Friedland[10] 提出的迭代算法推广, 提出了 Newton-type 方法. Bai 提出了用非精确的 Newton-type 方法来求解上述问题[11], 并证明了此算法超线性收敛. 最近, 一些学者提出了不同的逆奇异值问题[12]. 类似于极点配置问题, Chu 提出了如下逆奇异值问题[13]:

给定矩阵 $\{\boldsymbol{A}_i\}_{i=0}^n \in \mathbf{R}^{m\times n}$ $(m \geqslant n)$, 且 $n \geqslant l > 0$, 及非负实数 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \dots \geqslant \sigma_n$, 求矩阵 $\boldsymbol{F} \in \mathbf{R}^{m\times n}$, 使得 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{F}) \leqslant l$, 且 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{F}$ 的奇异值为 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. 即用低秩阵 $\boldsymbol{F}$ 来修正 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值.

Zhu 提出用 Householder 变换和秩 1 修正来求解对称阵的逆特征值问题[14]. 本文提出用 Householde 变换和秩 1 修正来求解如下逆奇异值问题:

问题 I　给定非负实数 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, 两非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$, 求矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 使得 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值, 且 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的左右奇异向量.

## 1　问题的解与算法

假定 $m \geqslant n$, 矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$, 则存在正交阵 $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m] \in \mathbf{R}^{m\times m}$ 和正交阵 $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n] \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T, \tag{2}$$

其中 $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 且 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \dots \geqslant \sigma_n \geqslant 0$. 式(2)称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解(SVD)[15-16]; 非负实数 $\sigma_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值, $\boldsymbol{u}_i$ 为对应于奇异值 $\sigma_i$ 的左奇异向量, $\boldsymbol{v}_i$ 为对应于奇异值 $\sigma_i$ 的右奇异向量. 实际上可验证 $\sigma_i^2$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ 为对称阵 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 的特征值, 右奇异向量 $\boldsymbol{v}_i$ 为对应于 $\sigma_i$ 的单位特征向量. 对称阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T \in \mathbf{R}^{m\times m}$ 的特征值为 $\sigma_i^2$ 和 0($m - n$ 个), 左奇异向量 $\boldsymbol{u}_i$ 为对应于 $\sigma_i^2$ 的单位特征向量.

引理 1[17]　若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征

收稿日期: 2009-07-22
基金项目: 国家自然科学基金(10531080); 厦门理工学院科学技术研究项目(YKJ09016R)
* 现工作单位: 厦门理工学院
** 通讯作者: lzlu@xmu.edu.cn

值, $u$ 为对应于特征值 $\lambda_k$ 的特征向量, $v\in\mathbf{R}^n$ 为任意向量, 则 $A+uv^{\mathrm T}$ 为矩阵 $A$ 的秩 1 修正, 其特征值为

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_{k-1}, \lambda_k+v^{\mathrm T}u, \lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_n.$$

**定理 1**　假定矩阵 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}(m\geqslant n)$, 其奇异值分解为式(2), 设 $\rho>0$, 则 $A+\rho u_iv_i^{\mathrm T}(i=1,2,\cdots,n)$ 的奇异值为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_i+\rho,\sigma_{i+1},\cdots,\sigma_n$, 且对应地左右奇异向量不变.

