第41卷 第4期 厦门大学学报(自然科学版) Vol.41 No.4
2002年7月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Jul. 2002

文章编号:0438-0479(2002)04-0409-04

一类部分Toeplitz正定阵的Toeplitz正定完成

何 明, 卢琳璋
(厦门大学数学系,福建 厦门 361005)

摘要: 并不是所有的部分正定Toeplitz矩阵都有Toeplitz正定完成,也并不是每个有正定完成的部分正定矩阵都有Toeplitz正定完成.我们考虑一类部分正定Toeplitz矩阵的Toeplitz正定完成问题.

关键词: Toeplitz矩阵;部分阵完成问题;弦图
中图分类号: O 124 文献标识码: A

1 基本定义和记号

下面先简要介绍一下本文要用到的一些基本定义和记号.

1) 部分阵及其完成

如果一个矩阵A,它的一部分元素已知,一部分元素未知,则称A为一个部分阵.若A是实的方的部分阵,a_{ij}是A的已知元时,a_{ji}也是A的已知元,而且$a_{ij} = a_{ji}$,则称A是一个部分对称阵.部分阵的完成问题通常是指:属于某一类的部分阵能否通过(从某个集合中)选取未知元,使这个部分阵完成为该类矩阵.

例如,设A是一个部分对称正定阵(部分正定阵的主对角线上的元素一般都假定是已知的,下同),那么A的已知元所能构成的主子阵也应是对称正定的.如果存在一个与A同阶的对称正定阵B,当a_{ij}是A的已知元时,$b_{ij} = a_{ij}$.则称A有正定完成.若不存在这样的对称正定的矩阵B,则称A没有正定完成.注意下面我们所说的正定指的均是实对称正定.

2) 对角线及Toeplitz阵

设A是一个n级方阵,我们把下标满足的元素所在的位置称为A的第k条对角线(这样主对角线就是第0条对角线).如果A在各条对角线上的元素相等,则称A为Toeplitz阵.例如:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (x\text{ 是未知元})$$

是一个三阶的部分正定Toeplitz阵.因为由A的已知元所能构成的二阶主子阵:

$$A[1,2] = A[2,3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

是正定的.这里和以后,由A的第$i_1, i_2, \cdots, i_l$行和列构成的主子阵记为$A\{i_1, i_2, \cdots, i_l\}$. 这个$A$有Toeplitz正定完成,事实上,

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

就是它的一个Toeplitz正定完成.

3) 矩阵模式和图

对一个方阵,指定一些对称位置,如果这些位置上的元素确定后构成的任意一个部分正定阵都有正定完成,则称该矩阵模式有正定完成.由于讨论某个具体部分阵能否完成意义不是很大.所以,在一般情况下,我们讨论的所谓部分阵的完成都是指矩阵的模式完成.

为了描述对称矩阵的模式,我们引入和对称矩阵相关联的无向图.对一个N阶部分方阵$A = (a_{ij})$,图取N个顶点$\{1, 2, \cdots, N\}$,如果元素$a_{i,j}$($i \neq j$)已知,则连接顶点i和顶点j,得到图的一条边.这样一个部分对称阵就和一个无向图相对应.

在一个无向图当中,如果两个顶点有边直接相

收稿日期:2002-01-17
基金项目:福建省自然科学基金资助项目(F00023)
作者简介:何明(1975-),男,硕士研究生.

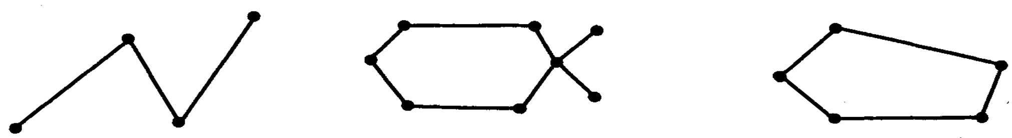

图 1 路、圈、简单圈

Fig. 1 Route, circul, simplecircul

连, 则称这两个顶点是相邻的. 一些顶点依次相连则形成一条路, 如果一条路的起点和终点相同则称为圈. 如果一个圈将平面分为两个部分, 则这个圈称为简单圈. 如果一个图中不存在边大于等于 4 的简单圈, 称这个图为弦图. 否则称为无弦图. 如果一个图中任意两顶点都有边直接相连, 则称这个图为完全图.

2 正定完成与 Toeplitz 正定完成

下面关于部分正定阵完成问题的定理 1、定理 2 是我们主要结果的基础.

定理 1 若 B 为如下所示部分正定阵, 则 B 有正定完成[1].

$$B=\begin{bmatrix} a & b & x \\ b^T & A & c \\ x & c^T & d \end{bmatrix}$$

其中 a, d 为一数, b, c 为向量, A 为一方阵.