证明　令 $B=A+\rho u_iv_i^{\mathrm T}$, 由式(2), 得

$$\begin{aligned}
B^{\mathrm T}B&=(A+\rho u_iv_i^{\mathrm T})^{\mathrm T}(A+\rho u_iv_i^{\mathrm T})=\\
&A^{\mathrm T}A+\rho A^{\mathrm T}u_iv_i^{\mathrm T}+\rho v_iu_i^{\mathrm T}A+\rho^2v_iv_i^{\mathrm T}=\\
&A^{\mathrm T}A+\rho V\begin{bmatrix}\Sigma&0\\0&0\end{bmatrix}^{\mathrm T}U^{\mathrm T}u_iv_i^{\mathrm T}+\\
&\rho v_iu_i^{\mathrm T}U\begin{bmatrix}\Sigma&0\\0&0\end{bmatrix}V^{\mathrm T}+\rho^2v_iv_i^{\mathrm T}=\\
&A^{\mathrm T}A+\rho V\begin{bmatrix}\Sigma&0\\0&0\end{bmatrix}^{\mathrm T}e_iv_i^{\mathrm T}+\\
&\rho v_ie_i^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\Sigma&0\\0&0\end{bmatrix}V^{\mathrm T}+\rho^2v_iv_i^{\mathrm T}=\\
&A^{\mathrm T}A+\rho\sigma_iv_iv_i^{\mathrm T}+\rho\sigma_iv_iv_i^{\mathrm T}+\rho^2v_iv_i^{\mathrm T}=\\
&A^{\mathrm T}A+2\rho\sigma_iv_iv_i^{\mathrm T}+\rho^2v_iv_i^{\mathrm T},
\end{aligned}$$

因 $\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$ 为矩阵 $A^{\mathrm T}A$ 的特征值, 且对应的特征向量为 $v_i(i=1,2,\cdots,n)$. 由引理 1, 所以矩阵 $B^{\mathrm T}B$ 的特征值为 $\sigma_1^2,\cdots,\sigma_{i-1}^2,\sigma_i^2+2\rho\sigma_i+\rho^2,\sigma_{i+1}^2,\cdots,\sigma_n^2$, 因此 $B$ 的奇异值为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_i+\rho,\sigma_{i+1},\cdots,\sigma_n$, 且

$$\begin{aligned}
B^{\mathrm T}Bv_i&=(A^{\mathrm T}A+2\rho\sigma_iv_iv_i^{\mathrm T}+\rho^2v_iv_i^{\mathrm T})v_i=\\
&A^{\mathrm T}Av_i+2\rho\sigma_iv_i+\rho^2v_i=\\
&\sigma_i^2v_i+2\rho\sigma_iv_i+\rho^2v_i=\\
&(\sigma_i^2+2\rho\sigma_i+\rho^2)v_i,
\end{aligned}$$

上式说明矩阵 $B^{\mathrm T}B$ 的对应于特征值 $\sigma_i^2+2\rho\sigma_i+\rho^2$ 的特征向量为 $v_i$, 因此矩阵 $B$ 的对应于奇异值 $\sigma_i+\rho$ 的右奇异向量为 $v_i$.

因为左奇异向量 $u_i$ 为矩阵 $BB^{\mathrm T}$ 的特征向量, 首先计算

$$\begin{aligned}
BB^{\mathrm T}&=(A+\rho u_iv_i^{\mathrm T})(A+\rho u_iv_i^{\mathrm T})^{\mathrm T}=\\
&AA^{\mathrm T}+\rho Av_iu_i^{\mathrm T}+\rho u_iv_i^{\mathrm T}A^{\mathrm T}+\rho^2v_i^{\mathrm T}v_iu_iu_i^{\mathrm T}=\\
&AA^{\mathrm T}+\rho U\begin{bmatrix}\Sigma&0\\0&0\end{bmatrix}V^{\mathrm T}v_iu_i^{\mathrm T}+\\
&\rho u_iv_i^{\mathrm T}V\begin{bmatrix}\Sigma&0\\0&0\end{bmatrix}^{\mathrm T}U^{\mathrm T}+\rho^2u_iu_i^{\mathrm T}=\\
&AA^{\mathrm T}+\rho U\begin{bmatrix}\Sigma&0\\0&0\end{bmatrix}e_iu_i^{\mathrm T}+\\
&\rho u_ie_i^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\Sigma&0\\0&0\end{bmatrix}^{\mathrm T}U^{\mathrm T}+\rho^2u_iu_i^{\mathrm T}=\\
&AA^{\mathrm T}+2\rho\sigma_iu_iu_i^{\mathrm T}+\rho^2u_iu_i^{\mathrm T},
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
BB^{\mathrm T}u_i&=(AA^{\mathrm T}+2\rho\sigma_iu_iu_i^{\mathrm T}+\rho^2u_iu_i^{\mathrm T})u_i=\\
&AA^{\mathrm T}u_i+2\rho\sigma_iu_i+\rho^2u_i=\\
&\sigma_i^2u_i+2\rho\sigma_iu_i+\rho^2u_i=\\
&(\sigma_i^2+2\rho\sigma_i+\rho^2)u_i,
\end{aligned}$$