定理 2 部分正定阵有正定完成的充要条件是该部分正定阵的图 G 是弦图[2]. 首先我们说明两点:

1) 并不是所有的部分正定 Toeplitz 矩阵都有 Toeplitz 正定完成. 例如:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0.9 & ? & -0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.9 & ? \\ ? & 0.9 & 1 & 0.9 \\ -0.9 & ? & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

是一个部分正定 Toeplitz 矩阵, 但没有正定完成[4], 当然也就更没有 Toeplitz 正定完成.

2) 并不是每个有正定完成的部分正定矩阵都有 Toeplitz 正定完成. 例如:

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0.95 & 0.8 \\ 0.95 & 1 & ? \\ 0.8 & ? & 1 \end{bmatrix}$$

是一个部分正定阵, 它有正定完成:

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 0.95 & 0.8 \\ 0.95 & 1 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

但没有 Toeplitz 正定完成, 因为 Toeplitz 矩阵:

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0.95 & 0.8 \\ 0.95 & 1 & 0.95 \\ 0.8 & 0.95 & 1 \end{bmatrix}$$

不是正定阵. 这个例子说明正定完成与正定 Toeplitz 完成这两个问题并不完全相同. 这说明考虑正定 Toeplitz 完成问题是有意义的.

3 主要结果

下面考虑比较特殊的一类部分 Toeplitz 正定阵的完成问题.

定理 3 第 0, ±1, ±2, ±3, ……, ±$(k-1)$ ($k \leqslant n$, n 为矩阵级阶数) 条对角线为已知的部分 Toeplitz 正定阵有 Toeplitz 正定完成.

证明 令

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & ? & ? & ? \\ a_2 & a_1 & a_2 & \cdots & a_k & ? & ? \\ \vdots & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & ? \\ a_k & \cdots & \cdots & a_1 & \cdots & \cdots & a_k \\ ? & a_k & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ ? & ? & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 & a_2 \\ ? & ? & ? & a_k & \cdots & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

为所设的部分正定 Toeplitz 阵. 由假设 A 的 $k+1$ 阶顺序主子阵 $A\{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, k, k+1\}$ 为一个部分正定 Toeplitz 阵. 根据定理 1, 存在 a_{k+1}, 使得这个部分正定 Toeplitz 阵完成为一个 Toeplitz 正定阵. 由 Toeplitz 阵的特殊结构可知,

$$A\{1, 2, 3, \ldots\ldots, k, k+1\} = A\{2, 3, 4, \ldots, k+1, k+2\}$$

所以同样可用来完成 $A\{2, 3, 4, \ldots, k+1, k+2\}$. 依次类推, 我们可以完成 A 的第 k 条对角线和第 $-k$ 条对角线, 且这两条线完成后的方阵显然还是一个和 A 类似的部分 Toeplitz 正定阵(比 A 多了两条对角线是已知的). 用同样的办法继续做下去, 就可以完成 A 的第 $k+1$ 条、第 $-(k+2)$ 条对角线, 最终得到该

部分 Toeplitz 正定阵的 Toeplitz 正定完成.

定理 4　第 0, $\pm t$, $\pm 2t$, ……, $\pm kt$ ($kt \leqslant n < (k+1)t$, $t > 1$, n 为矩阵阶数) 条对角线为已知的部分 Toeplitz 正定阵有 Toeplitz 正定完成.

证明　令 A 为对应该模式的任意一个部分 Toeplitz 正定阵. 由假设, 连接所有差为 k 的点, 可以作出其对应的图为:

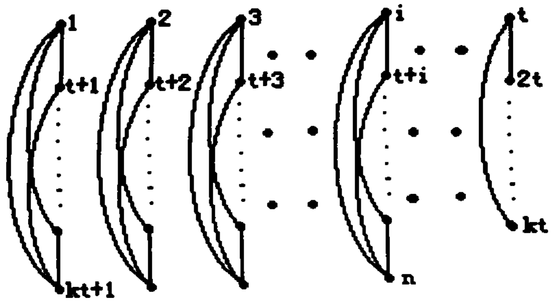

图 2　矩阵 A 已知元图

Fig. 2　Graph of matrix A with specified entries

可以看出, 该图是由 t 个完全图构成, 所以是弦图, 根据定理 2, 有正定完成. 下证明进一步可得出它有 Toeplitz 正定完成.

令矩阵 A_1 为一个和矩阵 A 同阶, 对应矩阵 A 关联图第一个完全图元素相等(包括对角元), 其他元素都取零的矩阵. 由于矩阵 A 是部分正定的. 所以有 A_1 是半正定的, 且有对应第一个完全图的子式是正定的. 同样, 对应矩阵 A 的关联图的第二个完全图可以得到 A_2, 这样依次可以得到 A_3, A_4, ……, A_t. 令

$$B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots\cdots + A_t$$

显然 B 是半正定的, 因为它是半正定矩阵的和. 下证 B 是正定的. 若存在向量 x 有 $x^T B x = 0$, 则有 $x^T A_i x = 0$. 根据 A_i 中第 $i, t+i, 2t+i, \cdots$ 构成的子式是正定的, 可以得出:

$$x_1 = x_{t+1} = x_{2t+1} = \cdots\cdots = x_{kt+1} = 0, \cdots\cdots,$$
$$x_t = x_{2t} = x_{3t} = \cdots\cdots = x_{kt} = 0$$

所以有向量 $x = 0$, B 为正定阵. 即存在部分 Toeplitz 正定阵的 Toeplitz 正定完成 B, 和 A 比较刚好把 A 所有的未知元都取为零元.

例: 部分 Toeplitz 正定阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & ? & 1 & ? \\ ? & 2 & ? & 1 \\ 1 & ? & 2 & ? \\ ? & 1 & ? & 2 \end{bmatrix}$$ 有正定 Toeplitz 完成:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A_1 + A_2$$

定理 5　第 0, $\pm t$, $\pm 2t$, ……, $\pm kt$ ($(k+1)t \leqslant n$, $t > 1$, n 为矩阵阶数) 条对角线为已知的部分 Toeplitz 正定阵有 Toeplitz 正定完成.

证明　与定理 4 不一样, 此时并非所有 t 的倍数的对角线元素都已知, 但我们可以根据定理 3 先完成所有 t 的倍数的对角线, 再利用定理 4.

假设:

$A =$

$$\begin{bmatrix} a_1 & ? & ? & a_t & \cdots & \cdots & a_{kt} & ? & ? & ? \\ ? & a_1 & ? & ? & a_t & \cdots & \cdots & a_{kt} & ? & ? \\ ? & ? & a_1 & ? & ? & a_t & \cdots & \cdots & \cdots & ? \\ a_t & ? & ? & a_1 & ? & ? & \cdots & \cdots & \cdots & a_{kt} \\ \cdots & a_t & ? & ? & \cdots & ? & ? & a_t & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & a_t & ? & ? & \cdots & ? & ? & a_t & \cdots \\ a_{kt} & \cdots & \cdots & \cdots & ? & ? & a_1 & ? & ? & a_t \\ ? & a_{kt} & \cdots & \cdots & a_t & ? & ? & a_1 & ? & ? \\ ? & ? & \cdots & \cdots & \cdots & a_t & ? & ? & a_1 & ? \\ ? & ? & ? & a_{kt} & \cdots & \cdots & a_t & ? & ? & a_1 \end{bmatrix}$$

由于 A 是一个部分正定阵, 所以 $A\{1, t+1, 2t+1, \cdots, kt+1\}$ 是一个正定阵. 同样, $A\{t+1, 2t+1, \cdots, kt+1, (k+1)t+1\}$ 也是一个正定阵, 所以 $A\{1, t+1, 2t+1 \cdots, (k+1)t+1\}$ 是一个部分正定阵, 且只有左下角和右上角两个未知元, 由定理 1, 有 $a_{(k+1)t}$ 用来正定完成. 注意到 $A\{2, t+2, 2t+2, \cdots, (k+1)t+2\}$ 和 $A\{1, t+1, 2t+1 \cdots, (k+1)t+1\}$ 是完全相同的, 所以 $a_{(k+1)t}$ 也可用于 $A\{2, t+2, 2t+2, \cdots, (k+1)t+2\}$ 的正定完成. 依次类推, 可以得到第 $(k+1)t$ 条对角线. 同样的做法, 就可以得到所有 t 的倍数的对角线. 根据定理 4, A 有正定 Toeplitz 完成.

从图的结构来看. 则是先得到 t 个完全图, 再把未知元都取为零元, 得到正定Toeplitz 完成.

参考文献:

[1] Dym H, Gohberg I. Extensions of band matrices with band inverses[J]. Linear Algebra Appl., 1981, 36: 1- 24.

[2] Johnson C R. Matrix completion problems: a survey, proceedings of symposia of applied mathematics [J]. AMS, 1990, 40: 171- 198.

[3] Grone R, Johnson C R, Sa E M, et al. Positive definite completions of partial Hermitian matrices[J]. Linear Algebra Appl., 1984, 58: 109- 124.

[4] Barrett W, Johnson C R, Tarazaga P. The real positive definite completion problem for a simple cycle[J]. Linear Algebra Appl., 1993, 192: 3- 31.

A Class of Positive Definite Completion Problem for Partial Positive Definite Toeplitz Matrices

HE Ming, LU Lin-zhang

(Dept. of Math., Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: Not every partial positive definite Toeplitz matrix has Toeplitz positive definite completion and not every partial positive definite matrix which has positive definite completion has Toeplitz positive definite completion. We consider a special class of partial positive definite Toeplitz matrices which has Toeplitz positive definite completion.

Key words: Toeplitz matrices; completion problem for partial matrices; chordal