即矩阵 $BB^{\mathrm T}$ 的对应于特征值 $\sigma_i^2+2\rho\sigma_i+\rho^2$ 的特征向量为 $u_i$, 因此矩阵 $B$ 的对应于奇异值 $\sigma_i+\rho$ 的左奇异向量为 $u_i$, 所以矩阵 $A$ 的左奇异向量仍为矩阵 $A+\rho u_iv_i^{\mathrm T}$ 的左奇异向量.

**定理 2**　设 $x\in\mathbf{R}^m, y\in\mathbf{R}^n$, 令 $A=xy^{\mathrm T}$, $H_l=(h_{l1},h_{l2},\cdots,h_{lm})\in\mathbf{R}^{m\times m}$, $H_r=(h_{r1},h_{r2},\cdots,h_{rn})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为 Householder 矩阵, 使得

$$H_lx=\|x\|_2e_1, H_ry=\|y\|_2e_1,$$

则

(i) $H_l$ 的所有列构成 $A$ 的左奇异向量基,

(ii) $H_r$ 的所有列构成 $A$ 的右奇异向量基,

(iii) $A=\|x\|_2\|y\|_2h_{l1}h_{r1}^{\mathrm T}$.

证明　显然矩阵 $A=xy^{\mathrm T}$ 的奇异值为 $\|x\|_2\|y\|_2, 0, \cdots, 0$, 对应于奇异值为 $\|x\|_2\|y\|_2$ 的左、右奇异向量分别为 $\frac{x}{\|x\|_2}, \frac{y}{\|y\|_2}$,

$$H_lAH_r^{\mathrm T}H_lxy^{\mathrm T}H_r^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}\|x\|_2\|y\|_2&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{bmatrix}_{m\times n},$$

所以 $H_l$ 的所有列构成 $A$ 的左奇异向量基, $H_r$ 的所有列构成 $A$ 的右奇异向量基.

由 $H_lx=\|x\|_2e_1$ 得

$$x=\|x\|_2H_le_1=\|x\|_2h_{l1},$$

由 $H_ry=\|y\|_2e_1$ 得

$$y=\|y\|_2H_re_1=\|y\|_2h_{r1},$$

因此 $A=xy^{\mathrm T}=\|x\|_2\|y\|_2h_{l1}h_{r1}^{\mathrm T}$.

令 $A=xy^{\mathrm T}$, $H_l=(h_{l1},h_{l2},\cdots,h_{lm})\in\mathbf{R}^{m\times m}$, $H_r=(h_{r1},h_{r2},\cdots,h_{rn})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为 Householder 矩阵, 使得 $H_lx=\|x\|_2e_1$, $H_ry=\|y\|_2e_1$, 由定理 1 及定理 2 知可对矩阵 $A$ 进行一步一步的秩 1 修正, 使得 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 为所得矩阵的奇异值, 且 $x, y$ 分别为其左右奇异向量, 具体步骤如下:

$A=xy^{\mathrm T}$, 奇异值为 $\|x\|_2\|y\|_2, 0, \cdots, 0(n-1$ 个$)$,

↓ 进行秩 1 修正

$A_1=A+(\sigma_1-\|x\|_2\|y\|_2)h_{l1}h_{r1}^{\mathrm T}$, 由定理 1 知 $A_1$ 的

奇异值为 $\sigma_1, 0, \cdots, 0(n-1$ 个$)$,

↓进行秩 1 修正

$$A_2 = A + (\sigma_1 - \|x\|_2\|y\|_2) h_{l1} h_{r1}^{\mathrm{T}} + \sigma_2 h_{l2} h_{r2}^{\mathrm{T}},$$ 奇异值为 $\sigma_1, \sigma_2, 0, \cdots, 0(n-2$ 个$)$,

⋮

$$A_n = A + (\sigma_1 - \|x\|_2\|y|_2) h_{l1} h_{r1}^{\mathrm{T}} + \sum_{i=2}^{n} \sigma_i h_{li} h_{ri}^{\mathrm{T}},$$ 奇异值为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$.

再由定理 2 可得

$$A_n = A + (\sigma_1 - \|x|_2|y|_2) h_{l1} h_{r1}^{\mathrm{T}} + \sum_{i=2}^{n} \sigma_i h_{li} h_{ri}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i h_{li} h_{ri}^{\mathrm{T}}.$$

由此得

算法:

- 输入 $x, y, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$;
- 令 $A = 0$;
- 计算 Householder 阵 $H_l, H_r$, 使得 $H_l x = \|x\|_2 e_1$; $H_r y = \|y\|_2 e_1$;
- $i = 1, 2, \cdots, n$,
- $A = A + \sigma_i h_{li} h_{ri}^{\mathrm{T}}$;
- 输出 $A$.

上述算法只需要计算 2 个向 量加法, $n+6$ 个向量乘法, $n+1$ 个矩阵加法, 因此运算量少并且易于进行并行计算.

**定理 3**　矩阵 $h_{l1}h_{r1}^{\mathrm{T}}, h_{l2}h_{r2}^{\mathrm{T}}, \cdots, h_{ln}h_{rn}^{\mathrm{T}}$ 线性无关.

证明　假设存在 $n$ 个实数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得

$$k_1 h_{l1} h_{r1}^{\mathrm{T}} + k_2 h_{l2} h_{r2}^{\mathrm{T}} + \cdots + k_n h_{ln} h_{rn}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0},$$

则等式两端同时右乘 $h_{ri}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 得

$$(k_1 h_{l1} h_{r1}^{\mathrm{T}} + k_2 h_{l2} h_{r2}^{\mathrm{T}} + \cdots + k_n h_{ln} h_{rn}^{\mathrm{T}}) h_{ri} = \mathbf{0},$$

所以

$$k_i h_{li} = \mathbf{0},$$

即 $k_i = 0(i = 1, 2, \cdots, n)$, 说明 $h_{l1}h_{r1}^{\mathrm{T}}, h_{l2}h_{r2}^{\mathrm{T}}, \cdots, h_{ln}h_{rn}^{\mathrm{T}}$ 线性无关.

**定理 4**　$\sigma_i \neq \sigma_j (i \neq j)$ 时, 问题至少有 $n!$ 个解.

证明　在算法中改变 $\sigma_i$ 的次序得

$$A_\pi = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{\pi_i} h_{li} h_{ri}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\{\sigma_{\pi_1}, \sigma_{\pi_2}, \cdots, \sigma_{\pi_n}\}$ 为 $\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$ 的一个置换, 因此共有 $n!$ 种不同的置换. 由定理 3 知 $h_{l1}h_{r1}^{\mathrm{T}}, h_{l2}h_{r2}^{\mathrm{T}}, \cdots, h_{ln}h_{rn}^{\mathrm{T}}$ 线性无关, 因此 Householder 阵 $H_l, H_r$ 确定后, 当 $\sigma_i \neq \sigma_j (i \neq j)$ 时, 问题 I 至少有 $n!$ 个解.

注:

1) 取 $w = x \pm \|x\|_2 e_1$, 令 Householder 阵 $H_l = I - 2ww^{\mathrm{T}}/w^{\mathrm{T}}w$, 则 $H_l x = \|x\|_2 e_1$, 因此 Householder 阵有两种选择.

2) 当算法中 Householder 阵 $H_l, H_r$ 确定后, 不论怎样改变 $\sigma_i$ 的次序, 得到的矩阵 $A$ 在相差一置换阵的条件下可以认为是唯一的, 即存在置换阵 $P$, 使得 $A = PA_\pi P^{\mathrm{T}}$.

在式(1)中令 $A_0 = 0$, $A_i = h_{li} h_{ri}^{\mathrm{T}}$, 即为本文中讨论的逆奇异值问题. 若取 $m = n$, $x = y$, 按照本文的算法可构造 $n$ 阶对称阵 $A$ 具有给定的 $n$ 个特征值及特征向量 $x$, 即文献[14]的情况.

## 2　数值例子

下面给出数值例子来验证上述结论.

**例 1**　令 $m = 8$, $n = 6$, 选取一个随机矩阵 $A_0 \in \mathbf{R}^{m\times n}$:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.7709 & 0.1131 & 0.7540 & 0.8506 & 0.4881 & 0.6737 \\ 0.3139 & 0.8121 & 0.6632 & 0.3402 & 0.9926 & 0.9573 \\ 0.6382 & 0.1564 & 0.2722 & 0.9138 & 0.5314 & 0.1112 \\ 0.9866 & 0.1564 & 0.2722 & 0.9138 & 0.5314 & 0.1112 \\ 0.5029 & 0.1221 & 0.4194 & 0.2286 & 0.1813 & 0.5651 \\ 0.9477 & 0.7627 & 0.2130 & 0.8620 & 0.5019 & 0.9692 \\ 0.8280 & 0.7218 & 0.0356 & 0.6566 & 0.4222 & 0.0237 \\ 0.9176 & 0.6516 & 0.0812 & 0.8912 & 0.6604 & 0.8702 \end{bmatrix}$$

可求得 $A_0$ 的奇异值为4.078 1, 1.164 3, 0.908 6, 0.855 1, 0.472 0, 0.187 4, 其中最大奇异值 4.078 1 对应的左右奇异向量分别记为 $x, y$, 则

$$x = [-0.3664, -0.3843, -0.3314, -0.3204, -0.2014, -0.4441, -0.2894, -0.4290]^{\mathrm{T}},$$

$$y = [-0.5115, -0.3816, -0.2784, -0.4637, -0.3725, -0.4018]^{\mathrm{T}}.$$

取给定的奇异值 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 为 $A_0$ 的奇异值, 对上述给定的 $x$ 和 $y$, 由算法得所求的矩阵为

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1.2148 & 0.2366 & 0.1979 & 0.5571 & 0.5726 & 0.6368 \\ 0.4841 & 1.5564 & 0.2931 & 0.5522 & 0.4788 & 0.5218 \\ 0.5476 & 0.3710 & 1.1853 & 0.5161 & 0.4450 & 0.4845 \\ 0.3775 & 0.3203 & 0.2396 & 1.3074 & 0.3927 & 0.4281 \\ 0.3106 & 0.2198 & 0.1641 & 0.3068 & 0.7369 & 0.2886 \\ 0.9976 & 0.5638 & 0.4195 & 0.7726 & 0.6613 & 0.9069 \\ 0.6991 & 0.3797 & 0.2824 & 0.5185 & 0.4430 & 0.4819 \\ 1.0364 & 0.5629 & 0.4186 & 0.7686 & 0.6567 & 0.7143 \end{bmatrix}$$

取 $10^{-10} \leqslant \varepsilon \leqslant 10^{10}$, 现在给奇异值一个扰动得到 $\sigma_i^{\varepsilon} = \sigma_i + \varepsilon$, 运用算法, 我们得到对应于 $\sigma_i^{\varepsilon}$ 的 $A^{\varepsilon}$, 从图 1 可以看出随着 $\varepsilon$ 趋近于零, $A^{\varepsilon}$ 趋近于 $A$.

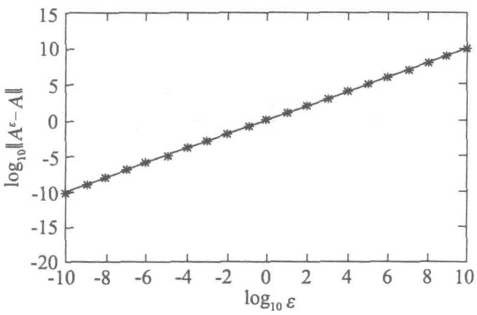


图 1　算法误差曲线

Fig. 1　Curre of algorithmic error

## 参考文献:

[1] Gramm A G. Inverse problems: mathematical and analytical techniques with applications to engineering[M]. German: Springer, 2005.

[2] Lebedev L P, Vorovich I I, Gladwell G M. Functional analysis: applications in mechanics and inverse problems [M]. Netherland: Kluwer Academic Publishers, 2002.

[3] Uhlmann G, Levy S. Inside out: inverse problems and applications[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[4] Chu M T. Inverse eigenvalue problems[J]. SIAM Rev, 1998, 40: 1-39.

[5] Chu M T, Golub G H. Structured inverse eigenvalue problems[J]. Acta Numer, 2002, 11: 1-71.

[6] Chu M T, Golub G H. Inverse eigenvalue problems: theory, algorithms, and applications[M]. England: Oxford University Press, 2005.

[7] Xu S F. An introduction to inverse eigenvalue problems [M]. Beijing: Peking University Press and Vieweg Publishing, 1998.

[8] 周树荃, 戴华. 代数特征值反问题[M]. 郑州: 河南科学技术出版社, 1991.

[9] Chu M T. Numerical methods for inverse singular value problems[J]. SIAM J Numer Anal, 1992, 29: 885-903.

[10] Friedland S, Nocedal J, Overton M L. The formulation and analysis of numerical methods for inverse eigenvalue problems[J]. SIAM J Numer Anal, 1987, 24: 634-667.

[11] Bai Z J, Xu S F. An inexact Newton-type method for inverse singular value problems[J]. Lin Alg Appl, 2008, 429: 527-547.

[12] Politi T. A discrete approach for the inverse singular value problem in some quadratic group[J]. Lecture Notes in Comput Sci, 2003, 2658: 121-130.

[13] Chu D, Chu M T. Low rank update of singular values [J]. Math Comp, 2006, 75: 1351-1366.

[14] Zhu Shengxin, Gu Tongxiang, Liu Xingping. Solving inverse eigenvalue problems via Householder and rank-one matrices[J]. Lin Alg Appl, 2009, 430(1): 318-334.

[15] Golub G H, Van Loan C F. Matrix computations[M]. American: The Johns Hopkins University Press, 1996.

[16] 袁亚湘. 矩阵计算[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[17] Brauer A. Limits for the characteristic roots of a matrix IV. Applications to stochastic matrices[J]. Duke Math J, 1952, 19: 75-91.

# A Special Kind of Inverse Singular Value Problem of Matrices

WU Chun-hong*, LU Lin-zhang**

(School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** In this paper, we consider a kind of matrix inverse singular value problem. Given nonnegative numbers $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$, two nonzero real vectors $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$, find $m\times n$ real matrix $\boldsymbol{A}$, such that $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ are the singular values of $\boldsymbol{A}$, and $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ are the left and right singular vectors, respectively. Based on Householder transformation and rank-one updating matrices, we propose an algorithm which is economical and easily to parallel to solve the inverse singular value problem. We also give the corresponding numerical example.

**Key words:** inverse problem; singular value; Householder transformation; rank-one updating